Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Vierzehntes Capitel. Von der Krümmung der Curven.

Vierzehntes Capitel.

Von der Krümmung der Curven.

§. 304.

Wir haben in dem vorhergehenden Capitel die geraden Linien aufgesucht, die die Richtung der Curven für jeden Punkt derselben anzeigen: jetzt wollen wir uns mit der Erforschung einfacherer krummen Linien beschäftigen, welche an jedem Orte mit einer gegebenen Curve so genau übereinstimmen, daß man dieselben, wenigstens einen unendlich kleinen Raum hindurch, als mit ihr zusammenfallend betrachten kann. Hierdurch werden wir uns in den Stand setzen, die Natur der gegebenen Curve aus der erkannten Natur der gedachten einfachern zu bestimmen. Wir wollen aber dabey einen ähnlichen Weg einschlagen, als wir oben bey der Erforschung der Natur der ohne Ende fortlaufenden Schenkel gegangen sind. Zuerst nemlich wollen wir die gerade Linie aufsuchen, welche die gegebene Curve berührt; und dann die einfachere Curve zu finden uns bemühen, die damit eine noch weit größere Uebereinstimmung hat, und dieselbe nicht bloß berühret, sondern sich gleichsam an sie anschmiegt oder an ihr hinkrümmt. Man pflegt aber dergleichen genauere Berührung krummer Linien mit dem Worte Osculation [Anschmiegung, Krümmung] zu bezeichnen.

§. 305.

Es sey also irgend eine Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten x und y gegeben, und zur Erforschung der Natur des unendlichen kleinen Theils der Curve Mm, Fig. 55, nachdem man die Abscisse AP = p und die Applicate PM = q gefunden hat, in der Axe MR die unendlich kleine Abscisse Mq = t und die zugehörige Applicate qm = u gesetzt worden: so erhält man, wenn man die hieraus fließenden Werthe von x und y, x = p + t, und y = q + u, in die gegebene Gleichung bringt, dafür folgende Gleichung:

$$o = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + \text{etc.}$$

und diese Gleichung druckt die Natur derselben Curve, auf die Axe MR bezogen, aus. Da wir aber die neuen Coordinaten t und u unendlich klein angenommen haben, so verschwinden die folgenden Glieder als unendlichmal kleinere Größen gegen die vorhergehenden, und können daher, in Vergleichung gegen sie, ohne Irrthum aus der Acht gelassen werden. [Man vergleiche hierbey §. 286. f.]

§. 306.

Wenn also A und B nicht = o sind, so zeigt die Gleichung

$$o = At + Bu,$$

welche man durch Weglassung aller folgenden Glieder erhält, die gerade Linie Mμ an, welche die Curve in dem Punkte M berühret, und mit ihr in diesem Punkte einerley Richtung hat. Es ist also [§. 289.]

$$Mq : q\mu = B : -A$$

und da A und B bekannt sind, so erhellet hieraus die Lage der Tangente Mμ, und nun wollen wir untersuchen, wie weit sich die Curve Mm, als unendlich klein betrachtet, von der gera-

geraden Linie $M\mu$ unterscheide. Zu dieser Absicht sey die Normale MN die Axe, und darauf aus m die senkrechte Applicate mr herabgefällt; auch sey dabey $Mr = r$, und $rm = s$. Alsdann ist

$$t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(A^2 + B^2)}};\ u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$$

$$r = \frac{-At - Bu}{\sqrt{(A^2 + B^2)}};\ s = \frac{Bt - Au}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}.$$

Da nun

$$-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^3 + Ft^3 + Gt^2u + \text{etc.}$$

ist: so ist r unendlichmal kleiner als t und u, und deswegen auch unendlichmal kleiner als s; indem s durch t und u, hingegen r durch die Quadrate oder höhern Potestäten von t und u bestimmt wird.

§. 307.

Wir werden daher die Natur der Curve Mm weit genauer kennen lernen, wenn wir auch die Glieder $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ beybehalten, und bloß die nach ihnen folgenden aus der Acht lassen. Auf diese Art erhalten wir folgende Gleichung zwischen t und u:

$$-At - Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2$$

und wenn wir darin für t und u die im vorhergehenden §. stehenden Werthe setzen, so wird

$$r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{(A^2C + ABD + B^2E)rr}{A^2 + B^2} +$$

$$\frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)rs}{A^2 + B^2} +$$

$$\frac{(A^2E - ABD + B^2C)ss}{A^2 + B^2}$$

Da aber r unendlichmal kleiner ist als s, so verschwinden die Glieder rr und rs gegen ss, und es wird demnach

$$ss = \frac{(A^2 + B^2) r \sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$$

welches die Gleichung ist, wodurch die Natur der Curve ausgedruckt wird, die sich an der gegebenen Curve in dem Punkte M hinkrümmt, oder dieselbe an diesem Orte genau berührt.

§. 308.

