Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Eilftes Capitel. Von den Linien der vierten Ordnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Eilftes Capitel.

Von den Linien der vierten Ordnung.

§. 260.

Die allgemeine Gleichung für die Linien der vierten Ordnung ist:

$$\alpha y^4 + \beta y^3 x + \gamma y^2 x^2 + \delta y x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta y^3 + \eta y^2 x + \vartheta y x^2 + \iota x^3 + \varkappa yy + \lambda yx + \mu xx + \nu y + \xi x + o = 0,$$

die aber, wenn man sowohl den Coordinaten-Winkel, als die Lage der Axe, und den Anfangspunkt der Abscissen verändert, auf vielerley Art, je nachdem der Fall ist, auf einfachere Formen gebracht werden kann. Um aber, nach der erklärten Methode, alle unter dieser Ordnung begriffene Arten, oder vielmehr Geschlechter, [§. 238] zu finden, muß man das höchste Glied dieser Gleichung betrachten, und dann entstehen folgende Fälle:

I.

Wenn alle vier einfache Faktoren dieses höchsten Gliedes imaginär sind.

II.

Wenn nur zwey Faktoren reell und einander nicht gleich sind.

III.

Wenn nur zwey Faktoren reell und einander gleich sind.

IV.

Wenn alle vier Faktoren reell, und keiner einem von den übrigen gleich ist.

V.

V.

Wenn zwey Faktoren einander gleich, die übrigen aber ungleich sind.

VI.

Wenn je zwey und zwey Faktoren einander gleich sind.

VII.

Wenn drey einfache Faktoren einander gleich sind.

VIII.

Wenn alle vier Faktoren einander gleich sind.

Erster Fall.

§. 261.

Wenn alle Faktoren des höchsten Gliedes imaginär sind, so hat die Curve gar keine ohne Ende fortlaufende Schenkel; und da wir hier die Verschiedenheit dieser Schenkel als Eintheilungsgrund gebrauchen, so bietet dieser Fall nicht mehr als ein einziges Geschlecht dar. Es begreift also

Das erste Geschlecht

die Curven, die gar keine ohne Ende fortlaufende Schenkel haben, und deren Natur, wenn man die einfachste Gleichung nehmen will, durch folgende Gleichung ausgedruckt wird:

$$(yy + mmxx)(yy - 2pxy + qqxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

wenn pp kleiner als qq ist. Denn da sich in dem höchsten Gliede die Größen y^4 und x^4 nothwendiger Weise befinden, so kann man, durch Vermehrung oder Verminderung der Coordinaten x und y um eine gegebene Größe, machen, daß y^3 und x^3 aus dem zweyten Gliede wegfallen.

Zweyter Fall.

§. 262.

Wenn nur zwey Faktoren des höchsten Gliedes reell, und dabey einander nicht gleich sind, so kann man durch

Ver-

Veränderung des Coordinaten-Winkels und der Axe es dahin bringen, daß der eine von diesen Faktoren x und der andere y wird. Hierdurch bekommt man folgende Gleichung:

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

wo mm kleiner als nn ist.

Denn da in dem höchsten Gliede y^3x und yx^3 nothwendiger Weise da sind, so kann man in dem zweyten Gliede y^3 und x^3 weglassen. Es hat demnach die Curve zwey geradlinige Asymptoten, davon die eine durch die Gleichung $y = 0$, und die andere durch $x = 0$ ausgedruckt wird. Die Art der ersten zeigt die Gleichung:

$$nnyx^3 + exx + gx + h = 0$$

und die Art der andern diese:

$$xy^3 + cyy + fy + h = 0$$

an. Hieraus entspringen also folgende Geschlechter:

Das zweyte Geschlecht

hat zwey geradlinige Asymptoten, beyde von der Art $u = \frac{A}{t}$, wenn weder c noch e eine verschwindende Größe ist.

Das dritte Geschlecht

hat zwey geradlinige Asymptoten, die eine von der Art $u = \frac{A}{t}$, die andere von der Art $u = \frac{A}{tt}$; und wird durch die Gleichung:

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + fy + gx + h = 0$$

ausgedruckt, wenn weder $c = 0$, noch $g = 0$ ist.

Das vierte Geschlecht

hat zwey geradlinige Asymptoten, die eine von der Art $u = \frac{A}{t}$, die andere von der Art $u = \frac{A}{t^3}$, und wird durch

die

die Gleichung:

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + cyy + dyx + fy + h = o$$

ausgedruckt, wenn c nicht $= o$ ist.

Das fünfte Geschlecht

hat zwey geradlinige Asymptoten, beyde von der Art $u = \frac{A}{tt}$, und wird durch die Gleichung:

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + dyx + fy + gx + h = o$$

ausgedruckt, wenn weder $f = o$, noch $g = o$ ist.

