Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Neuntes Capitel. Von der Eintheilung der Linien der dritten Ordnung in Arten.

Neuntes Capitel.

Von der Eintheilung der Linien der dritten Ordnung in Arten.

§. 219.

Man betrachtet mit Recht die Natur und die Menge der ohne Ende fortlaufenden Schenkel als ein wesentliches Unterscheidungs-Kennzeichen der krummen Linien, und gründet darauf am bequemsten die weitere Abtheilung der Linien einer jeden Ordnung in ihre Arten. Auf diesen Grund läßt sich auch die Abtheilung der Linien der zweyten Ordnung in die Arten bauen, welche wir oben [im Anfange des sechsten Capitels] aus der Natur dieser Linien selbst abgeleitet haben. Denn ist die allgemeine Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung

$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$$

gegeben, und untersucht man das höchste Glied derselben, $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx$, in der Rücksicht, ob es einfache reelle Faktoren habe, oder nicht: so entdeckt man drey Fälle, indem die Funktion $\alpha yy + \beta yx + \gamma xx$ entweder lauter imaginäre, oder lauter reelle, und in diesem Falle entweder ungleiche oder gleiche Faktoren enthalten kann. Im ersten Falle ergiebt sich die erste Art, oder die Ellipse, im zweyten die Hyperbel, und im dritten die Parabel.

§. 220.

Es hat also in dem Falle, wenn die Faktoren des höchsten Gliedes reell und einander nicht gleich sind, die Curve zwey geradlinige Asymptoten. Um die Natur derselben kennen zu lernen, setze man

$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx = (ay - bx)(cy - dx)$$

so daß

$$(ay - bx)(cy - dx) + \delta y + \varepsilon x + \zeta = 0$$

sey. Nun betrachte man zuvörderst den Faktor $ay - bx$, der im Unendlichen $\frac{x}{y} = \frac{b}{a}$ [§. 173.] giebt, wodurch denn

$$ay - bx + \frac{\delta b + \varepsilon a}{bc - ad} + \frac{\zeta}{cy - dx} = 0$$

wird; und es zeigt demnach die Gleichung

$$ay - bx + \frac{\delta b + \varepsilon a}{bc - ad} = 0$$

die Lage der einen geradlinigen Asymptote, so wie auf ähnliche Art die Gleichung

$$cy - dx + \frac{\delta d + \varepsilon c}{ad - bc} = 0$$

die Lage der andern an.

§. 221.

Um die Natur einer jeden dieser Asymptoten zu erforschen, beziehe man die Gleichung auf eine andere Axe, indem man

$$y = \frac{au + bt}{\sqrt{(aa + bb)}};\ x = \frac{at - bu}{\sqrt{(aa + bb)}}$$

setzt, [§. 201.], und dabey sey zugleich $\sqrt{(aa + bb)} = g$. Alsdann wird

$$u((ac + bd)u + (bc - ad)t) + \frac{(\delta a - \varepsilon b)u + (\delta b + \varepsilon a)t}{g}$$

$$+ \zeta = 0$$

und

und folglich

$$g(bc - ad)tu + g(ac + bd)uu + (\delta b + \varepsilon a)t$$
$$+ (\delta a - \varepsilon b)u + \zeta g = 0.$$

Setzt man daher in den übrigen Gliedern außer dem ersten

$$u = -\frac{\delta b - \varepsilon a}{g(bc - ad)}$$

so wird

$$(g(bc - ad)u + \delta b + \varepsilon a)t + \frac{(ac + bd)(\delta b + \varepsilon a)^2}{g(bc - ad)^2}$$
$$- \frac{(\delta a - \varepsilon b)(\delta b + \varepsilon a)}{g(bc - ad)} + \zeta g = 0$$

oder

$$g(bc - ad)u + \delta b + \varepsilon a + \frac{g(\delta b + \varepsilon c)(\delta b + \varepsilon a)}{(bc - ad)^2 t}$$
$$+ \frac{\zeta g}{t} = 0$$

und es ist demnach die Asymptote hyperbolisch, und von der Art $u = \frac{A}{t}$. Auf eine ähnliche Art wird aber auch die andere Asymptote, die aus dem Faktor $cy - dx$ entspringt, bestimmt; und es hat folglich die Curve zwey Paar ohne Ende fortlaufende Schenkel, die beyde durch die Gleichung $u = \frac{A}{t}$ ausgedruckt werden.

