UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Zehntes Capitel. Von den vornehmsten Eigenschaften der Linien der dritten Ordnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Visual Library

Zehntes Capitel.

Von den vornehmsten Eigenschaften der Linien der dritten Ordnung.

§. 239.

So wie wir oben [im fünften Capitel] die vornehmsten Eigenschaften der Linien der zweyten Ordnung aus der allgemeinen Gleichung für diese Linien abgeleitet haben: so lassen sich auch die merkwürdigsten Eigenschaften der Linien der dritten Ordnung aus ihrer allgemeinen Gleichung erkennen, und auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den Linien der vierten und der folgenden höhern Ordnungen. Wir wollen daher die allgemeinste Gleichung für die Linien der dritten Ordnung:

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx$$
$$+ \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$$

betrachten, welche die Natur einer jeden Linie der dritten Ordnung ausdruckt, wenn x und y die unter irgend einem Winkel gegen einander geneigten Coordinaten ausdruckt, und irgend eine gerade Linie zur Axe angenommen worden ist.

§. 240.

Ist daher α nicht $= 0$, so kommt jeder Absciffe x entweder eine oder drey reelle Applicaten zu. Angenommen, daß es drey reelle Applicaten gebe, so ist bekannt, daß man ihr Verhältniß zu einander aus der Gleichung bestimmen kann. Setzt man also $\alpha = 1$, so wird die Gleichung

y^3

$$y^3 + (\beta x + \varepsilon)yy + (\gamma xx + \zeta x + \vartheta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa = 0$$

und es ist

die Summe der drey Applicaten, die zu einer und derselben Abscisse x gehören, $= -\beta x - \varepsilon$;

die Summe der drey Rectangel, die zwischen je zwey und zwey von diesen Applicaten eingeschlossen sind, $= \gamma xx + \zeta x + \vartheta$; und endlich

das Produkt aus allen dreyen, oder das Parallelepipedum, welches dieselben geben, $= -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \varkappa$.

Wenn zwey Applicaten imaginär wären, so gälten diese Behauptungen zwar ebenfalls, nur mit dem Unterschiede, daß man dieselben nicht auf Linien anwenden könnte, indem weder die Summe noch das Rechteck zweyer imaginären Applicaten geometrisch dargestellt werden kann.

§. 241.

Es sey also AZ, Fig. 44, die Axe für irgend eine Linie der dritten Ordnung, auf welcher die Ordinaten LMN und lmn, welche die Curve in dreyen Punkten schneiden, unter einem gegebenen Winkel stehen. Setzt man die Abscisse $AP = x$, so hat die Applicate y einen dreyfachen Werth, PL, PM, und $-PN$, und es ist daher

$$PL + PM - PN = -\beta x - \varepsilon.$$

Wenn man daher

$$PO = z = \frac{PL + PM - PN}{3}$$

nimmt, so liegt der Punkt O in der Mitte, so daß $LO = MO + NO$ ist. Da nun $z = -\frac{\beta x - \varepsilon}{3}$ ist, so liegt der Punkt O in der geraden Linie OZ, und diese Linie schneidet

det daher alle der LMN parallele Ordinaten lmn auf die Art in o, daß lo + mo = no ist. Dies ist eine Eigenschaft, die der Eigenschaft der Durchmesser der Linien der zweyten Ordnung ähnlich ist. Wenn also zwey einander parallele Ordinaten, welche die Curve in drey Punkten schneiden, auf die Art in O und o getheilt werden, daß die beyden auf der einen Seite liegenden der dritten an der andern Seite gleich sind: so theilt die gerade Linie, welche durch diese Punkte O und o gezogen wird, auch alle übrige, jenen parallele, Ordinaten auf eine ähnliche Art, und ist also gleichsam ein Durchmesser der Linie der dritten Ordnung.

§. 242.