Das sechste Geschlecht

hat zwey geradlinige Asymptoten, die eine von der Art $u = \frac{A}{tt}$, die andere von der Art $u = \frac{A}{t^3}$, und wird durch die Gleichung:

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + dyx + fy + h = o$$

ausgedruckt, wenn f nicht $= o$ ist.

Das siebente Geschlecht.

Hat zwey geradlinige Asymptoten, beyde von der Art $u = \frac{A}{t^3}$, und wird durch die Gleichung ausgedruckt:

$$yx(yy - 2myx + nnxx) + ay^2x + byxx + dyx + h = o$$

wenn nn allenthalben größer als mm ist.

Dritter Fall.

Wenn die erwähnten beyden Faktoren des höchsten Gliedes die einzigen reellen, und einander gleich sind: so bekommt die Gleichung folgende Form:

$$yy(yy - 2myx + nnxx) + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = o$$

so daß wieder nn größer als mm ist.

Wo-

Wofern nun b nicht = o ist, so giebt diese Gleichung

Das achte Geschlecht,

welches eine parabolische Asymptote von der Art $uu = At$ hat.

Wenn aber $b = o$ ist, so wird, wenn man $x = \infty$ setzt,

$$yy + \frac{ay}{nn} + \frac{e}{nn} + \frac{g}{nnx} + \frac{h}{nnxx} = o$$

Ist nun aa kleiner als $4nne$, so entsteht

Das neunte Geschlecht,

welches keinen ohne Ende fortlaufenden Schenkel hat.

Wenn $b = o$, und aa größer als $4nne$, aber g nicht $= o$ ist, so entsteht

Das zehnte Geschlecht,

welches zwey einander parallele Asymptoten von der Art $u = \frac{A}{t}$ hat.

Wenn $b = o$, und $g = o$, und aa größer als $4nne$ ist, so ergiebt sich

Das eilfte Geschlecht,

welches zwey einander parallele Asymptoten von der Art $u = \frac{A}{tt}$ hat.

Wenn $b = o$, und $aa = 4nne$, aber g nicht $= o$ ist, so entsteht

Das zwölfte Geschlecht,

welches eine hyperbolische Asymptote von der Art $uu = \frac{A}{t}$ hat.

Wenn $b = o$; $g = o$; und $aa = 4nne$, und h eine negative Größe ist, so entsteht

Das dreyzehnte Geschlecht,

welches eine hyperbolische Asymptote von der Art $uu = \frac{A}{tt}$ hat.

Wenn hingegen $b = 0$; $g = 0$; $aa = 4nne$, und h eine positive Größe ist, so ergiebt sich

Das vierzehnte Geschlecht,

welches gar keine ohne Ende fortlaufende Schenkel hat.

Vierter Fall.

§. 264.

Sind alle vier einfache Faktoren des höchsten Gliedes reell und unter einander ungleich: so hat die Gleichung folgende Form:

$$yx(y-mx)(y-nx) + ay^2x + byx^2 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

Es hat also die Curve vier geradlinige Asymptoten entweder von der Art $u = \frac{A}{t}$, oder von der Art $u = \frac{A}{tt}$, oder von der Art $u = \frac{A}{t^3}$; und daher ergeben sich, wenn man die §. 251 gegebene Vorschrift befolgt, folgende Geschlechter:

Das funfzehnte Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, jede von der Art $u = \frac{A}{t}$, hat.

Das sechszehnte Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, drey von der Art $u = \frac{A}{t}$, und eine von der Art $u = \frac{A}{tt}$ hat.

Das siebenzehnte Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, drey von der Art $u = \frac{A}{t}$, und eine von der Art $u = \frac{A}{t^3}$ hat.

Das achtzehnte Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, zwey von der Art $u = \frac{A}{t}$, und zwey von der Art $u = \frac{A}{tt}$ hat.

Das neunzehnte Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, zwey von der Art $u = \frac{A}{t}$, eine von der Art $u = \frac{A}{tt}$, und eine von der Art $u = \frac{A}{t^3}$ hat.

Das zwanzigste Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, zwey von der Art $u = \frac{A}{t}$, und zwey von der Art $u = \frac{A}{t^3}$ hat.

Das ein und zwanzigste Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, jede von der Art $u = \frac{A}{tt}$ hat.

Das zwey und zwanzigste Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, drey von der Art $u = \frac{A}{tt}$, und eine von der Art $u = \frac{A}{t^3}$ hat.

Das drey und zwanzigste Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, zwey von der Art $u = \frac{A}{tt}$, und zwey von der Art $u = \frac{A}{t^3}$ hat.

Das vier und zwanzigste Geschlecht,

welches vier hyperbolische Asymptoten, jede von der Art $u = \frac{A}{t^3}$ hat.

