Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Zwölftes Capitel. Von der Erforschung der Gestalt der krummen Linien.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Zwölftes Capitel.

Von der Erforschung der Gestalt der krummen Linien.

§. 272.

Die Untersuchungen der vorhergehenden Capitel hatten die Gestalt der krummen Linien, welche sie, ins Unendliche fortgeführt, haben, zum Gegenstande; wie aber diese Gestalt in dem endlichen Raume sey, ist öfters sehr schwer aus der Gleichung zu erkennen. Denn man muß zu dieser Absicht aus der Gleichung die Werthe, welche die Applicate für einen jeden endlichen Werth der Abscisse bekommt, entwickeln, und die imaginären von den reellen absondern: ein Geschäft, welches bey den Gleichungen der höhern Grade gemeiniglich die Kräfte der Analyse, so weit sie bekannt ist, übersteigt. Giebt man nemlich der Abscisse irgend einen endlichen Werth, so kann man die Applicate als die unbekannte Größe in der Gleichung betrachten, und es hängt demnach die Auflösung der Gleichung von der Anzahl der Dimensionen ab, welche die Applicate darin hat. Es läßt sich aber dieses Geschäft sehr erleichtern, wenn man die Gleichung durch Annahme einer bequemern Axe und eines zweckmäßigen Coordinaten-Winkels auf eine einfachere Form bringt; so wie dazu auch, da es gleich ist, welche Coordinate man als die Abscisse betrachten will, die Verwechselung der Coordinaten beyträgt, wenn man diejenige die Applicate seyn läßt, welche in der Gleichung die wenigsten Dimensionen hat.

§. 273.

§. 273.

Wollte man z. B. die Gestalt der Linien der dritten Ordnung, die zu der ersten Art gehören, bestimmen, so müßte man die einfachste Gleichung für diese Art, die §. 258 mitgetheilt worden ist, zum Grunde legen, und von den Coordinaten t und u die erste t als die Applicate, und die andere u als die Abscisse betrachten, weil t nur zwey Dimensionen hat. Man hätte also eine Gleichung von dieser Form:

$$yy = \frac{2by + axx + cx + d - nnx^3}{x}$$

und daraus erhielte man durch die Auflösung:

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)}}{x}$$

§. 274.

Es hat folglich in den Fällen, in welchen die Werthe von x der Funktion

$$bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$$

einen positiven Werth ertheilen, die Applicate einen doppelten Werth; wenn aber diese Funktion verschwindet, so kommt der Applicate y nicht mehr als ein Werth zu, oder es werden beyde Applicaten einander gleich; und wenn der Werth der Funktion negativ wird, so sind die Applicaten imaginär, oder es gehört dann gar keine Applicate zu den Abscissen. Es können aber die Werthe der gedachten Funktion, wenn sie positiv gewesen sind, nicht anders negativ werden, als wenn sie vorher gleich gewesen, oder die Funktion $= 0$ geworden ist; und es sind daher vorzüglich die Fälle zu erwägen, in welchen

$$bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4 = 0$$

wird. Dies muß nun zum wenigsten in zwey Fällen geschehen, weil ihr Werth, so oft x, es mag positiv oder ne-

negativ seyn, eine gewisse Grenze überschreitet, negativ wird: und es braucht daher die Abscisse auch nur bis zu einer gewissen Grenze genommen zu werden, weil die Applicaten jenseits dieser Grenze imaginär sind.

§. 275.

Angenommen, daß der Ausdruck

$$bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$$

nur zwey reelle Faktoren habe, oder nur in zwey Fällen $= 0$ werden könne; welches statt findet, wenn die Absciſſe in den Punkten P und S, Fig. 49, sich endet, wo es nur eine einzige Applicate giebt: so werden die Applicaten durch den ganzen Raum PS hindurch reell und doppelt, jenseits P und S aber insgesammt imaginär seyn, und also die Curve zwischen den Applicaten Kk und Nn liegen. Die Applicate in dem Anfangspunkte A aber wird eine Asymptote der Curve werden, und überdem dieselbe auch in irgend einem Punkte schneiden. Denn setzt man $x = 0$, so wird

$$\sqrt{(bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4)} = b + \frac{dx}{2b}$$

und also

$$y = \frac{b \pm (b + \frac{dx}{2b})}{x}$$

d. h. es ist entweder $y = \infty$, oder $y = \frac{-d}{2b}$. Es hat also in diesem Falle die Curve eine solche Gestalt, als die 50ste Figur darstellt.