Da sich bey den Linien der zweyten Ordnung alle Durchmesser in einem und demselben Punkte schneiden, so wollen wir jetzt untersuchen, wie sich die Durchmesser der Linien der dritten Ordnung, in dem vorhin angeführten Verstande, verhalten. Wir wollen also annehmen, daß die Applicaten unter irgend einem andern Winkel gegen die Axe AP geneigt seyen, und die Abscisse = t, und die Applicate = u setzen. Alsdann ist [§. 43].

$$y = nu; \text{ und } x = t - mu;$$

und bringt man diese Werthe in die allgemeine Gleichung:

$$y^3 + \beta y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \epsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \vartheta y$$
$$+ \iota x + \kappa = 0$$

so bekommt man dafür folgende:

$$\left.\begin{array}{ll} + n^3u^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 & + \epsilon n^2u^2 + \zeta nut \\ & + \eta tt + \vartheta nu + \iota t + \kappa \\ - \beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt & - \zeta mnu^2 - 2\eta mut \\ & - \iota mu \\ + \gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t & + \eta m^2u^2 \\ - \delta m^3u^3 & \end{array}\right\} =$$

Es ist daher für die gerade Linie, die die Stelle des Durchmessers vertritt, wenn man die bey eben dem Winkel zur Abscisse t gehörige Applicate = v setzt

$$3v = \frac{-\beta n^2 t + 2\gamma mnt - 3\delta m^2 t - \varepsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2 n - \delta m^3}.$$

§. 243.

Nun sey, Fig. 45, O der Durchschnittspunkt zweyer solcher Durchmesser, und von demselben werde auf die Axe AZ einmal OP den vorigen Applicaten, und dann OQ den andern Applicaten parallel gezogen, so ist

$$AP = x;\ PO = z;\ AQ = t;\ \text{und } OQ = v;$$

ferner

$$z = nv;\ x = t - mv,\ \text{und folglich } v = \frac{z}{n};\ \text{und}$$

$$t = x + \frac{m}{n} z.$$

Man hat also

$$3z = -\beta x - \varepsilon;\ 3v = \frac{-\beta x}{n} - \frac{\varepsilon}{n};\ \text{und}$$

$$t = x - \frac{\beta mx}{3n} - \frac{\varepsilon m}{3n}$$

Bringt man diese Werthe in die vorhin gefundene Gleichung, so wird

$$\left.\begin{array}{l}
-\beta nnx + \beta\beta mnx - \beta\gamma mmx + \dfrac{\beta\delta m^3 x}{n} \\
-\varepsilon nn + \beta\varepsilon mn - \gamma\varepsilon mm + \dfrac{\delta\varepsilon m^3}{n} \\
+\beta nnx - \dfrac{\beta\beta mnx}{3} - \dfrac{\beta\varepsilon mn}{2} + \varepsilon nn \\
-2\gamma mnx + \dfrac{2\beta\gamma mmx}{3} + \dfrac{2\gamma\varepsilon mm}{3} - \zeta mm \\
+3\delta mmx - \dfrac{\beta\delta m^3 x}{n} - \dfrac{\delta\varepsilon m^3}{n} + \eta mm
\end{array}\right\} = 0$$

oder

oder

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}\beta\beta mnx - \frac{1}{3}\beta\gamma mmx - 2\gamma mnx + 3\delta mmx \\ + \frac{2}{3}\beta\varepsilon mn \quad - \frac{1}{3}\gamma\varepsilon mm \quad - \zeta mn \quad + \eta mm \end{array}\right\} = 0$$

§. 244.

Es hängt also allerdings der Durchschnittspunkt der Durchmesser O von der Neigung der Applicaten gegen die Axe, welche durch die Buchstaben m und n ausgedruckt wird, ab; und es haben daher, (wenn man den Durchschnittspunkt aller Durchmesser den Mittelpunkt nennen will,) nicht alle Linien der dritten Ordnung einen Mittelpunkt. Indeß lassen sich Fälle angeben, wo der Durchschnittspunkt der Durchmesser eine unveränderliche Lage hat. Man findet nemlich dergleichen, wenn man die Glieder, worin mn und mm vorkommt, und zwar jede Art besonders genommen, $= 0$ setzt, und die daraus entspringenden Werthe von x einander gleich macht. Es wird aber aus den gedachten beyden Gleichungen

$$x = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma} = \frac{3\eta - \gamma\varepsilon}{\beta\gamma - 9\delta};$$