Fünfter Fall.

§. 265.

Wenn zwey Faktoren des höchsten Gliedes gleich, und die beyden übrigen ungleich sind, so hat die Gleichung folgende Form:

$$yyx(y + nx) + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

Hier ergeben sich zuvörderst in Ansehung der gleichen Faktoren alle die Geschlechter, welche wir beym dritten Falle gehabt haben; und dabey theilt sich ein jedes derselben in so viele, als die ungleichen Faktoren hervorbringen, oder, als der zweyte Fall enthält. Ueberhaupt also entspringen aus diesem Falle sechsmal sieben, d. h. zwey und vierzig Geschlechter. Unter diesen sind aber zwey unmöglich, nemlich, wenn die beyden parallelen Asymptoten von der Art $u = \frac{A}{tt}$ sind, von den übrigen aber die eine zu der Art $u = \frac{A}{t}$, und die andere entweder zu der Art $u = \frac{A}{tt}$, oder zu der Art $u = \frac{A}{t^3}$ gehört. Es bleiben also nicht mehr als vierzig Geschlechter übrig, die, mit den vorhergehenden zusammengenommen, vier und sechszig Geschlechter ausmachen, und welche alle einzeln anzuführen viel zu weitläuftig seyn würde. Auch kann ich, da ich noch nicht jedes davon habe untersuchen können, nicht mit Gewißheit behaupten, ob nicht noch mehrere unmögliche darunter befindlich sind. Wer indeß

deß diese Untersuchung nach den mitgetheilten Vorschriften unternehmen will, der wird im nöthigen Falle die Anzahl der Geschlechter leicht zusammenziehen und verbessern können.

Sechster Fall.

§. 266.

Dieser Fall, bey welchem je zwey und zwey Faktoren einander gleich sind, ist in folgender Gleichung enthalten:

$$yyxx + ay^3 + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

Jedes Paar gleiche Faktoren, für sich genommen, giebt sieben verschiedene Fälle, und beyde Paare, zusammengenommen, geben daher neun und vierzig Geschlechter. Da aber h nicht zugleich positiv und negativ seyn kann, so werden zwey davon unmöglich, und es bleiben daher überhaupt sieben und vierzig Geschlechter übrig; eine Anzahl, die ebenfalls größer ist, als daß hier alle einzeln sollten angeführt werden können. Bis jetzt haben wir also hundert und eilf Geschlechter gefunden.

Siebenter Fall.

§. 267.

Wenn drey Faktoren einander gleich sind, so hat die Gleichung folgende Form:

$$y^3x + ayxx + bx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0$$

Hier giebt der Faktor x

eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$, wenn c nicht = o ist;

eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{tt}$, wenn c = o, aber f nicht = o ist;

eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t^3}$, wenn $c = o$, und $f = o$ ist.

Hiernächst giebt der Faktor y^3 eine parabolische Asymptote von der Art $u^3 = Att$, wenn b nicht $= o$ ist; wenn aber $b = o$ ist, so wird, wenn man x unendlich nimmt,

$$y^3 + ayx + dy + ex + g + \frac{cyy + fy + h}{x} = o$$

Hier ist, wenn e nicht $= o$,

$$y^3 + ayx + ex = o$$

woraus denn, wenn auch a nicht $= o$ ist,

$$y^2 + ax = o, \text{ und } ay + e = o$$

fließt: und es hat also hier zugleich eine parabolische Asymptote von der Art $uu = At$, und eine hyperbolische statt, die durch folgende Gleichung ausgedruckt wird:

$$(ay + e)x - \frac{e^3}{a^3} - \frac{de}{a} - g + \frac{cee - afe + aah}{aax} = o$$

Wenn also nicht $e^3 + aade + a^3g = o$ ist, so gehört diese Asymptote zu der Art $u = \frac{A}{t}$, im entgegenstehenden Falle aber zu der Art $u = \frac{A}{tt}$. Wenn hingegen $a = o$, und e nicht $= o$ ist, so ist

$$y^3 + ex = o$$

und diese Gleichung giebt eine parabolische Asymptote von der Art $u^3 = At$. Ist aber $e = o$, und $a = o$, so wird

$$y^3 + dy + g = o,$$

und diese Gleichung giebt entweder eine einzige Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$, oder drey von eben der Art, oder eine von der Art $u = \frac{A}{t}$, und eine von der Art $uu = \frac{A}{t}$,

oder

oder eine von der Art $u^3 = \frac{A}{t}$. Ueberhaupt also giebt es hier acht verschiedene Fälle, die mit den dreyen, welche der Faktor x an die Hand giebt, multiplicirt, vier und zwanzig Geschlechter erzeugen. Die Anzahl aller bisher gefundenen Geschlechter beläuft sich daher auf hundert und fünf und dreyßig.