§. 222.

Nun seyen beyde Faktoren einander gleich, oder

$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx = (ay - bx)^2$$

so ist, wenn man auch hier durch die Substitutionen

$$y = \frac{au + bt}{g};\ \text{und}\ x = \frac{at - bu}{g}$$

die Gleichung für eine andere Axe abändert,

$$gguu + \frac{(\delta a - \epsilon b)u}{g} + \frac{(\delta b + \epsilon a)t}{g} + \zeta = 0$$

und wenn man $t = \infty$ setzt,

$$uu + \frac{(\delta b + \epsilon a)t}{g^3} = 0$$

Diese Gleichung zeigt zwey parabolische Schenkel von der Art $uu = At$ an; es ist nemlich die Curve selbst eine Parabel, und selbst ihre Asymptote. Wenn aber $\delta b + \epsilon a = 0$ wäre, so gienge die Gleichung in

$$gguu + \frac{\delta g u}{a} + \zeta = 0$$

über, welches eine Gleichung für zwey gerade einander parallele Linien ist: und in diesem Falle läßt sich die ganze Gleichung der zweyten Ordnung in zwey einfache Faktoren auflösen.

Auf diesem Wege würden wir die Arten der Linien der zweyten Ordnung auch dann gefunden haben, wenn wir sie bis hieher völlig ununtersucht gelassen hätten.

§. 223.

Eben diesen Weg wollen wir nun auch betreten, um die Arten der Linien der dritten Ordnung, deren allgemeine Gleichung

$$\alpha y^3 + \beta y^2x + \gamma xy^2 + \delta x^3 + \epsilon y^2 + \zeta yx + \eta x^2 + \theta y + \iota x + \kappa = 0$$

ist, zu finden. Hier hat das höchste Glied,

$$\alpha y^3 + \beta y^2x + \gamma yx^2 + \delta x^3$$

weil die Anzahl seiner Dimensionen eine ungerade Zahl ist, entweder einen reellen einfachen Faktor, oder es sind alle seine drey einfache Faktoren reell. Aus diesem Grunde sind hier folgende Fälle zu untersuchen:

I.

Wenn nur ein einziger einfacher Faktor reell ist.

II.

Wenn alle drey reell und keiner einem von den übrigen gleich ist.

III.

Wenn zwey Faktoren einander gleich sind.

IV.

Wenn alle drey Faktoren einander gleich sind.

Da es aber bey einem jeden Falle hinlänglich ist, die Rechnung bey einem einzigen Faktor anzustellen, so wollen wir diesen Faktor, er mag nun allein, oder es mögen ausser ihm noch andere, ihm gleiche oder ungleiche, Faktoren statt finden, $ay - bx$ seyn lassen, und die Lage der Axe dafür auf eben die Art verändern, wie wir bisher gethan haben. Auf diese Art erhalten wir folgende Gleichung

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t + \vartheta u + \iota = 0$$

die wir, da sie einen eben so weiten Umfang hat als die vorhergehende, statt dieser gebrauchen wollen, und worin das höchste Glied $\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3$ allemal wenigstens den Faktor u hat.

Erster Fall.

§. 224.

Es habe also das höchste Glied bloß den einzigen reellen Faktor u, welches statt findet, wenn $\beta\beta$ kleiner als $4\alpha\gamma$ ist: so wird, wenn man $t = \infty$ setzt, $\alpha u + \delta = 0$, eine Gleichung für eine geradlinige Asymptote. Es gebe diese Gleichung den Werth $u = c$, so wird

$$\alpha tt(u - c) + t(\beta cc + \varepsilon c + \eta) + \gamma c^3 + \zeta c^2 + \vartheta c + \iota = 0$$

und diese Gleichung druckt die Natur der Asymptote aus. Hieraus ergiebt sich, je nachdem $\beta c^2 + \varepsilon c + \eta$ entweder nicht $= 0$ oder $= 0$ ist, eine doppelte Asymptote, nemlich entweder

$$u - c = \frac{A}{t};\ \text{oder}\ u = c = \frac{A}{tt}$$

und so findet man durch die Betrachtung dieses Falles die beyden ersten Arten der Linien der dritten Ordnung, nemlich:

1.

Die erste Art hat eine einzige geradlinige Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$.

