Dreyzehntes Capitel.

Von den Eigenschaften der Curven.

§. 285.

So wie wir oben [im siebenten und achten Capitel] die Natur der ohne Ende fortlaufenden Schenkel auf die Art zu beschreiben gesucht haben, daß wir eine gerade Linie oder eine Curve angaben, die mit jener Curve im Unendlichen zusammenfiel: eben so wollen wir nun im gegenwärtigen Capitel jeden Theil der Curven im endlichen Raume betrachten, und die gerade Linie oder die Curve kennen zu lernen suchen, die mit einem solchen Theile, wenigstens einen unendlich kleinen Raum hindurch, zusammenfällt. Zuvörderst ist hierbey klar, daß jede gerade Linie, welche eine Curve berührt, da, wo sie dieses thut, mit der Curve einerley Richtung, und folglich auch zum wenigsten zwey Punkte gemein habe. Allein es lassen sich auch andere Curven finden, die mit einem gegebenen Theile einer Curve noch mehr übereinkommen, und sich gleichsam daran hinkrümmen oder anschmiegen. Kennt man aber die gedachte gerade Linie oder diese Curve, so ist dadurch auch die andere Curve an jedem Orte in derselben, und ihre Beschaffenheit bekannt.

§. 286.

Ist daher eine Gleichung für irgend eine Curve zwischen den Coordinaten x und y gegeben, so ertheile man der Abscisse

sciſſe x, Fig. 55, einen beliebigen beſtimmten Werth, AP = p, ſuche die Werthe, welche der Applicate y für dieſen Werth der Abſciſſe zukommen, und nehme davon, wenn es deren mehrere giebt, einen, PM = q, nach Willkühr an, wo denn M ein Punkt wird, durch welchen die Curve geht. Iſt dieſes geſchehen, ſo werden ſich die Glieder der gegebenen Gleichung, wenn man darin p für x, und q für y ſetzt, einander aufheben. Um nun die Natur des Theils der Curve, welcher durch den Punkt M geht, zu erforſchen, ziehe man aus M die gerade Linie Mq der Axe AP parallel, nehme dieſe Linie zur Axe an, und ſetze die neue Abſciſſe Mq = t, und die Applicate qm = u. Da der Punkt m ebenfalls in der Curve befindlich iſt, ſo muß ſich, wenn man mq bis nach der vorigen Axe in p verlängert, und Ap = p + t für x, und pm = q + u für y ſubſtituirt, eine Gleichung ergeben, die der vorhin gedachten identiſch iſt.

§. 287.

Bringt man aber dieſe Subſtitutionen in die zwiſchen x und y gegebene Gleichung, ſo heben ſich darin alle die Glieder, worin weder t noch u vorkommt, einander auf, und es bleiben bloß diejenigen übrig, welche die Coordinaten t und u enthalten. Auf dieſe Art entſteht eine Gleichung von folgender Form:

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Euu + Ft^3 + Gt^2u + Htuu + \text{ꝛc.}$$

worin A, B, C, D, ꝛc. beſtändige Größen bedeuten, welche aus den beſtändigen Größen der erſten Gleichung, und aus p und q, die hier ebenfalls beſtändige Größen ſind, beſtehen. Es wird alſo durch dieſe neue Gleichung die Natur jener Curve ebenfalls ausgedruckt, wenn man Mq als die Axe, und den Punkt M als den Anfangspunkt der Abſciſſen betrachtet.

§. 288.

Hier fällt nun zuvörderst in die Augen, daß, wenn man $Mq = t = 0$ setzt, auch $qm = u = 0$ seyn werde, weil dann der Punkt m in M fällt. Da wir ferner nur einen unendlich kleinen Theil der Curve um M untersuchen wollen, so ist es zu dieser Absicht hinlänglich, wenn wir für t ebenfalls nur unendlich kleine Werthe setzen, und in diesem Falle hat auch $qm = u$ nur dergleichen kleine Werthe, indem wir den Bogen Mm gleichsam als einen verschwindenden Bogen betrachten. Wenn man aber für t und u unendlich kleine Werthe setzt, so werden tt, tu und uu noch viel unbedeutender, und noch mehr schwinden t^3, t^2u, tuu, u^3, u. s. f. und es bleibt daher, da alle Glieder, worin diese Größen vorkommen, bey den übrigen, die gegen sie gleichsam unendlich groß sind, nicht in Betrachtung gezogen zu werden brauchen, bloß die Gleichung

$$0 = At + Bu$$

übrig, welches eine Gleichung für die gerade Linie $M\mu$ ist, die durch den Punkt M geht und anzeigt, daß diese gerade Linie mit der Curve zusammenfalle, wenn sich der Punkt m dem Punkte M so sehr als möglich nähert.