Es fällt also der unendlich kleine Bogen Mm mit dem Scheitel einer über der Axe MN beschriebenen Parabel zusammen, deren Parameter

$$= \frac{(A^2 + B^2) \sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}$$

ist; und so wie daher die Krümmung dieser Parabel am Scheitel beschaffen ist, so ist auch die Krümmung der gegebenen Curve in dem Punkte M. Da aber die Krümmung keiner Curve so deutlich und leicht erkannt werden kann, als die des Kreises, weil dieselbe allenthalben gleich und desto größer ist, je kleiner der Halbmesser wird: so ist es bequemer, die Krümmung der Curven durch einen Kreis zu bestimmen, der eine gleiche Krümmung hat, und daher Krümmungskreis [Circulus osculator] genannt zu werden pflegt. Wir müssen also einen Kreis zu finden suchen, dessen Krümmung mit der Krümmung der gegebenen Parabel am Scheitel übereinkömmt, damit wir denselben anstatt der sich anschmiegenden Parabel zu gebrauchen berechtiget seyn mögen.

§. 309.

Um dieses zu thun, wollen wir die Krümmung des Kreises als unbekannt ansehen, und dieselbe auf die erklärte Art durch die Krümmung der Parabel ausdrucken.

Wenn

Wenn nemlich dieses geschehen ist, so sind wir dadurch berechtigt, auch umgekehrt für die sich anschmiegende Parabel den Krümmungskreis zu setzen. Es sey also die gegebene Curve Mm ein Kreis, der mit dem Halbmesser $= a$ beschrieben worden, und dessen Natur daher durch die Gleichung

$$yy = 2ax - xx$$

ausgedruckt werde. Nimmt man daher $AP = p$, und $PM = q$, so wird

$$qq = 2ap - pp$$

Nun setze man $x = p + t$, und $y = q + u$, so bekommt man die Gleichung:

$$qq + 2qu + uu = 2ap + 2at - pp - 2pt - tt$$

die weil $qq = 2ap - pp$ ist, auf diese Form gebracht werden kann:

$$o = 2at - 2pt - 2qu - tt - uu.$$

Vergleicht man aber diese Gleichung mit der obigen, so findet man

$$A = 2a - 2p;\ B = -2q;\ C = -1;\ D = o$$
$$\text{und } E = -1$$

und daher wird denn

$$AA + BB = 4(aa - 2ap + pp + qq) = 4aa$$
$$(AA + BB)\sqrt{(AA + BB)} = 8a^3;\ \text{und}$$
$$AAE - ABD + BBC = -AA - BB = -4aa.$$

Wenn also der Halbmesser eines Kreises $= a$ genommen wird, so wird derselbe von dem Scheitel einer Parabel, deren Natur durch die Gleichung $ss = 2ar$ ausgedruckt wird, genau berührt; und wenn daher eine Curve von dem Scheitel einer Parabel, deren Gleichung $ss = br$ ist, genau berührt wird, so wird dieselbe auch von dem Kreise genau berührt, dessen Halbmesser $= \frac{1}{2}b$ ist.

§. 310.

Da wir also vorhin gefunden haben, daß die Curve Mm von einer Parabel, deren Gleichung

$$ss = \frac{(AA + BB)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{A^2E - ABD + B^2C}\,r$$

ist, genau berührt wird: so fällt in die Augen, daß die Krümmung eben dieser Curve in dem Punkte M auch mit der Krümmung eines Kreises übereinkomme, dessen Halbmesser

$$= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$$

ist. Dieser Ausdruck giebt demnach den Halbmesser des Krümmungskreises, der auch Krümmungshalbmesser [radius osculi] genannt zu werden pflegt, an; und es kann folglich aus der Gleichung zwischen t und u, die wir aus der gegebenen Gleichung zwischen x und y abgeleitet haben, der Krümmungshalbmesser der Curve in dem Punkte M, oder der Halbmesser des Kreises, der sich in M an der Curve hinkrümmt, sogleich bestimmt werden. Man darf nemlich nur aus der zwischen t und u gefundenen Gleichung alle Glieder weglassen, worin t und u mehr als zwey Dimensionen haben, und darauf aus der zurückbleibenden Gleichung von dieser Form

$$0 = At + Bu + Ctt + Dtu + Euu$$

den Krümmungshalbmesser $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$ setzen.

§. 311.

Da aber die Wurzelgröße $\sqrt{(A^2 + B^2)}$ einen zwiefachen Werth hat, so ist noch unausgemacht, ob der Ausdruck

$$\frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$$

posi-

positiv oder negativ sey; d. h. ob der Punkt N auf der hohlen oder auf der erhabenen Seite der Curve liege. Um diese Ungewißheit aus dem Wege zu räumen, muß man untersuchen, ob der Punkt der Curve m diesseits der Tangente $M\mu$ nach der Axe AN hin, oder jenseits der Tangente befindlich sey. Im ersten Falle ist die Curve nach N zu hohl, und der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt in dem Theile der geraden Linie MN, der nach der Axe hin gerichtet ist: im andern Falle hingegen fällt derselbe in den jenseits M verlängerten Theil von MN. Es verschwindet daher alle Ungewißheit, wenn man untersucht, ob qm kleiner oder größer als $q\mu$ ist; denn im ersten Falle ist die Curve nach N zu hohl, und im andern erhaben.

§. 312.