2.

Die zweyte Art hat eine einzige geradlinige Asymptote von der Art $u = \frac{A}{tt}$.

Zweyter Fall.

§. 225.

Es seyen alle drey einfache Faktoren des höchsten Gliedes reell, und keiner dem andern gleich, welches statt findet, wenn in der Gleichung

$$\alpha ttu + \beta tuu + \gamma u^3 + \delta tt + \varepsilon tu + \zeta uu + \eta t + \vartheta u + \iota = 0$$

$\beta\beta$ größer als $4\alpha\gamma$ ist. In diesem Falle gilt von einem jeden Faktor, was so eben von dem einzigen Faktor gezeigt worden ist. Es führt nemlich jeder Faktor auf zwey hyperbolische Schenkel, entweder von der Art $u = \frac{A}{t}$, oder von dieser $u = \frac{A}{tt}$: und so enthält dieser Fall vier verschiedene Arten der Linien der dritten Ordnung, die drey geradlinige gegen einander unter irgend einem Winkel geneigte Asymptoten haben, und diese Arten sind:

3.

Die dritte Art hat drey Asymptoten von der Art $u = \frac{A}{t}$.

4.

Die vierte Art hat zwey Asymptoten von der Art $u = \frac{A}{t}$ und eine von der Art $u = \frac{A}{tt}$.

Die fünfte Art hat eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$ und zwey von der Art $u = \frac{A}{tt}$. *)

Die sechste hat drey Asymptoten von der Form $u = \frac{A}{tt}$.

*) Man sehe §. 227. S. 178. 179. nach.

§. 226.

Hier müssen wir aber untersuchen, ob alle diese Arten möglich sind, und zu dem Ende wollen wir folgende ganz allgemeine Gleichung nehmen:

$$y(\alpha y - \beta x)(\gamma y - \delta x) + \varepsilon xy + \zeta yy + \eta x + \theta y + \iota = 0$$

deren höchstes Glied drey reelle Faktoren hat, und wo die Auslassung des Gliedes xx den Umfang derselben nicht vermindert. Es erhellet aber aus dem Vorhergehenden, daß der Faktor y eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$ gebe, wenn η nicht $= 0$ ist, und wir wollen daher untersuchen, auf was für Asymptoten der Faktor $\alpha y - \beta x$ führe. Zu dieser Absicht wollen wir

$$y = \alpha u + \beta t, \text{ und } x = \alpha t - \beta u,$$

und zugleich, der Kürze wegen, indem solches allemal erlaubt ist,

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

setzen. Dadurch erhält die Gleichung folgende Form:

$$\left.\begin{array}{l} \beta(\beta\gamma-\alpha\delta)ttu + (2\alpha\beta\gamma-(\alpha\alpha-\beta\beta)\delta)tuu + \alpha(\alpha\gamma+\beta\delta)u^3 \\ + \beta(\alpha\varepsilon+\beta\zeta)tt + (2\alpha\beta\zeta+(\alpha\alpha-\beta\beta)\varepsilon)tu + \alpha(\alpha\zeta-\beta\varepsilon)u^2 \\ \qquad + (\alpha\eta+\beta\vartheta)t \qquad\qquad + (\alpha\vartheta-\beta\eta)u \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \iota \end{array}\right\} = 0$$

Hier geht der Faktor $\alpha y - \beta x$ in u über, und es wird daher, wenn man $t = \infty$ setzt,

$$u = \frac{\alpha\varepsilon + \beta\zeta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = c,$$

und bringt man diesen Werth anstatt u in das zweyte Glied, welches t enthält, so findet man, daß aus diesem Faktor oder $\alpha y - \beta x$ eine Asymptote von der Form $u = \frac{A}{t}$ entspringt, wofern nicht

$$\frac{\alpha\eta + \beta\vartheta}{\beta} + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0$$

ist. Auf eine ähnliche Art giebt der Faktor $\gamma y - \delta x$ eine Asymptote von der Form $u = \frac{A}{t}$, wofern nicht

$$\frac{\gamma\eta + \delta\vartheta}{\delta} + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0$$

ist.

§. 227.