§. 276.

Nun habe der Ausdruck

$$bb + dx + cxx + ax^3 - nnx^4$$

vier einfache reelle und einander ungleiche Faktoren, und werde also in vier Fällen = o. Alsdann müssen die Applicaten an eben so viel Orten P, Q, R, und S die Curve in einem einzigen Punkte berühren. Da nun die Applicaten durch den Raum der Axe XP imaginär gewesen seyn würden, so sind sie durch den Raum PQ hindurch reell; hierauf werden sie durch den Raum QR hindurch imaginär, und in RS sind sie abermals reell, aber jenseits S nach Y zu wieder imaginär. Es bestehet demnach die Curve aus zwey von einander abgesonderten Theilen, davon der eine innerhalb der geraden Linien Kk und Ll, Fig. 51, und der andere zwischen den geraden Linien Mm und Nn liegt. Und da die Applicaten in dem Anfangspunkte der Abscissen reell sind, so muß dieser Punkt in einem von den beyden Theilen der Axe PQ oder RS liegen. Es hat demnach diese Curve eine Gestalt, wie die 51ste Figur zeigt, und besteht aus einem Ovale, welches von der andern Curve, deren Asymptote DE ist, entfernt liegt, und das zugehörige Oval genannt wird.

§. 277.

Wenn zwey Wurzeln einander gleich sind, so fallen entweder die Punkte P und Q, oder Q und R, oder R und S zusammen. Aber wenn das erste statt finden sollte, so müßte, da A zwischen P und Q liegt, jede dieser Wurzeln x seyn, und dieses ist, da b nicht fehlen darf, unmöglich. Wenn hingegen die Punkte R und S zusammenfallen, so wird das zugehörige Oval unendlich klein, und geht in einen zugehörigen Punkt über. Fallen ferner Q und R zusammen, so ist das Oval mit den übrigen so verbunden, daß eine knotige Curve, Fig. 52, entsteht. Wenn endlich drey Wurzeln gleich sind, oder die Punkte Q, R und S zusamsammenfallen, so geht der Knoten in eine scharfe Spitze über, wie solches die 53ste Figur darstellt. Auf diese Weise finden bey der ersten Art fünf verschiedene Fälle statt, und daraus hat Newton eben so viel verschiedene Arten gemacht.

§. 278.

Auf eine ähnliche Art sind die Unterabtheilungen der übrigen Arten von Newton gefunden worden, indem alle Gleichungen so beschaffen sind, daß die eine von den Coordinaten nicht mehr als zwey Dimensionen hat. Wenn aber die eine Coordinate nur eine einzige Dimension hat, so ist die Gestalt der Curve sehr leicht zu finden. Es hat nemlich die Gleichung alsdann diese Form

$$y = P$$

so daß P irgend eine rationale Funktion von x ist, und es mag daher der Abscisse x ein Werth beygelegt werden, was für einer es sey, so erhält y auch stets einen einzigen Werth, und es begleitet also die Curve ununterbrochen die Axe auf beyden Seiten. Wenn P eine gebrochene Funktion ist, so kann es sich ereignen, daß die Applicate an einem oder an mehrern Orten unendlich, und also eine Asymptote der Curve wird; und zwar geschieht dieses alsdann, wenn der Nenner der Funktion verschwinder.

§. 279.