Nun ist $q\mu = \frac{-At}{B}$, und $qm = u$; folglich muß man untersuchen, ob $\frac{-At}{B}$ größer oder kleiner als u ist. Da nun $m\mu$ eine unendlich kleine Linie ist, so setze man $m\mu = \omega$, wodurch denn

$$u = \frac{-At}{B} - \omega$$

und wenn man substituirt

$$o = -B\omega + Ctt - \frac{ADtt}{B} - Dt\omega + \frac{A^2Ett}{BB} + \frac{2AEt\omega}{B} + E\omega^2$$

wird. Da aber ω gegen t unendlich klein ist, so verschwinden die Glieder $t\omega$ und ω^2, und es wird folglich

$$\omega = \frac{(B^2C - ABD + A^2E)tt}{B^3}$$

Ist demnach ω eine positive Größe, welches statt findet, wenn

$$\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B^3} \text{ oder } \frac{B^2C - ABD + A^2E}{B}$$

positiv ist: so ist die Curve nach N zu hohl; ist aber $\frac{B^2C - ABD + A^2E}{B}$ negativ, so ist dieselbe nach N zu erhaben.

§. 313.

Damit dieses deutlicher werde, wollen wir die verschiedenen Fälle, die sich ereignen können, jeden besonders betrachten. Es sey daher zuvörderst $B = o$, wo denn die Applicate PM, Fig. 57, die Tangente der Curve Mm, und der Krümmungshalbmesser $= \frac{A}{2E}$ ist. Ob aber die Curve nach R zu hohl seyn werde, wie in der Figur, oder erhaben, erkennt man aus der Gleichung

$$o = At + Ctt + Dtu + Euu.$$

Denn da $Mq = t$, und $qm = u$, und t unendlichmal kleiner ist als u, so verschwinden die Glieder tt und tu gegen uu, und es wird daher

$$At + Euu = o$$

Haben nun in dieser Gleichung A und E verschiedene Zeichen, oder ist $\frac{E}{A}$ eine negative Größe, so ist die Curve nach R zu hohl; sind aber die Zeichen von A und E gleich, oder ist $\frac{E}{A}$ eine positive Größe, so liegt die Curve auf der andern Seite der Tangente, weil man die Abscisse Mq negativ annehmen muß, wenn dazu eine reelle Applicate qm gehören soll.

§. 314.

Nun sey Fig. 55 die Tangente $M\mu$ gegen die Axe AP geneigt, oder ihr parallel, so daß der Winkel $RM\mu$ spitzig sey, und die Normale MN die Axe in N jenseits P schneide. In diesem Falle gehören zu den Abscissen t positive Applicaten u, und es haben daher die Coefficienten A und B ungleiche Zeichen, und der Bruch $\frac{A}{B}$ ist negativ. Wenn aber dieses statt findet, so haben wir bereits vorhin gesehen, [§ 312], daß die Curve nach N zu hohl wird, wenn $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ eine positive Größe ist, oder wenn, im Fall $\frac{B}{A}$ negativ wird, $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ negativ ist. Wird hingegen $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ negativ, oder $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{A}$ positiv, so ist die Curve nach N zu erhaben. In beyden Fällen aber ist der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}.$$

§. 315.

Ist aber $A = 0$, so wird die der Axe parallele gerade Linie MR, Fig. 58, zugleich eine Tangente der Curve; auch ist u unendlichmal kleiner als t, und folglich

$$0 = Bu + Ctt.$$

Haben daher B und C gleiche Zeichen, oder ist BC positiv, so muß u einen negativen Werth haben, und also die Curve nach dem Punkte P zu hohl seyn. Dabey fällt N in P, wie solches auch die vorhergehende Regel giebt, wenn man

A = 0

$A = 0$ setzt, und der Krümmungshalbmesser ist $= \frac{B}{2C}$. Eben diese vorhin gegebene Regel gilt, wenn die Tangente MT, Fig. 59, jenseits P mit der Axe zusammenkömmt; denn es ist alsdann ebenfalls die Curve nach N zu entweder hohl oder erhaben, je nachdem der Ausdruck $\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B}$ entweder positiv oder negativ ist, und der Krümmungshalbmesser ist wie vorhin $= \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$

§. 316.

Es sey eine Ellipse oder ein Quadrant derselben DMC, Fig. 60, gegeben, der den Mittelpunkt A, die halbe Hauptaxe $AD = a$, und die halbe zugehörige Axe $AC = b$ habe. Nimmt man die Abscissen x in der Axe AD vom Mittelpunkte A aus, so ist die Gleichung für diese Ellipse [nach § 138]

$$aayy + bbxx = aabb.$$

Setzt man nun irgend eine Abscisse $AP = p$, und die Applicate $PM = q$, so wird

$$aaqq + bbpp = aabb$$

und, wenn man $x = p + t$, und $y = q + u$ macht,

$$aaqq + 2aaqu + aauu + bbpp + 2bbpt + bbtt = aabb$$

oder

$$2bbpt + 2aaqu + bbtt + aauu = 0$$

Es kommt also zuvörderst die Normale MN, wegen der Coefficienten von t und u, dießeits P mit der Axe zusammen, und es wird

$$PM : PN = B : A = aaq : bbp; \text{ und } PN = \frac{bbp}{aa}$$

weil $A = 2bbp$, und $B = aaq$ ist.

Außer-

Außerdem aber ist auch, weil

$C = bb$; $D = o$; und $E = aa$ ist

$$\frac{A^2E - ABD + B^2C}{B} = \frac{4aabb(aaqq + bbpp)}{2aaq} = \frac{4a^4b^4}{2aaq}$$

und also positiv: woraus denn erhellet, daß die Curve nach N zu hohl ist.