§. 289.

Es ist also diese gerade Linie $M\mu$ die Tangente der Curve für den Ort M, und es kann daher hiernach die Tangente für einen jeden Punkt der Curve M gefunden werden. Da nemlich aus der Gleichung $At + Bu = 0$

$$\frac{u}{t} = \frac{-A}{B} = \frac{q\mu}{Mq}$$

wird, so hat man

$$q\mu : Mq = MP : PT = -A : B$$

und da $PM = q$ ist, so wird

PT

$$PT = \frac{-Bq}{A}$$

Nun pflegt man den Theil der Axe PT die Subtangente zu nennen, und es fließt also aus dem Bisherigen folgende

Regel

für die Erfindung der Subtangente:

Man setze in der für die Curve gegebenen Gleichung, nachdem man gefunden hat, daß die Applicate $y = q$ zu zu der Abscisse $x = p$ gehöre,

$$x = p + t, \text{ und } y = q + u$$

und behalte von den Gliedern, welche man durch diese Substitution erhält, bloß diejenigen, worin t und u nicht mehr als eine Dimension haben, alle übrige aber lasse man weg. Auf diese Art gelangt man zu einer Gleichung

$$At + Bu = 0$$

die aus nicht mehr als zwey Gliedern besteht, und woraus, wenn A und B bekannt sind, die Subtangente

$$PT = \frac{-Bq}{A}$$

wird.

Erstes Exempel.

Es sey eine Parabel gegeben, deren Natur durch die Gleichung

$$yy = 2ax$$

ausgedruckt wird, wenn AP die Hauptaxe und A der Scheitel ist.

Man setze $AP = p$, so wird, wenn man $PM = q$ seyn läßt,

$$qq = 2ap.$$

Ferner setze man $x = p + t$, und $y = q + u$, so wird

$$qq + 2qu + uu = 2ap + 2at$$

und behält man hiervon nach der gegebenen Regel bloß die Glieder

$$2qu = 2at$$

so wird

$$at - qu = o; \text{ und } \frac{u}{t} = \frac{a}{q} = \frac{-A}{B},$$

Es ist demnach die Subtangente

$$PT = \frac{qq}{a} = 2p$$

weil $qq = 2ap$ ist, und folglich die Subtangente doppelt so groß als die Absciſſe AP.

Zweytes Exempel.

Es sey eine aus dem Mittelpunkte A beschriebene Ellipse gegeben, und ihre Gleichung

$$yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx) \text{ oder } aayy + bbxx = aabb$$

Setzt man $AP = p$, und $PM = q$, so wird

$$aaqq + bbpp = aabb.$$

Nun sey $x = p + t$, und $y = q + u$ so wird, weil man bloß die Glieder zu nehmen hat, worin t und u nicht mehr als eine Dimension haben, und die übrigen sogleich weggelassen werden können,

$$2aaqu + 2bbpt = o$$

und folglich

$$\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}.$$

Es ist demnach die Subtangente

$$PT = \frac{-B}{A}q = \frac{-aaqq}{bbp} = \frac{-aa + pp}{p}$$

und da dieser Ausdruck negativ ist, so zeigt er an, daß der Punkt T auf die entgegenstehende Seite falle. Uebrigens stimmt derselbe mit der obigen Bestimmung der Tangenten der Ellipse [im sechsten Capitel] auf das genaueste überein.

Drittes

Drittes Exempel.

Es sey eine Linie der siebenten Art der dritten Ordnung, deren Gleichung

$$yyx = axx + bx + c$$

ist, gegeben.

Setzt man $AP = p$, und $PM = q$, so wird

$$pqq = app + bp + c.$$

Nun sey $x = p + t$, und $y = q + u$, so wird

$$(p+t)(qq + 2qu + uu) = a(pp + 2pt + tt) + b(p+t) + c$$

und wenn man alle überflüssige Glieder wegläßt,

$$2pqu + qqt = 2apt + bt.$$

Hieraus fließt

$$\frac{u}{t} = \frac{2ap + b - qq}{2pq} = \frac{-A}{B}$$

und es ist demnach die Subtangente

$$PT = \frac{-B}{A}q = \frac{2pqq}{2ap+b-qq} = \frac{2app + 2bp + 2c}{2ap + b - qq} = \frac{2ap^3 + 2bpp + 2cp}{app - c}$$

oder

$$PT = \frac{2ppqq}{app - c}.$$

§. 290.