Setzt man also $y = \frac{P}{Q}$, so zeigen alle reelle Wurzeln der Gleichung $Q = 0$ jene unendliche Applicaten an, denn es giebt eine jede Wurzel dieser Gleichung, z. B. $x = f$ zu erkennen, daß die Applicate, wenn man die Abscisse $x = f$ nimmt, unendlich seyn werde, weil dabey $Q = 0$ ist. Ferner erhellet, daß die

Appli-

Applicaten, wenn sie positiv gewesen sind, da x größer war als f, negativ seyn werden, wenn x kleiner als f wird; und es ist demnach die Applicate eine Asymptote von der Form $u = \frac{A}{t}$, und dies ist überhaupt von allen ungleichen Faktoren zu merken. Wenn aber Q zwey gleiche Faktoren $(x - f)^2$ hat, so bleiben die Applicaten, wenn sie positiv sind, wenn x größer als f ist, ebenfalls positiv, wenn x kleiner wird als f, und wenn $x = f$ wird, so wird die Applicate eine Asymptote von der Art $uu = \frac{A}{t}$. Hat endlich der Nenner Q drey gleiche Faktoren, $(x - f)^3$, so haben die Applicaten wieder, wie im ersten Falle, vor und nach der unendlich großen entgegenstehenden Zeichen.

§. 280.

Nach diesen Gleichungen lassen sich diejenigen sehr leicht behandeln, die unter der Form

$$yy = \frac{2Py - R}{Q}$$

begriffen sind, wo P, Q und R ganze Funktionen von x von irgend einer Art anzeigen. Aus diesen Gleichungen bekommt die Applicate für jede Abscisse x entweder einen doppelten oder gar keinen Werth; jenes findet statt, wenn PP größer als QR, und dieses, wenn PP kleiner als QR ist: und es ist daher in jeder Grenze, welche die reellen Applicaten von den imaginären trennt, $PP = QR$, und folglich $y = \frac{P}{Q}$, oder, es berührt diese Applicate die Curve in einem einzigen Punkte. Man betrachte also, um die Gestalt der Curve kennen zu lernen, die Gleichung

$$PP - QR = 0,$$

deren

deren reelle Wurzeln die Oerter geben werden, wo die Applicaten die Curve in einem einzigen Punkte berühren. Man bemerke diese Punkte in der Axe, so werden, wenn alle Wurzeln einander ungleich sind, die Theile der Axe zwischen ihnen wechselsweise zwey reelle und imaginäre Applicaten haben, und folglich die Curve aus so viel von einander abgesonderten Theilen bestehen, als es dergleichen Abwechselungen giebt, welches denn eine Quelle von zugehörigen Ovalen ist.

§. 281.

Wenn die Gleichung $PP - QR = 0$ zwey gleiche Wurzeln hat, so fallen von jenen in der Axe bemerkten Punkten zwey zusammen, und es verschwindet dadurch ein Theil der Axe, entweder ein solcher, der imaginäre, oder ein solcher, der reelle Applicaten hat. Im ersten Falle entsteht eine knotige Linie, wie Fig. 52, im andern schwindet ein zugehöriges Oval in einen Punkt zusammen. Hat die Gleichung $PP - QR = 0$ drey gleiche Wurzeln, so wird der Knoten unendlich klein, und geht in eine Spitze über, wie Fig. 53; und hat sie vier gleiche Wurzeln, so schwinden entweder zwey zugehörige Ovale in einen Punkt zusammen, oder es giebt in der Spitze einen Knoten, oder zwey an dem Scheitel entgegengesetzte Spitzen. Sind fünf Wurzeln einander gleich, so ergeben sich daher eigentlich keine neue Arten; denn es entsteht eine Spitze, in welcher nicht, wie vorhin, ein, sondern zwey Ovale in einen Punkt zusammenschwinden: und auf ähnliche Art bringt auch die Gleichheit einer noch größern Anzahl der Wurzeln keine neue Verschiedenheiten in der Gestalt der Curven hervor.

§. 282.

Der Knoten, oder der Durchschnittspunt zweyer Schenkel einer Curve wird auch doppelter Punkt genannt, weil