§. 317.

Was den Krümmungshalbmesser betrifft, so ist

$A^2 + B^2 = 4(a^4qq + b^4pp)$, und

$A^2E - ABD + B^2C = 4a^4b^4$,

und folglich der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(a^4qq + b^4pp)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Da nun

$$MN = \sqrt{(qq + \frac{b^4pp}{a^4})}, \text{ und folglich}$$

$$\sqrt{(a^4qq + b^4pp)} = aa.MN$$

ist, so wird der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{a^2.MN^3}{b^4}.$$

Wenn man aber auf die verlängerte Normale MN aus dem Mittelpunkte A die senkrechte Linie AO zieht, so wird, weil $AN = p - \frac{bbp}{aa}$, und die Dreyecke MNP und ANO einander ähnlich sind,

$$NO = \frac{aabbpp - b^4pp}{a^4.MN}, \text{ und}$$

$$MO = NO + MN = \frac{aaqq + bbpp}{aa.MN} = \frac{bb}{MN}$$

und also

$$MN = \frac{bb}{MO}.$$

Hier-

Hieraus erhält man für den Krümmungshalbmesser den Ausdruck

$$\frac{aabb}{MO^3}$$

der für jede der beyden Axen gleich bequem gebraucht werden kann.

§. 318.

Hat man für jeden Punkt einer Curve den Krümmungshalbmesser gefunden, so kennt man eben dadurch die Natur der Curve auf das deutlichste. Denn theilt man ein Stück der Curve in sehr viele sehr kleine Theile, so kann man einen jeden dieser Theile als einen Kreisbogen betrachten, dessen Halbmesser der Krümmungshalbmesser von ihm ist. Dadurch ist man aber auch im Stande die Beschreibung einer Curve durch eine beträchtliche Menge von Punkten weit genauer zu verrichten. Denn wenn man, nachdem man eine hinlängliche Anzahl von Punkten, durch welche die Curve gehet, gefunden hat, für jeden dieser Punkte zuvörderst die Tangenten, dann die Normalen, und nun die Krümmungshalbmesser sucht, so kann man die kleinen Theile der Curve zwischen den gefundenen Punkten mit Hülfe des Zirkels beschreiben, und es wird auf diesem Wege die wahre Gestalt der Curve desto genauer dargestellt, je mehr Punkte man zuvor gefunden hat.

§. 319.

Da also der sehr kleine Theil der Curve bey M mit dem Kreisbogen, der mit dem Krümmungshalbmesser beschrieben worden ist, zusammenfällt, so hat nicht nur das Element der Curve Mm sondern auch das vorhergehende Mn eben dieselbe Krümmung. Da nemlich die Natur des unendlich

endlich kleinen Theils Mm durch eine Gleichung, wie diese: $ss = \alpha r$, wo $r = Mr$, und $s = rm$ die Coordinaten bedeuten, ausgedruckt wird: so kommt jeder unendlich kleinen Abscisse $Mr = r$ eine doppelte Applicate, eine positive und eine negative zu, und es erstreckt sich folglich die Curve auf eben die Art nach n als nach m. Wenn daher der Krümmungshalbmesser, der $= \frac{1}{2}\alpha$ ist, eine endliche Größe hat, so ist die Krümmung auf beyden Seiten, wenigstens einen unendlich kleinen Raum hindurch, einförmig. Es kann folglich auch in diesen Fällen die Curve weder plötzlich aus M, nachdem sie daselbst eine Spitze gemacht hat, zurücktreten, noch daselbst ihre Krümmung verändern, und die erhabene Seite von Mn nach N zu kehren, wenn Mm nach eben diesem Punkte zu hohl ist. Da man nun eine solche Veränderung der Krümmung Wendungspunkt nennt, so kann da, wo der Krümmungshalbmesser eine endliche Größe hat, weder eine Spitze noch ein Wendungspunkt statt finden.

§. 320.

Da aus der Gleichung zwischen t und u

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gttu + Htu^2 + \text{etc.}$$

der Krümmungshalbmesser $= \dfrac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2(A^2E - ABD + B^2C)}$ wird: so fällt in die Augen, daß der Krümmungshalbmesser, wenn

$$A^2E - ABD + B^2C = 0$$

ist, unendlich groß wird, und also der berührende Kreis in eine gerade Linie übergehet. Da also, wo dieses geschiehet, kömmt der Curve keine Krümmung zu, und es gehen daselbst die beyden Elemente der Curve gleichsam in einer geraden Linie fort. Um aber die Natur der Curve in diesen

Fällen

Fällen genauer kennen zu lernen, muß man die Substitutionen

$$t = \frac{-Ar + Bs}{\sqrt{(AA + BB)}}, \text{ und } u = \frac{-As - Br}{\sqrt{(AA + BB)}}$$

[§ 306] auch in die Glieder $Ft^3 + Gttu + Htuu + Ju^3$ bringen. Da nun gegen das erste Glied $r\sqrt{(A^2 + B^2)}$ alle folgende Glieder, die r enthalten, verschwinden, so bekömmt man, wenn man diese Glieder wegläßt, und die Substitution durch die ganze Gleichung vornimmt, eine Gleichung von dieser Form

$$r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \text{etc.}$$

§. 321.