Hat man auf diese Art die Tangente der Curve gefunden, so kennt man auch die Richtung, welche die Curve in dem Punkte M hat; denn es kann die Curve sehr füglich als ein Weg betrachtet werden, den ein bewegter Punkt beschreibt, dessen Richtung jeden Augenblick sich ändert. Es wird demnach der Punkt, welcher durch seine Bewegung die Curve Mm beschreibt, in M nach der Richtung der Tangente $M\mu$ bewegt, und würde, wenn er diese Richtung behielte, die gerade Linie $M\mu$ beschreiben; aber sobald er M verläßt, ändert er seine Richtung, wenn anders die Linie die er beschreibt, eine krumme Linie ist: und wenn man also den Gang der krummen Linie kennen lernen will, so muß man für alle einzelne Punkte derselben die Lage der Tangente bestimmen. Dies geschieht nun nach der erklärten Methode sehr leicht und ohne alle Schwierigkeiten, wenn die Gleichung für die Curve eine rationale Gleichung ist, die keine Brüche enthält; und auf diese Form kann man bekannter Maaßen jede Gleichung bringen. Wenn aber die Gleichung irrational ist, oder Brüche enthält, und man sich der Reduction derselben auf die Form der rationalen und ganzen Gleichungen nicht unterziehen will, so kann man zwar eben diese Methode anwenden, aber doch mit einer gewissen Veränderung, die eben der Grund der Erfindung der Differential-Rechnung gewesen ist. Aus dieser Ursach wollen wir auch die Methode, die Tangenten zu finden, wenn die für die Curve gegebene Gleichung keine rationale und ganze Gleichung ist, der Differential-Rechnung aufbewahren.

§. 291.

Hieraus läßt sich also die Neigung der Tangente $M\mu$ gegen die Axe AP oder gegen ihre Parallele Mq bestimmen. Denn da

$$q\mu : Mq = -A : B$$

ist, wenn die Coordinaten rechtwinklig, und also der Winkel $Mq\mu$ ein rechter Winkel ist, so ist

$$\frac{-A}{B} = \text{tang. } qM\mu;$$

wenn aber die Coordinaten schiefwinklig sind, so findet man den Winkel $qM\mu$ aus dem gegebenen Winkel $Mq\mu$ und

dem

dem Verhältnisse der Seiten Mq, $q\mu$ nach den Vorschriften der Trigonometrie. Es fällt aber in die Augen, daß der Winkel $qM\mu$, wenn in der Gleichung $At + Bu = 0$ der Coefficient $A = 0$ ist, verschwinde, und also die Tangente $M\mu$ der Axe AP parallel werde. Ist hingegen $B = 0$, so wird die Tangente $M\mu$ den Applicaten PM parallel, oder es berührt alsdann die Applicate PM selbst die Curve in dem Punkte M.

§. 292.

Ist die Tangente MT gefunden worden, so ist, wenn man auf dieselbe die Linie MN in dem Berührungspunkte senkrecht zieht, diese Normale MN auf der Curve selbst senkrecht, und ihre Lage in jedem Falle leicht zu finden. Am bequemsten aber läßt sich dieselbe angeben, wenn die Coordinaten rechtwinklig sind; denn alsdann sind die Dreyecke $Mq\mu$ und MPN einander ähnlich, und also

$$Mq : q\mu = MP : PN, \text{ oder } -B : A = q : PN$$

woher denn

$$PN = \frac{-Aq}{B}$$

wird. Da man nun diesen Theil der Axe PN, der zwischen der Applicate PM und der Normale MN liegt, die Subnormale nennt: so läßt sich die Subnormale bey rechtwinkligen Coordinaten aus der gefundenen Tangente PT sehr leicht bestimmen, indem

$$PT : PM = PM : PN; \text{ oder } PN = \frac{PM^2}{PT}$$

ist. Ueberdem ist aber, wenn $APM = R$, die Tangente

$$MT = \sqrt{(PT^2 + PM^2)}$$

und die Normale

$$MN = \sqrt{(PM^2 + PN^2)}$$

oder

oder, da PT : TM = PM : MN ist

$$MN = \frac{PM.TM}{PT} = \frac{PM}{PT}\sqrt{(PT^2 + PM^2)}$$

§. 293.