Achter Fall.

§. 268.

Wenn alle Faktoren einander gleich sind, so findet folgende Gleichung statt:

$$y^4 + ay^2x + byxx + kx^3 + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = 0.$$

Hier entsteht, wenn k nicht $= 0$ ist,

Das hundert und sechs und dreyßigste Geschlecht,

welches eine einzige parabolische Asymptote von der Art $u^4 = At^3$ hat.

Wenn $k = 0$, b aber nicht $= 0$ ist, so wird

$$y^4 + byxx + exx = 0$$

und daher

$$y^3 + bxx = 0, \text{ und } by + e = 0.$$

Hieraus fließt für die geradlinige Asymptote $by + e = 0$

$$(by + e)xx + \frac{e^4}{b^4} + \frac{ae^2x}{bb} + \frac{cee}{bb} - \frac{dex}{b} - \frac{ef}{b} + gx + h = 0$$

und es gehört daher die Asymptote, wenn nicht

$$aee - bde - bbg = 0$$

ist, zu der Art $u = \frac{A}{t}$, im entgegenstehenden Falle aber zu der Art $u = \frac{A}{tt}$. Es ergeben sich also hieraus

Das hundert und sieben und dreyßigste Geschlecht, welches eine parabolische Asymptote von der Art $u^3 = Att$, und eine hyperbolische von der Art $u = \frac{A}{t}$ hat; und

Das hundert und acht und dreyßigste Geschlecht, welches eine parabolische Asymptote von der Art $u^3 = Att$, und eine hyperbolische von der Art $u = \frac{A}{tt}$ hat.

§. 269.

Nun sey $k = o$, und $b = o$, so daß

$$y^4 + ay^2x + cyy + dyx + exx + fy + gx + h = o$$

werde. Ist hier e nicht $= o$, so wird

$$y^4 + ayyx + exx = o$$

und diese Gleichung ist unmöglich, wenn aa kleiner als $4e$ ist. Ist hingegen aa größer als $4e$, so erhält man zwey parabolische Asymptoten, die zu einerley Axe gehören, von der Art $uu = At$; und ist $aa = 4e$, so fallen diese beyde Parabeln in eine zusammen. Es ergeben sich also hieraus, das hundert neun und dreyßigste, vierzigste, und ein und vierzigste Geschlecht.

Ist aber $e = o$, so daß man diese Gleichung hat:

$$y^4 + ayyx + cyy + dyx + fy + gx + h = o$$

so wird, wenn a nicht $= o$ ist

$$y^4 + ayyx + cyy + dyx + gx = o$$

und

und also, wenn sowohl $yy + ax = o$, als $y =$ einer beständigen Größe ist

$$ayy + dy + g = o$$

woher denn y entweder zwey verschiedene, oder zwey gleiche, oder zwey imaginäre Werthe bekommt. Im ersten Falle hat die Curve außer einer parabolischen Asymptote zwey parallele Asymptoten von der Art $u = \frac{A}{t}$; im zweyten eine von der Art $uu = \frac{A}{t}$, und im dritten gar keine. Man bekömmt also hieraus wieder drey Geschlechter, das hundert zwey und vierzigste, drey und vierzigste, und vier und vierzigste.

§. 270.

Nun sey auch $a = o$, so daß die Gleichung

$$y^4 + cyy + dyx + fy + gx + h = o$$

werde. Ist hier nicht $d = o$, so hat die Curve eine parabolische Asymptote von der Art $u^3 = At$, und eine geradlinige, die durch die Gleichung $dy + g = o$ ausgedruckt wird, von der Art $u = \frac{A}{t}$. Endlich hat die Curve, wenn $d = o$ ist, eine parabolische Asymtote von der Art $u^4 = At$; und so haben wir in allem hundert und sechs und vierzig Geschlechter der Linien der vierten Ordnung, davon aber die meisten viele von einander sich sehr unterscheidende Arten unter sich begreifen.

§. 271.

Hieraus läßt sich hinlänglich abnehmen, wie sehr die Zahl der Geschlechter der Linien der fünften und der übrigen höhern Ordnungen wachse, so daß eine vollständige Anführung derselben, dergleichen bey den Linien der dritten Ordnung unternommen ist, allein ein weitläuftiges Werk erfordern würde. Was aber die vornehmsten Eigenschaften der Linien der vierten und der höhern Ordnungen betrifft, so lassen sich dieselben aus der allgemeinen Gleichung einer jeden Ordnung auf eine ähnliche Art finden, als solches oben bey den Linien der dritten Ordnung geschehen ist, und ich halte es daher nicht für nöthig, dabey zu verweilen.