Hieraus erhellet, daß es allerdings möglich ist, daß weder ι noch die beyden eben gefundenen Formeln $= 0$ werden, wodurch denn die dritte Art allerdings möglich wird. Was die vierte Art betrifft, so setze man $\iota = 0$, damit die eine Asymptote von der Form $u = \frac{A}{tt}$ erhalten werde. Alsdann aber fallen die beyden übrigen Ausdrücke in einen zusammen, und es gehören also die beyden übrigen Asymptoten zu der Form $u = \frac{A}{t}$, wofern nicht

$$\vartheta + \frac{(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2} = 0$$

ist, und es ist daher auch die vierte Art möglich. Wenn hingegen außer $\eta = 0$ auch einer von den beyden übrigen Ausdrücken $= 0$ wird, so verschwindet zugleich der andere, und es ist daher unmöglich, daß zwey Asymptoten zu der Form $u = \frac{A}{tt}$ gehören, ohne daß die dritte unter eben derselben begriffen sey, und es ist demnach die fünfte Art unmöglich. Die sechste Art hingegen wird eben hierdurch möglich, weil wenn $\eta = 0$ ist,

$$\vartheta = \frac{-(\alpha\varepsilon + \beta\zeta)(\gamma\varepsilon + \delta\zeta)}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$$

wird. Es geben also diese beyden Fälle nur fünf Arten der Linien der dritten Ordnung, weil diejenige, die vorhin die fünfte war, wegfällt, und es hat folglich

5.

Die fünfte Art drey Asymptoten von der Art $u = \frac{A}{tt}$.

Dritter Fall.

§. 228.

Es habe das höchste Glied zwey gleiche Faktoren u, welches statt findet, wenn in der Gleichung des vorhergehenden Falls das erste Glied αttu verschwindet; und es ist demnach die allgemeine Gleichung für den gegenwärtigen Fall folgende:

$$\alpha tuu - \beta u^3 + \gamma tt + \delta tu + \varepsilon uu + \zeta t + \eta u + \vartheta = 0$$

Es habe also hier das erste Glied zwey gleiche Faktoren u, und der dritte, von diesen verschiedene, sey $\alpha t - \beta u$. Dieser dritte Faktor führt auf eine Asymptote entweder von der

Form $u = \frac{A}{t}$, oder von der Form $u = \frac{A}{tt}$, je nachdem der Ausdruck

$$(\alpha\delta + 2\beta\gamma)(\alpha^2\varepsilon + \alpha\beta\delta + \beta\beta\gamma) - \alpha^3(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

entweder nicht $= 0$ oder $= 0$ ist.

§. 229.

Was die beyden gleichen Faktoren betrifft, so ist dabey zuvörderst der Fall zu erwägen, wenn γ nicht $= 0$ ist. Denn alsdann wird, wenn man $t = \infty$ setzt, $\alpha uu + \gamma t = 0$, und dies ist eine Gleichung für eine parabolische Asymptote von der Art $uu = At$. Es entspringen also hieraus zwey neue Arten der Linien der dritten Ordnung, nemlich:

6.

Die sechste Art hat eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$, und eine von der Art $uu = At$.

7.

Die siebente Art hat eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{tt}$, und eine parabolische von der Art $uu = At$.

§. 230.

Nun sey $\gamma = 0$, so giebt der dritte Faktor $\alpha t - \beta u$ eine Asymptote von der Form $u = \frac{A}{tt}$, wenn

$$\delta(\alpha\varepsilon + \beta\delta) = \alpha(\alpha\eta + \beta\zeta)$$

ist; findet dieses aber nicht statt, so gehört die Asymptote zu der Form $u = \frac{A}{t}$. Wir haben also die Gleichung,

$+ \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} +\alpha t u u - \beta u^3 \\ +\delta t u + \varepsilon u u \\ +\zeta t \;\; + \varkappa u \\ +\vartheta \end{array}\right\} = 0$$

und hier wird, wenn man $t = \infty$ setzt, $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$.

Nun sey zuvörderst $\delta\delta$ kleiner als $4\alpha\zeta$, so findet keine Asymptote statt, und es entspringen daher aus diesem Falle zwey Arten:

8.

Die achte Art hat eine einzige Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$.

9.

Die neunte Art hat eine einzige Asymptote von der Art $u = \frac{A}{tt}$.

§. 231.

Sind beyde Wurzeln der Gleichung $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$, reell und ungleich, welches statt findet, wenn $\delta\delta$ größer als $4\alpha\zeta$ ist, so ergeben sich daraus zwey geradlinige einander parallele Asymptoten, davon jede zu der Form $u = \frac{A}{t}$ gehört; und es giebt daher auch dieser Fall zwey neue Arten an die Hand.