Aus dieser Gleichung findet man sogleich wie oben [§ 310] daß der Krümmungshalbmesser $= \frac{\sqrt{(A^2 + B^2)}}{2\alpha}$ ist. Ist aber $\alpha = 0$, und folglich der Krümmungshalbmesser unendlich groß, so muß man, um die Natur der Curve genauer kennen zu lernen, das folgende Glied βs^3 nehmen, so daß

$$r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \beta s^3$$

sey; denn wenn β nicht $= 0$ ist, so verschwinden alle übrige Glieder γs^4, δs^5, etc. gegen βs^3. Es wird also in diesem Falle die Curve in M von einer durch diese Gleichung $r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \beta s^3$ ausgedruckten Curve berührt, und daraus läßt sich denn auch die Gestalt jener Curve um M erkennen. Da also zu der Abscisse r, wenn dieselbe negativ genommen wird, eine negative Applicate s gehört, so schlängelt sich die Curve in M, wie Fig. 61, und hat also in M einen Wendungspunkt.

§. 322.

Ist außer α auch $\beta = 0$, so wird die Natur der Curve um M durch diese Gleichung

$$r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \gamma s^4$$

ausgedruckt; und da daraus zu jeder Abscisse r eine doppelte Applicate s, eine positive und eine negative, gehört, und die Abscisse nicht auf beyden Seiten genommen werden kann, so liegen in diesem Falle beyde Theile der Curve Mm und Mμ, Fig. 62, auf einer und derselben Seite der Tangente. Wenn aber, weil α, β, und γ verschwinden, die Natur der Curve durch die Gleichung

$$r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \delta s^5$$

ausgedruckt wird, so hat die Curve bey M wieder einen Wendungspunkt, wie Fig. 61; und wenn auch $\delta = 0$, und also

$$r\sqrt{(A^2 + B^2)} = \varepsilon s^6$$

ist, so hat abermals die Curve dergleichen nicht, wie Fig. 62. Ueberhaupt hat die Curve, wenn der Exponent von s eine ungerade Zahl ist, in M einen Wedungspunkt, wenn aber dieser Exponent eine gerade Zahl ist, so findet daselbst kein Wendungspunkt statt.

§. 323.

So verhält es sich mit den Curven, wenn der Punkt M ein einfacher Punkt ist, oder wenn in der Gleichung

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \text{ꝛc.}$$

A und B nicht zugleich verschwinden. Wenn aber sowohl A als B = 0 ist, und die Curve zwey oder mehrere sich in dem Punkte M schneidende Schenkel hat, so muß man, eben so wie vorhin, die Krümmung eines jeden Schenkels und seine Beschaffenheit in M besonders untersuchen. Angenommen nemlich, daß für die Tangente eines Schenkels

$$mt + nu = o$$

sey, so suche man eine Gleichung für diesen Schenkel zwischen den Coordinaten r und s, so daß jene, r, auf der Normale MN, Fig. 55, genommen wird, und unendlichmal kleiner ist als s. [§. 306]. Man muß also

$$t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}, \text{ und } u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$$

setzen; und ist dieses geschehen, und sind die Glieder, die wegen ihrer unendlichen Kleinheit gegen die übrigen verschwinden, weggelassen worden: so erhält man, wenn M ein doppelter Punkt ist, eine Gleichung von der Form:

$$rs = \alpha s^3 + \beta s^4 + \gamma s^5 + \delta s^6 + \text{ꝛc.}$$

wenn aber M ein dreyfacher Punkt ist, eine Gleichung wie diese:

$$rss = \alpha s^4 + \beta s^5 + \gamma s^6 + \delta s^7 + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Alle diese Gleichungen lassen sich aber auf folgende Form bringen:

$$r = \alpha ss + \beta s^3 + \gamma s^4 + \delta s^5 + \text{ꝛc.}$$

§. 324.

Aus dieser Gleichung sieht man, daß der Schenkel der Curve, welchen wir untersuchen, in M den Krümmungshalbmesser $= \frac{1}{2\alpha}$ hat, und daß folglich dieser Krümmungshalbmesser, wenn $\alpha = o$ ist, $= \infty$ wird. In diesem Falle wird also die Natur der Curve durch eine von folgenden Gleichungen ausgedruckt:

$$r = \beta s^3;\ r = \gamma s^4;\ r = \delta s^5;\ \text{ꝛc.}$$

und daraus schließt man wieder wie vorhin, [§. 321, 322.] entweder, daß die Curve in M einen Wendungspunkt habe, oder

oder daß dergleichen daselbst nicht statt finde. Das erste ist, wenn der Exponent von s eine ungerade Zahl, das letzte aber, wenn er eine gerade Zahl wird. Auf diese Art muß man also jeden durch M gehenden Schenkel der Curve besonders untersuchen, wenn man zuvor seine Tangente gefunden hat, und diese Tangente von den Tangenten der übrigen in eben diesem Punkte M sich schneidenden Schenkeln verschieden ist.

§. 325.