und wenn diese beyde Werthe einander gleich seyn sollen, so muß

$$\begin{array}{l} 6\beta\beta\eta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon - 18\gamma\eta + 6\gamma\gamma\varepsilon = 3\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\gamma\varepsilon \\ \qquad\qquad - 27\delta\zeta + 18\beta\delta\varepsilon \end{array}$$

oder

$$\beta\gamma\zeta - 2\beta\beta\eta - 9\delta\zeta + 6\gamma\eta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon = 0$$

seyn, woher denn

$$\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}$$

wird. So oft η diesen Werth hat, so oft schneiden sich alle Durchmesser in einem und demselben Punkte, und es haben daher diese Linien der dritten Ordnung einen Mittelpunkt,

punkt, und man findet ihn, wenn man in der Axe

$$AP = \frac{3\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}, \text{ und}$$

$$PO = \frac{-3\beta\zeta + 6\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\gamma}$$

nimmt.

§. 245.

Eben diese Bestimmung des Mittelpunkts findet, vorausgesetzt, daß es dergleichen giebt, auch statt, wenn der erste Coefficient α nicht der Einheit gleich gesetzt wird. Denn ist die allgemeinste Gleichung für die Linien der dritten Ordnung:

$$\alpha y^3 + \beta y^2 x + \gamma y x^2 + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta xy + \eta xx + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$$

gegeben, so haben die dadurch ausgedruckten Curven einen Mittelpunkt, wenn

$$\eta = \frac{\beta\gamma\zeta - 9\alpha\delta\zeta + 6\beta\delta\varepsilon - 2\gamma\gamma\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$$

ist. Alsdann aber ist der Mittelpunkt in O, wenn man

$$AP = \frac{3\alpha\zeta - 2\beta\varepsilon}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}, \text{ und}$$

$$PO = \frac{6\gamma\varepsilon - 3\beta\zeta}{2\beta\beta - 6\alpha\gamma}$$

macht. Wenn daher eine einzige Ordinate, welche die Curve in drey Punkten schneidet, auf die Art getheilt wird, daß die beyden Applicaten auf der einen Seite der dritten auf der andern Seite gleich sind: so theilt die gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt und durch diesen Theilungspunkt gezogen wird, alle übrige dieser parallele Ordinaten auf eine ähnliche Art.

§. 246.

Wenn man dieses auf die Gleichungen der oben festge-setzten Arten [§ 237] anwendet, so erhellet, daß die erste zweyte, dritte, vierte und fünfte Art einen Mittelpunkt hat, wenn $a = 0$ ist, und daß in diesem Falle der Mittelpunkt in den Anfangspunkt der Absciſſen fällt. Die sechste und siebente Art haben nie einen Mittelpunct, weil der Coeffi-cient a nicht $= 0$ seyn darf. Die achte, neunte, zehnte, eilfte, zwölfte und dreyzehnte Art haben einen Mittelpunkt, der allemal in dem Anfangspunkte der Absciſſen liegt. In der vierzehnten, funfzehnten und sechszehnten Art ist der Mittelpunkt unendlich weit entfernt, und es sind daher alle Durchmesser derselben einander parallel.

§. 247.

Nach diesen die Summe der drey Werthe einer jeden Applicate betreffenden Anmerkungen wollen wir nun auch das Produkt aus diesen Werthen betrachten, denn die Untersuchung des Aggregats der Rechtecke führt eben auf keine merkwürdige Eigenschaften. Es ist also aus der all-gemeinen Gleichung § 239

$$-PM.PL.PN = -\delta x^3 - \eta xx - \iota x - \kappa$$

Um diesen Ausdruck zu entwickeln, überlege man, daß für $y = 0$,

$$\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0$$

wird, und daß daher die Wurzeln dieser Gleichung die Punkte angeben werden, wo die Curve die Axe AZ schnei-det. Fallen diese Punkte in B, C und D, so wird

$$\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = \delta(x - AB)(x - AC)(x - AD)$$

und es ist folglich

$$PL.PM.PN = \delta.PB.PC.PD.$$

Wenn

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man also irgend eine andere, der vorigen parallele, Ordinate lmn annimmt, so wird

$$PL.PM.PN : PB.PC.PD = pl.pm.pn : pB.pC.pD.$$

und diese Eigenschaft ist allerdings derjenigen ähnlich, die wir oben von dem Verhältnisse der Rechtecke bey den Linien der zweyten Ordnung [§ 92. 93] gefunden haben. Eine ähnliche Eigenschaft kommt aber auch den Linien der vierten, der fünften und der folgenden höhern Ordnungen zu.