Da wir [§. 291] gesehen haben, daß die Tangente, wenn in der Gleichung $At + Bu = 0$, entweder $A = 0$, oder $B = 0$ ist, entweder der Axe oder den Applicaten parallel läuft: so ist noch der Fall zu betrachten, wenn beyde Coefficienten, oder sowohl A als $B = 0$ werden. Wenn sich also dieser Umstand ereignet, so verschwinden in der §. 286 gefundenen Gleichung die Glieder, worin t und u zwey Dimensionen haben, nicht mehr gegen $At + Bu$, weil jedes davon selbst $= 0$ wird, und dürfen daher auch nicht mehr weggelassen werden. Man hat folglich in diesem Falle die Gleichung

$$0 = Ctt + Dtu + Euu$$

zu betrachten, weil man die übrigen Glieder, die gegen die angeführten, wenn t und u unendlich klein angenommen werden, verschwinden, aus der Acht lassen kann; und aus dieser Gleichung erhellet, eben so wie aus der allgemeinen [§. 287. 288] daß für $t = 0$ auch $u = 0$, und also der Punkt M ein Punkt in der Curve seyn werde, so wie solches auch das Angenommene erfordert.

§. 294.

Da also die Gleichung

$$0 = Ctt + Dtu + Euu$$

die Beschaffenheit der Curve nahe bey dem Punkte M ausdruckt, so ist klar, daß dieselbe imaginär wird, wenn DD größer als 4CE ist, und t und u nicht $= 0$ sind. In diesem Falle gehört also zwar der Punkt M zu der Curve, ist aber von

dem

dem übrigen Theile derselben getrennt, und folglich ein zugehöriges Oval, welches in einen Punkt zusammenschwindet, so wie wir im vorhergehenden Capitel [§. 276, 277] gehabt haben. Hier läßt sich also gar keine Tangente denken, weil ein Punkt von der Tangente, die eine gerade Linie ist, die mit der Curve zwey einander nächste Punkte gemein hat, nicht berührt werden kann. Auf diese Art läßt sich daher der zugehörige Punkt einer Curve, wenn sie dergleichen hat, erkennen, und von den übrigen Punkten der Curve unterscheiden.

§. 295.

Wenn aber DD größer ist als 4CE, so läßt sich die Gleichung

$$o = Ctt + Dtu + Euu$$

in zwey Gleichungen von der Form $\alpha t + \beta u = o$ auflösen, davon jede die Natur der Curve ausdruckt. Da also jede dieser beyden Gleichungen die Lage der Tangente oder die Richtung der Curve in dem Punkte M bestimmt, so müssen sich zwey Schenkel der Curve in dem Punkte M schneiden, und daselbst einen doppelten Punkt erzeugen. Setzt man nemlich, Fig. 56, $Mq = t$, und läßt man dabey $q\mu$ und $q\nu$ die beyden Werthe von u seyn, so sind die beyden geraden Linien $M\mu$ und $M\nu$ Tangenten der Curve in dem Punkte M, und es giebt also in M ein Durchschnittspunkt zweyer Schenkel der Curve, davon der eine nach $M\mu$ und der andere nach $M\nu$ gerichtet ist. Da nun der zugehörige Punkt ebenfalls als ein doppelter Punkt angesehen werden muß, so zeigt die Gleichung $Ctt + Dtu + Euu = o$ allemal das Daseyn eines doppelten Punktes an, so wie die Gleichung $At + Bu = o$, wenn sie statt findet, allemal bloß einen einfachen Punkt der Curve zu erkennen giebt.

§. 296.

§. 296.