Auf eine andere Art aber verhält es sich, wenn die Tangenten zweyer oder mehrerer Schenkel zusammenfallen. Denn verschwinden A und B, und sind in der Gleichung

$$0 = Ctt + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u + \text{etc.}$$

die beyden einfachen Faktoren des ersten Gliedes $Ctt + Dtu + Euu$ einander gleich, oder haben die beyden in M, Fig. 55, sich schneidenden Schenkel der Curve eine gemeinschaftliche Tangente: so setze man

$$Ctt + Dtu + Euu = (mt + nu)^2$$

und suche eine Gleichung zwischen den Coordinaten $Mr = r$, und $rm = s$, indem man:

$$t = \frac{-mr + ns}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}, \text{ und } u = \frac{-ms - nr}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$$

macht. Hierdurch erhält man eine Gleichung von folgender Form:

$$rr = \alpha rss + \beta s^3 + \gamma rs^4 + \delta s^4 + \varepsilon rs^4 + \zeta s^5 + \text{etc.}$$

weil alle Glieder, worin r zwey oder mehr Dimensionen hat, gegen das erste rr verschwinden.

§. 326.

Hier ist nun zuvörderst das Glied βs^3 zu betrachten, denn ist dieses da, so verschwinden dagegen alle übrige

Glieder, weil r unendlichmal kleiner ist als s. Ist also β nicht $= 0$, so wird die Natur der Curve um M durch die Gleichung

$$rr = \beta s^3$$

ausgedruckt; und da daraus

$$r = s\sqrt{\beta s} = ss\sqrt{\frac{\beta}{s}}$$

wird, so sieht man, daß der Krümmungshalbmesser in $M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{s}{\beta}}$, oder auch, weil s in M verschwindet, $= 0$ ist. Es ist demnach in dem betrachteten Falle die Krümmung unendlich groß, oder das Element der Curve in M ein Theil eines unendlich kleinen Kreises. Da ferner die Applicate s einerley Werth bekommt, man mag die Abscisse r positiv oder negativ nehmen, so erhellet zugleich, daß die Curve in M, Fig. 63, eine Spitze habe, und in zweyen Schenkeln Mm, $M\mu$ aus einander fahre, die sich in M berühren, und der Tangente Mt die erhabene Seite zukehren.

§. 327.

Nun sey $\beta = 0$, dagegen aber fehle das Glied δs^4 nicht, gegen welches das Glied γrs^3 verschwindet. Alsdann wird die Natur der Curve um M durch die Gleichung

$$rr = \alpha rss + \delta s^4$$

ausgedruckt, welche, wenn $\alpha\alpha$ kleiner als -4δ ist, wegen ihrer imaginären Faktoren in M einen zugehörigen Punkt zu erkennen giebt, und, wenn $\alpha\alpha$ größer als -4δ ist, in zwey Gleichungen von der Form

$$r = fss; \text{ und } r = gss$$

zerfällt. In diesem Falle berühren sich also in M zwey Schenkel der Curve, davon der eine den Krümmungshalbmesser

messer $= \frac{1}{2f}$, und der andere $= \frac{1}{2g}$ hat. Wenn daher diese beyden Schenkel die hohle Seite nach eben der Gegend zu kehren, so hat die Curve die Gestalt zweyer von innen, Fig. 64, wenn sie aber dieselbe nach entgegengesetzten Seiten zu gerichtet haben, zweyer von außen sich berührenden Kreisbogen, Fig. 65.

§. 328.

Wenn auch δ verschwindet, so läßt sich die Gleichung entweder in zwey andere Gleichungen auflösen oder nicht. Im ersten Falle ergeben sich zwey Schenkel, die sich in dem Punkte M berühren, und davon die Natur eines jeden durch eine Gleichung von der Form

$$r = \alpha s^m$$

ausgedruckt wird. Hier giebt es also so viel verschiedene Gestalten, als Combinationen zweyer Schenkel, die in M einen einfachen Punkt erzeugen. Diese Schenkel wollen wir Schenkel der ersten Ordnung nennen, die folglich insgesammt in der Gleichung $r = \alpha s^m$ enthalten sind. Im andern Falle, wenn sich nemlich die Gleichung nicht in zwey andere Gleichungen auflösen läßt, wird die Natur der Curve durch eine von folgenden Gleichungen ausgedruckt:

$$rr = \alpha s^5;\ rr = \alpha s^7;\ rr = \alpha s^9;\ \text{rc.}$$

und diese Schenkel wollen wir, nebst dem, den wir vorhin $rr = \alpha s^3$ gefunden haben, mit dem Namen, Schenkel der zweyten Ordnung, belegen, weil sie die Stelle zweyer Schenkel der ersten Ordnung, die sich in M berühren, vertreten. Diese Schenkel der zweyten Ordnung haben insgesammt in M eine Spitze, wie die Gleichung $rr = \alpha s^3$ [§ 326] gab, doch mit dem Unterschiede, daß der Krümmungshalbmesser in M, der aus der Gleichung $rr = \alpha s^3$

unendlich klein war, bey den übrigen Gleichungen unendlich groß wird. Denn da aus der Gleichung $rr = \alpha s^5$

$$r = ss\sqrt{\alpha s}$$

wird, so ist der Krümmungshalbmesser in $M = \frac{1}{2\sqrt{\alpha s}}$, oder unendlich groß, weil $s = 0$ ist.

§. 329.