§. 248.

Nun habe die Linie der dritten Ordnung die drey geradlinigen Asymptoten FBf, GDg, HCh, Fig. 46. Da die Linie der dritten Ordnung selbst in diese drey Asymptoten übergeht, wenn die für sie gegebene Gleichung in drey einfache Faktoren von der Form $py + qx + r$ aufgelöset werden kann: so läßt sich für die Asymptoten, als eine complexe Linie, eine Gleichung finden, deren höchstes Glied mit dem höchsten Gliede der Gleichung für die Curve übereinkommt. Da ferner die Lage der Asymptoten aus dem zweyten Gliede der Gleichung bestimmt wird, so hat die Gleichung für die Asymptoten mit der Gleichung für die Curve auch das zweyte Glied gemein. Wenn daher die Gleichung für die Curve bey der Axe AP, der Abscisse $AP = x$, und der Applicate $PM = y$ folgende ist:

$$y^3 + (\beta x + \epsilon)y^2 + (\gamma xx + \zeta x + \theta)y + \delta x^3 + \eta xx + \iota x + \kappa = 0$$

so hat man für die Asymptoten bey eben der Axe, AP, der Abscisse $AP = x$, und der Applicate $PG = z$, die Gleichung:

$$z^3 + (\beta x + \epsilon)z^2 + (\gamma xx + \zeta x + B)z + \delta x^3 + Cx + D = 0$$

worin die Coefficienten ζ, B, C und D so beschaffen sind, daß sich die Gleichung in drey einfache Faktoren auflösen läßt.

§. 249.

Wenn daher irgend eine Applicate PN, die sowohl die Curve als die Asymptoten in drey Punkten, jene nemlich in L, M und N, diese in F, G und H schneidet, gezogen wird: so ist aus der Gleichung für die Curve

$$PL + PM + PN = -\beta x - \varepsilon$$

Aber aus der Gleichung für die Asymptoten ist ebenfalls

$$PF + PG + PH = -\beta x - \varepsilon$$

und es wird folglich

$$PL + PM + PN = PF + PG + PH$$

oder

$$FL - GM + HN = 0;$$

und wenn man irgend eine andere Applicate pf zieht, so ist auf ähnliche Art

$$fn - gm + hl = 0$$

Wenn also eine gerade Linie sowohl die Curve als die Asymptoten in drey Punkten schneidet, so sind allemal zwey von den zwischen den Asymptoten und der Curve enthaltenen Theilen der Linie auf der einen Seite dem dritten auf der andern Seite gleich.

§. 250.

Es können also die drey Schenkel einer Linie der dritten Ordnung, die drey geradlinige Asymptoten hat, nicht alle auf denselben Seiten dieser Asymptoten liegen, sondern es muß sich der dritte, wenn zwey davon sich nach einer Seite zu erstrecken, nothwendig nach einer entgegenstehenden Seite verbreiten. Linien der dritten Ordnung, wie die 47ste Figur darstellt, sind daher unmöglich, weil die gerade Linie, welche die Asymptoten in den Punkten f, g, h, die Curve aber in den Punkten l, m, n schneidet, die Theile fn, gm, hl alle auf einerley Seiten der Asymptoten hat, und

und also die Summe dieser Theile nicht = o seyn kann. Denn die Theile, die auf einerley Seite liegen, bekommen einerley Zeichen, z. B. +, und die auf der entgegenstehenden Seite sich befinden, das entgegenstehende, —; und nur dann kann die Summe dieser drey Theile = o werden, wenn sie verschiedene Zeichen haben.

§. 251.