Wenn endlich $DD = 4CE$ ist, so fallen die beyden Tangenten $M\mu$ und $M\nu$ zusammen, und der Winkel $\mu M \nu$ verschwindet. Hieraus erhellet, nicht nur, daß zwey Schenkel der Curve in dem Punkte M zusammenkommen, sondern auch, daß sie eine und dieselbe Richtung haben, und sich also einander berühren; und es ist daher in diesem Falle der Punkt M ebenfalls ein doppelter Punkt, weil die gerade Linie, die durch diesen Punkt gezogen wird, als eine Linie angesehen werden muß, welche die Curve in zwey Punkten schneidet. Wenn also in der Gleichung, die wir §. 286 gefunden haben, die beyden Coefficienten A und B verschwinden, so ist dies ein Kennzeichen, daß die Curve in M einen doppelten Punkt hat. Ferner ist dieser doppelte Punkt von dreyfacher Art; entweder ein in einen Punkt zusammenschwindendes Oval oder zugehöriger Punkt; oder ein Durchschnittspunkt zweyer Schenkel der Curve, mit andern Worten, ein Knoten; oder ein Berührungspunkt zweyer Schenkel der krummen Linie: und diese drey Arten des doppelten Punkts fließen aus der dreyfachen Beschaffenheit, welche die Gleichung $o = Ctt + Dtu + Euu$ haben kann.

§. 297.

Wenn außer den Coefficienten A und B, auch folgende drey, C, D und E insgesammt verschwinden, so muß man die nächsten Glieder nehmen, worin t und u drey Dimensionen haben, und dann ist

$$Ft^3 + Gttu + Htuu + Iu^3 = o$$

Hat diese Gleichung nicht mehr als einen reellen Faktor, so zeigt derselbe an, daß nur ein Schenkel der Curve durch den Punkt M gehe, und giebt zugleich die Richtung desselben oder die Tangente zu erkennen; die beyden imaginä-

ren

ren Faktoren aber sind ein Kennzeichen eines in dem Punkte M verschwindenden Ovals. Sind alle drey Tangente jener Gleichung reell, so sieht man daraus, daß sich in dem Punkte M drey Schenkel entweder schneiden oder berühren, je nachdem die Wurzeln ungleich oder gleich sind. Es mag aber ein Fall statt finden, was für einer wolle, so hat die Curve in dem Punkte M allemal einen dreyfachen Punkt, und die gerade Linie, die durch M gezogen wird, muß als eine gerade Linie betrachtet werden, welche die Curve in drey Punkten schneidet.

§. 298.

Wenn außer allen vorhergehenden Coefficienten auch folgende viere, F, G, H und I verschwinden: so muß man um die Natur der Curve kennen zu lernen, die weiter folgenden Glieder betrachten, worin t und u vier Dimensionen haben, und welche den Punkt M als einen einfachen Punkt darstellen werden. Denn alsdann fallen entweder darin zwey zugehörige Ovale zusammen, wenn nemlich alle vier Wurzeln dieser Gleichung des vierten Grades imaginär sind; oder es ist M entweder der Durchschnitts- oder der Berührungspunkt zweyer Schenkel der Curve, und zugleich ein zugehöriger Punkt, wenn zwey Wurzeln reell und die beyden übrigen imaginär sind; oder ein Durchschnittspunkt von vier Schenkeln der Curve, wenn alle vier Wurzeln reell sind. Der Durchschnittspunkt zweyer oder dreyer, oder aller vier Schenkel aber wird ein Berührungspunkt, wenn zwey oder drey oder alle vier Wurzeln einander gleich werden. Arf eine ähnliche Art fährt man fort zu schließen, wenn auch die Glieder, worin t und u vier Dimensionen haben, verschwinden, und man also diejenigen nehmen muß, worin t und u fünf oder noch mehr Dimensionen haben.

§. 299.

Nach diesen Betrachtungen ist es leicht, eine allgemeine Gleichung für alle Curven zu finden, welche nicht nur durch den Punkt M gehen, sondern auch daselbst einen einfachen, oder doppelten, oder dreyfachen, oder überhaupt so vielfachen Punkt haben, als man will. Denn setzt man AP = p, und PM = q, und läßt man P, Q, R, S ꝛc. Funktionen zwischen den Coordinaten x und y bedeuten; so ist offenbar, daß die Gleichung

$$P(x-p) + Q(y-q) = 0$$

die Curve ausdrucke, die durch den Punkt M geht. Denn setzt man $x = AP = p$, so wird $y = PM = q$, wofern nur weder P durch $y-q$, noch Q durch $x-p$ theilbar ist, oder die Faktoren $x-p$ und $y-q$, von welchen der Durchgang der Curve durch M abhängt, nicht durch die Division aus der Gleichung weggeschafft werden können. Auch ist bekannt, daß die Gleichung $P(x-p) + Q(y-q) = 0$ alle Curven enthalte, die durch den Punkt M gehen, und es wird dieser Punkt ein einfacher Punkt seyn, wenn die Gleichung keine von den Formen hat, welche wir so gleich beschreiben werden, und welche ihr zukommen, wenn M ein vielfacher Punkt ist.