Wenn die Tangenten dreyer Schenkel, die sich im M schneiden, zusammenfallen, so berühren sich entweder drey Schenkel der ersten Ordnung in eben demselben Punkte M, oder es ist M ein Berührungspunkt eines Schenkels der zweyten und eines Schenkels der ersten Ordnung, oder es geht durch M ein einziger Schenkel der dritten Ordnung. Es wird aber die Natur der Schenkel der dritten Ordnung durch eine von folgenden Gleichungen:

$$r^3 = \alpha s^4;\ r^3 = \alpha s^5;\ r^3 = \alpha s^7;\ r^3 = \alpha s^8;\ \text{rc.}$$

oder überhaupt durch

$$r^3 = \alpha s^n$$

ausgedruckt, wenn n irgend eine ganze Zahl, die größer als 3, und dabey nicht durch 3 theilbar ist, bedeutet. Die Gestalt dieser Schenkel aber ist so beschaffen, daß in M ein Wendungspunkt statt findet, wenn n eine ungerade Zahl ist; wenn aber n eine gerade Zahl wird, so gehen die Schenkel ohne Wendungspunkt, wie Fig. 62, fort. Uebrigens ist der Krümmungshalbmesser bey diesen Curven in M unendlich klein, wenn n kleiner als 6, und unendlich groß, wenn n größer als 6 ist.

§. 330.

Auf eine ähnliche Art verhält es sich, wenn vier Tangenten von den Schenkeln, die sich in dem Punkte M schneiden,

zu-

zusammenfallen. Es berühren sich nemlich alsdann entweder vier Schenkel der ersten Ordnung, oder zwey von der ersten und einer von der zweyten Ordnung, oder zwey von der zweyten Ordnung, oder einer von der ersten und einer von der dritten Ordnung einander in einem und demselben Punkte M, oder es geht endlich durch diesen Punkt M ein einziger Schenkel der vierten Ordnung. Es wird aber die Natur der Schenkel der vierten Ordnung durch die allgemeine Gleichung

$$r^4 = \alpha s^n$$

ausgedruckt, wenn n eine ganze ungerade Zahl bedeutet, die größer als 4 ist. Alle diese Gleichungen geben eine Spitze, wie die Schenkel der zweyten Ordnung, Fig. 63; und was den Krümmungshalbmesser in M betrifft, so ist derselbe unendlich klein, wenn n kleiner als 8, und unendlich groß, wenn n größer als 8 ist.

§. 331.

Auf eben die Art läßt sich die Natur der Schenkel der fünften und der übrigen höhern Ordnungen bestimmen. Was die Gestalt derselben betrifft, so kommen die Schenkel der fünften, der siebenten, der neunten und überhaupt aller ungeraden Ordnungen mit den Schenkeln der ersten Ordnung überein, die entweder einen Wendungspunkt haben, oder nicht. Die Schenkel der sechsten, achten und überhaupt aller geraden Ordnungen hingegen sind in Ansehung der Gestalt mit den Schenkeln der zweyten und vierten Ordnung von einerley Art, oder haben insgesammt eine Spitze in M, wie die 63ste Figur darstellt. Den Krümmungshalbmesser anlangend, so läßt sich, da die Natur aller dieser Bogen durch die Gleichung

$$r^m = \alpha s^n$$

ausgedrückt wird, wenn n größer ist als m, leicht einsehen, daß derselbe, wenn n kleiner ist als 2m, unendlich klein, und wenn n größer ist als 2m, unendlich groß sey.

§. 332.

Es lassen sich also die verschiedenen Beschaffenheiten, mit welchen sich die Curven in Ansehung ihrer Gestalt darstellen, auf drey Gattungen zurückbringen. Zuvörderst giebt es nemlich Curven, die mit einer stetigen Krümmung fortgehen, und nirgends weder einen Wendungspunkt noch eine Spitze haben. Dieses findet statt, einmal, wenn der Krümmungshalbmesser allenthalben endlich ist; zweytens giebt es auch einige Fälle, wo die unendliche Größe oder Kleinheit des Krümmungshalbmessers das Fortschreiten der Curve in stetiger Krümmung nicht verhindert; und zwar ereignen sich diese Fälle, wenn die Natur der Curve um M durch die Gleichung

$$\alpha r^m = s^n$$

ausgedruckt wird, so daß m eine ungerade Zahl, n hingegen eine gerade Zahl und größer als m ist. Zum andern können die Curven einen Wendungspunkt haben, wobey denn der Krümmungshalbmesser nothwendig entweder unendlich klein oder unendlich groß seyn muß. Man erkennt solches aus der Gleichung

$$\alpha r^m = s^n$$

wenn beyde Exponenten m und n ungerade Zahlen sind; n muß aber stets größer als m seyn. Es ist nemlich der Krümmungshalbmesser unendlich groß, wenn n größer als 2m, und unendlich klein, wenn n kleiner als 2m ist. Endlich kann es eine Spitze oder Rückkehrpunkt geben, wo gleichsam zwey Schenkel, mit ihren erhabenen Seiten gegen einander gekehrt, bey ihrer Zusammenkunft in einem Punkte sich berührühren und daselbst endigen. Einen solchen Punkt giebt die Gleichung

$$ar^m = s^n$$

zu erkennen, wenn m eine gerade und n eine ungerade Zahl ist. Bey einer Spitze ist daher der Krümmungshalbmesser allemal entweder unendlich groß oder unendlich klein.