Hieraus läßt sich sehr deutlich einsehen, warum die Linien der dritten Ordnung keine zwey geradlinige Asymptoten von der Art $u = \frac{A}{tt}$ haben können, wenn die dritte zu der Art $u = \frac{A}{t}$ gehört, weil sich die hyperbolischen Schenkel, die zu $u = \frac{A}{tt}$ gehören, unendlich mehr ihrer Asymptote nähern, als derjenige, dessen Art durch $u = \frac{A}{t}$ ausgedruckt wird. Denn nimmt man an, daß sich die gerade Linie fl unendlich weit entferne, so werden fn, gm, hl unendlich kleine Größen. Wenn aber die beyden Schenkel nx, my zu der Art $u = \frac{A}{tt}$, der dritte lz hingegen zu der Art $u = \frac{A}{t}$ gehören sollen, so sind fn und gm unendlich kleiner als hl, und es ist folglich unmöglich, daß gm = fn + hl sey.

§. 252.

Es kann daher überhaupt bey den Linien der höhern Ordnungen, die eben so viel Asymptoten als Dimensionen haben, nie eine Asymptote zu der Art $u = \frac{A}{t}$ gehören, wenn die übrigen Asymptoten einer höhern Gattung, z. B. $u = \frac{A}{tt}$; $u = \frac{A}{t^3}$; rc. sind, sondern es muß, so oft eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$ da ist, auch noch eine andere von eben der Art da seyn. Aus eben dem Grunde ist es unmöglich, daß nicht mehr als eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{tt}$ da sey, sondern es muß zum wenigsten zwey geben. Denn es nähern sich die hyperbolischen Schenkel von der Art $u = \frac{A}{t^3}$; $u = \frac{A}{t^4}$; rc. ihren Asymptoten unendlich mehr, als die von der Art $u = \frac{A}{tt}$. Hiernach lassen sich bey der Erfindung der Arten, die zu irgend einer höhern Ordnung gehören, die unmöglichen Fälle sehr leicht absondern, und eine Menge sehr beschwerlicher Rechnungen vermeiden.

§. 253.

Angenommen aber, daß eine Linie der dritten Ordnung von einer geraden Linie nur in zwey Punkten geschnitten werde, so werden alle, dieser geraden Linie parallel gezogene, Linien die Curve entweder auch in zwey Punkten oder gar nicht schneiden. Wenn also die Applicaten y der gedachten geraden Linie parallel genommen werden, so ist die Gleichung für eine solche Curve folgende:

$$yy + \frac{(\gamma xx + \zeta x + \vartheta)y}{\beta x + \varepsilon} + \frac{\delta x^3 + \eta xx + \iota x + \varkappa}{\beta x + \varepsilon} = 0$$

Setzt man nemlich die Abscisse $AP = x$, so hat man zwey Applicaten PM und $-PN$, und dabey ist wegen der Natur der Gleichungen

$$PM - PN = \frac{-\gamma xx - \zeta x - \vartheta}{\beta x + \varepsilon}$$

Theilt man nun die Ordinate MN in dem Punkte O in zwey gleiche Theile, so wird

$$PO = \frac{\gamma xx + \zeta x + \vartheta}{\beta x + \varepsilon}$$

und setzt man PO = z, so ist

$$z(\beta x + \varepsilon) = \gamma xx + \zeta x + \vartheta$$

Hieraus erhellet, daß die Punkte O, in welchen die parallelen Ordinaten MN in zwey gleiche Theile getheilt werden, in einer Hyperbel liegen; wofern nicht $\gamma xx + \zeta x + \vartheta$ durch $\beta x + \varepsilon$ theilbar ist; denn in diesem Falle liegen die Punkte O in einer geraden Linie.

§. 254.

Ist daher $\gamma xx + \zeta x + \vartheta$ durch $\beta x + \varepsilon$ theilbar, so hat die Curve einen Durchmesser, oder eine gerade Linie, welche alle einander parallele Ordinaten MN in zwey gleiche Theile theilt; eine Eigenschaft, die sich bey allen Linien der zweyten Ordnung findet, [§ 90]. Soll aber $\gamma xx + \zeta x + \vartheta$ durch $\beta x + \varepsilon$ theilbar seyn, so muß es verschwinden, wenn man $x = \frac{-\varepsilon}{\beta}$ setzt; und es hat daher die Linie der dritten Ordnung einen Durchmesser, wenn $\gamma\varepsilon\varepsilon - \beta\varepsilon\zeta + \beta\beta\vartheta = 0$ ist.