§. 300.

Soll M ein doppelter Punkt seyn, so muß die Gleichung für die Curve unter diese allgemeine Form gehören:

$$P(x-p)^2 + Q(x-p)(y-q) + R(y-q)^2 = 0$$

und diese Form nicht durch die Division zerstört werden können. Hieraus erhellet, daß die Linien der zweyten Ordnung keinen doppelten Punkt haben können, weil die angeführte Gleichung nur dann zum zweyten Grade gehören kann,

kann, wenn P, Q und R beständige Größen sind; aber alsdann hört dieselbe auf, eine Gleichung für eine Curve zu seyn, und wird eine Gleichung für zwey gerade Linien. Sind hingegen P, Q und R Funktionen vom ersten Grade, z. B. $\alpha x + \beta y + \gamma$; so druckt die Gleichung Linien der dritten Ordnung aus, die in M einen doppelten Punkt haben. Mehr als einen doppelten Punkt aber können die Linien der dritten Ordnung, oder sie müssen complexe aus drey geraden bestehende Linien seyn, nicht bekommen. Denn gesetzt, daß es zwey doppelte Punkte gebe, und daß dadurch eine gerade Linie gezogen worden sey, so müßte diese gerade Linie die Curve in vier Punkten schneiden, und dies ist der Natur der Linien der dritten Ordnung zuwider. Auf ähnliche Art können die Linien der vierten Ordnung nicht mehr als zwey doppelte Punkte, die Linien der fünften Ordnung nicht mehr als drey doppelte Punkte haben u. s. f.

§. 301.

Ist M ein dreyfacher Punkt der Curve, so wird die Natur der krummen Linie durch diese Gleichung ausgedruckt:

$$P(x-p)^3 + Q(x-p)^2(y-q) + R(x-p)(y-q)^2 + S(y-q)^3 = 0.$$

Soll nun aber diese Gleichung eine Gleichung für eine Curve seyn, so muß sie zu einer höhern als zu der dritten Ordnung gehören, weil sie, wenn P, Q, R und S beständige Größen wären, welches die Natur der Linien der dritten Ordnung nothwendig macht, drey Faktoren von der Form $\alpha(x-p) + \beta(y-q)$ haben, und folglich eine Gleichung für drey gerade Linien seyn würde. Es können also die Curven, die zu einer niedrigern als zu der vierten Ordnung gehören, keinen dreyfachen Punkt haben, und den Linien der fünften Ordnung kann nicht mehr als ein einziger dreyfacher Punkt zukommen, weil es sonst eine gerade Linie geben müßte, welche die Linien der fünften Ordnung in sechs Punkten schnitte. Dagegen ist kein Grund vorhanden, warum die Linien der sechsten Ordnung nicht zwey dreyfache Punkte bekommen könnten.

§. 302.

Wenn die Gleichung folgende Form hat:

$$P(x-p)^4 + Q(x-p)^3(y-q) + R(x-p)^2(y-q)^2 + S(x-p)(y-q)^3 + T(y-q)^4 = 0$$

so hat die Curve in M einen vierfachen Punkt. Die einfachste Curve, die einen vierfachen Punkt hat, ist also die Linie der fünften Ordnung. Zwey vierfache Punkte hingegen kommen nur den Linien der achten und den folgenden höhern Ordnungen zu. Auf eine ähnliche Art lassen sich allgemeine Gleichungen für die Linien geben, die in M einen fünffachen oder überhaupt jeden vielfachen Punkt haben sollen.

§. 303.

Wenn aber M ein doppelter, oder dreyfacher, oder überhaupt ein vielfacher Punkt ist, so schneiden oder berühren sich eben so viel Schenkel der Curve in dem Punkte M, oder es fallen, wenn die Anzahl der sich schneidenden Schenkel kleiner ist, ein oder mehrere zugehörige Punkte in M zusammen; und was davon statt finde, läßt sich aus dem vorher Angeführten erkennen. Man darf nemlich nur in den Funktionen P, Q, R, S, rc. allenthalben p und q für x und y, und t und u für x — p und y — q setzen, so erhält man solche Gleichungen, woraus sich die Beschaffenheit der Curve und die Tangenten der Schenkel, die sich in M schneiden, bestimmen lassen.

Vier-