§. 333.

Da sich also alle Verschiedenheiten, die sich bey den Curven in Ansehung ihrer stetigen Fortschreitung finden können, auf diese drey Arten bringen lassen, so erhellet, einmal, daß der Schenkel einer continuirlichen Curve nie auf die Art gebogen seyn kann, daß er bey C, Fig. 66, einen endlichen Winkel ACB mache. Da ferner bey einer Spitze beyde Schenkel einander ihre erhabene Seite zukehren, so giebt es keine solche Spitze ACB in C, Fig. 67, wo die beyden Schenkel AC und BC zwar in C eine gemeinschaftliche Tangente haben, dabey aber die hohle Seite des einen nach der erhabenen Seite des andern hingerichtet ist; und so oft eine Curve auf diese Art zurückzutreten scheinet, so oft ist dieselbe unvollständig, so daß, wenn man die Curve nach einer Gleichung ergänzt, und nach allen ihren Theilen ausdruckt, eine Curve wie Fig. 64, entsteht. Es giebt zwar Methoden Curven zu beschreiben, wobey dergleichen Spitzen ACB entstehen, die daher auch vom Marquis de L'Hopital Spitzen der zweyten Art genannt werden. Aber man muß dabey bedenken, daß die mechanischen Methoden nicht immer die ganze Curve, die in einer Gleichung enthalten ist, hervorbringen, sondern öfters nur einen gewissen Theil derselben darstellen. Durch diesen einzigen Umstand wird der ganze Streit, der über die Spitzen der zweyten Art entstanden und geführt worden ist, gehoben.

So sehr man indeß hierdurch berechtigt scheint, zu behaupten, daß es keine Spitze der zweyten Ordnung gebe, so hat man gleichwohl eine Menge von algebraischen Curven, die damit versehen sind. Unter andern sogar eine Linie der vierten Ordnung, die in der Gleichung

$$y^4 - 2y^2x - 4yxx - x^3 = 0,$$

welche aus dieser, $y = \sqrt{x} \pm \sqrt[4]{x^3}$ entspringt, enthalten ist. Denn wenn hier gleich zuerst das Glied $\sqrt{x}$ vorkommt, so kann dasselbe dennoch nicht positiv und negativ genommen werden, sondern muß nothwendig das Zeichen + haben, weil, wenn man ihm das Zeichen − geben wollte, das andere Glied $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt{(x\sqrt{x})}$ imaginär werden würde. Und aus diesem Beyspiele läßt sich die Einschränkung, die man zu den obigen hinzufügen muß, hinlänglich abnehmen.

334.

Wenn, Fig. 64, zwey Schenkel, die in M eine gemeinschaftliche Tangente haben, und also vier aus M ausgehende Bogen, Mm, Mμ, Mn, Mν vorstellen, durch verschiedene Gleichungen ausgedruckt werden, so ist es keinem Zweifel unterworfen, welche von diesen Schenkeln continuirlich sind; es sind solches nemlich diejenigen, die durch einerley Gleichung ausgedruckt werden, so daß daher der Bogen Mm eine Fortsetzung von Mn, und der Bogen Mμ eine Fortsetzung von Mν ist. Wenn aber jene beyde Schenkel durch einerley Gleichung ausgedruckt werden, so kann, da der vorhergehende Grund wegfällt, der Bogen Mm nicht nur als eine Fortsetzung des Bogens Mn sondern auch als eine Fortsetzung von Mν angesehen werden; und da auf diese Art jeder der Bogen Mn und Mν als eine Fortsetzung

setzung von Mm betrachtet werden kann, so kann man auch den einen als die Fortsetzung des andern ansehen. Man kann also hiernach sagen, daß sowohl die Bogen Mm und Mμ als jede zwey andere von den angeführten eine continuirliche Curve bilden, und in diesem Falle stoßen in M zwey Spitzen der zweyten Art mMμ und nNν zusammen.

§. 335.

Und dies gilt nicht nur von zwey Schenkeln, die sich ohne Wendungspunkt und ohne Spitze in dem Punkte M berühren, und durch einerley Gleichung ausgedruckt werden, sondern es verhält sich in Ansehung der Continuität auf eben die Art bey jeden zwey Schenkeln, die sich in M berühren, wofern sie nur durch einerley Gleichung ausgedruckt werden. Es geschieht dieses, so oft man zu einer Gleichung zwischen r und s von folgender Form kommt

$$\alpha^2 r^{2m} - 2\alpha\beta r^m s^n + \beta\beta s^{2n} = 0$$

denn alsdann wird jeder Schenkel durch die Gleichung

$$\alpha r^m = \beta s^n$$

ausgedruckt. In diesem Falle können also je zwey von den vier Bogen, die aus dem Punkte M ausgehen, für eine continuirliche Linie gehalten werden, und daher entstehet denn eine unzähliche Menge von Spitzen der zweyten Art. Eben diese Beschaffenheit der Continuität ist aber auch der Grund, warum einige mechanische Beschreibungen und Constructionen Spitzen der zweyten Art hervorbringen; doch kann dieses nicht geschehen, als wenn man dadurch nicht die ganze in der Gleichung enthaltene Curve, sondern nur einen oder einige Schenkel derselben darstellet.

Fünf-