§. 255.

Hieraus lassen sich die Fälle, in welchen die Linien der dritten Ordnung einen Durchmesser haben, auf eine ganz allgemeine Art bestimmen. Denn ist die allgemeine Gleichung

$$\alpha y^3 + \beta y^2x + \gamma yxx + \delta x^3 + \varepsilon yy + \zeta yx + \eta xx + \theta y + \iota x + \kappa = 0$$

gegeben, so hat daraus y entweder einen dreyfachen oder nur einen einzigen Werth, und es kann daher in diesem Falle keinen Durchmesser geben. Man ziehe also auf dieselbe Axe andere Applicaten u unter irgend einem Winkel, so daß $y = nu$, und $x = t - mu$ werde: so bekommt man durch diese Substitution die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{ll} +\alpha n^3u^3 + \beta n^2u^2t + \gamma nutt + \delta t^3 & + \varepsilon n^2u^2 + \zeta nut \\ & + \eta tt + \theta nu + \iota t + \kappa \\ -\beta mn^2u^3 - 2\gamma mnu^2t - 3\delta mutt & -\zeta mnu^2 - 2\eta mut \\ & -\iota mu \\ +\gamma m^2nu^3 + 3\delta m^2u^2t & +\eta m^2u^2 \\ -\delta m^3u^3 & \end{array}\right\} = 0$$

Sollen also diese neuen Applicaten einen Durchmesser zulassen können, so müssen sie einmal einen doppelten Werth anzunehmen im Stande seyn, und es muß folglich werden

$$\alpha n^3 - \beta mn^2 + \gamma m^2n - \delta m^3 = 0$$

§. 256.

Außerdem aber wird erfordert, daß die Größe, womit u multiplicirt worden ist, nemlich

$$(\gamma n - 3\delta m)tt + (\zeta n - 2\eta m)t + \theta n - \iota m$$

durch diejenige, welche uu multiplicirt, oder durch

$$(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)t + \varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm$$

theilbar sey; mit andern Worten: jene Größe muß $= 0$ werden, wenn man

$$t = \frac{-\varepsilon nn + \zeta mn - \eta mm}{\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm}$$

setzt. Hieraus fließt aber

$$\iota = \frac{\theta n}{m} - \frac{(\zeta n - 2\eta m)(\varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm)}{(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)m} +$$

$(\gamma n$

$$\frac{(\gamma n - 3\delta m)(\varepsilon nn - \zeta mn + \eta mm)^2}{(\beta nn - 2\gamma mn + 3\delta mm)^2 m}$$

§. 257.

Wendet man dieses auf die oben festgesetzten Arten an, so erhellet, daß die erste Art nie einen Durchmesser haben kann. In der zweyten Art hingegen, werden die Ordinaten von der Axe, worauf die Abscissen x dem Durchmesser parallel genommen werden, in zwey gleiche Theile getheilt. Die dritte Art läßt ganz und gar keinen Durchmesser zu. Die vierte Art hat allemal einen Durchmesser, welcher die Ordinaten, die einer Asymptote parallel sind, halbiret. Die fünfte Art hat drey Durchmesser, welche die den einzelnen Asymptoten parallelen Ordinaten in zwey gleiche Theile theilen. Die sechste Art kann keinen Durchmesser bekommen. Die siebente Art hat einen Durchmesser für die Ordinaten, die der aus dem Faktor $x - my$ entspringenden Asymptote parallel sind. Die achte Art hat einen Durchmesser für die der Axe parallelen Ordinaten. Die neunte Art hat zwey Durchmesser, einen für die Ordinaten, die der Axe, den andern für diejenigen, welche der einen Asymptote parallel sind. Die zehnte Art kömmt mit der achten, und die eilfte mit der neunten überein. Eben so ist die zwölfte Art in Ansehung der Durchmesser der achten, und die dreyzehnte der neunten gleich. Die vierzehnte Art hat einen Durchmesser für die Ordinaten, welche der Axe parallel sind. Die funfzehnte und sechszehnte Art lassen gar keine Ordinaten zu, welche die Curve in zwey Punkten schnitten, und können folglich auch keinen Dnrchmesser haben. Die Eigenschaften dieser Durchmesser findet man beym Newton ausführlich bemerkt, und es schien daher nützlich, sie selbst hier insgesammt anzuführen.

§. 258.

Ob gleich bey den Gleichungen, die wir oben [§. 237] für die einzelnen Arten der Linien der dritten Ordnung mitgetheilt haben, die Coordinaten x und y rechtwinklig angenommen worden sind: so wird doch die Natur dieser Arten nicht verändert, wenn man die Coordinaten unter irgend einem andern Winkel gegen einander geneigt seyn läßt. Denn es bleibt die Menge der ohne Ende fortlaufenden Schenkel dieselbe, man mag die Coordinaten rechtwinklig, oder auf irgend eine Art schiefwinklig annehmen. Ja es leidet auch die Natur der ohne Ende fortlaufenden Schenkel durch Annahme eines andern Coordinaten-Winkels keine Veränderung, sondern es bleiben dabey die parabolischen Schenkel parabolische, und die hyperbolischen hyperbolische. Endlich geht dadurch selbst in der Art der Schenkel, sowohl der parabolischen als der hyperbolischen, keine Veränderung vor. Es gehört daher jede Curve, welche nach der sie ausdruckenden Gleichung zu der ersten Art gerechnet werden muß, unabänderlich zu dieser ersten Art, man mag die Coordinaten rechtwinklig oder schiefwinklig annehmen, und eben so verhält es sich mit allen übrigen Arten.

§. 259.

Schränkt man sich also nicht auf rechtwinklige Coordinaten ein, sondern läßt den Winkel, welchen sie einschliessen, willkührlich seyn: so wird der Umfang der obigen Gleichungen nicht vermindert, wenn man

$$y = nu; \; x = t - mu; \text{ und } mm + nn = 1$$

setzt. Nimmt man aber den Coordinaten-Winkel willkührlich an, so lassen sich die gedachten Gleichungen auf einfachere Formen zurückbringen. Auf diese Art bekömmt

man

man für die einzelnen Arten der Linien der dritten Ordnung folgende möglich einfachste Gleichungen zwischen den schiefwinkligen Coordinaten t und u:

Die erste Art.

$$u(tt + nnuu) + auu + bt + cu + d = o$$

wenn weder n = o, noch b = o ist.

Die zweyte Art.

$$u(tt + nnuu) + auu + cu + d = o$$

wenn n nicht = o ist.

Die dritte Art.

$$u(tt - nnuu) + auu + bt + cu + d = o$$

wenn weder n = o, noch b = o, noch $\pm nb + c + \frac{aa}{4nn} = o$ ist.

Die vierte Art.

$$u(tt - nnuu) + auu + cu + d = o$$

wenn weder n = o, noch $c + \frac{aa}{4nn} = o$ ist.

Die fünfte Art.

$$u(tt - nnuu) + auu - \frac{aau}{4nn} + d = o$$

wenn n nicht = o ist.

Die sechste Art.

$$tuu + att + bt + cu + d = o$$

wenn weder a = o, noch c = o ist.

Die siebente Art.

$$tuu + att + bt + d = o$$

wenn a nicht = o ist.

Die achte Art.

$$tuu + bbt + cu + d = o$$

wenn weder b = o, noch c = o ist.

Die

Die neunte Art.

tuu + bbt + d = o

wenn b nicht = o ist.

Die zehnte Art.

tuu — bbt + cu + d = o

wenn weder b = o, noch c = o ist.

Die eilfte Art.

tuu — bbt + d = o

wenn b nicht = o ist.

Die zwölfte Art.

tuu + cu + d = o

wenn c nicht = o ist.

Die dreyzehnte Art.

tuu + d = o.

Die vierzehnte Art.

u^3 + att + cu + d = o.

Die funfzehnte Art.

u^3 + atu + bt + d = o

wenn a nicht = o ist.

Die sechszehnte Art.

u^3 + at = o.