10.

Die zehnte Art hat eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$, und zwey einander parallele von der Art $u = \frac{A}{t}$.

11.

Die eilfte Art hat eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{tt}$, und zwey einander parallele von der Art $u = \frac{A}{t}$.

§. 232.

Sind die beyden Wurzeln der Gleichung $\alpha uu + \delta u + \zeta = 0$ einander gleich, oder $\delta\delta = 4\alpha\zeta$, oder $\alpha uu + \delta u + \zeta = \alpha(u - c)^2$: so wird

$$\alpha t(u - c)^2 = \beta c^3 - \varepsilon cc - \eta c - \vartheta$$

und daraus ergiebt sich eine geradlinige Asymptote von der Art $uu = \frac{A}{t}$. Es fließen also hieraus zwey neue Arten.

12.

Die zwölfte Art hat eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$, und eine von der Art $uu = \frac{A}{t}$.

13.

Die dreyzehnte Art hat eine Asymptote von der Art $u = \frac{A}{tt}$, und eine von der Art $uu = \frac{A}{t}$.

Vierter Fall.

§. 233.

Wenn alle drey Faktoren des höchsten Gliedes einander gleich sind, so hat die Gleichung folgende Form:

$$\alpha u^3 + \beta tt + \gamma tu + \delta uu + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0$$

Hier ist zuerst das Glied βtt zu betrachten. Ist dasselbe da, so hat die Curve eine parabolische Asymptote von der Art $u^3 = Att$, und so erhält man eine Art

14.

Die vierzehnte Art hat eine einzige parabolische Asymptote von der Art $u^3 = Att$.

§. 234.

Fehlt aber das Glied βtt, so wird

$$\alpha u^3 + \gamma tu + \delta uu + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0$$

Setzt

Setzt man also $t = \infty$, so wird, wofern nicht γ und $\varepsilon = 0$ sind,

$$\alpha u^3 + \gamma t u + \varepsilon t = 0.$$

Es sey nun γ nicht $= 0$, so sind in dieser Gleichung folgende beyde

$$\alpha uu + \gamma t = 0, \text{ und } \gamma u + \varepsilon = 0$$

enthalten, davon die erste auf eine parabolische Asymptote von der Art $uu = At$ führt, und die andere, wenn man $\frac{-\varepsilon}{\gamma} = c$ setzt, diese Gleichung giebt,

$$\gamma t (u - c) + \alpha c^3 + \delta cc + \zeta c + \eta = 0,$$

welches eine Gleichung für eine hyperbolische Asymptote von der Art $u = \frac{A}{t}$ ist. Also hat

15.

Die funfzehnte Art eine parabolische Asymptote von der Art $uu = At$, und eine geradlinige von der Art $u = \frac{A}{t}$, und die Axe der parabolischen ist der andern geradligen Asymptote parallel.

§. 235.

Endlich sey $\gamma = 0$, so daß die Gleichung sey:

$$\alpha u^3 + \delta uu + \varepsilon t + \zeta u + \eta = 0$$

wo ε nicht verschwinden kann, ohne daß die Gleichung aufhöre, eine Gleichung für eine Curve zu seyn. Nimmt man aber $t = \infty$, so muß auch nothwendig $u = \infty$ werden, und es wird daher $\alpha u^3 + \varepsilon t = 0$, und daraus ergiebt sich die letzte Art.

16.

Die sechszehnte Art hat eine parabolische Asymptote von der Art $u^3 = At$.

§. 236.

Wir haben also alle Linien der dritten Ordnung auf sechszehn Arten zurückgebracht, die aber alle zwey und siebenzig Arten, welche Newton dabey angenommen, in sich fassen. Ueber den großen Unterschied zwischen der gegenwärtigen Eintheilung und der Newtonianischen darf man sich nicht wundern, da wir bloß auf die Beschaffenheit der ohne Ende fortlaufenden Schenkel gesehen, Newton aber auch den Zustand der Curven in dem endlichen Raume in Erwägung gezogen, und nach der Verschiedenheit desselben verschiedene Arten gemacht hat. Ob nun gleich der Eintheilungsgrund willkührlich scheint, so hätte dennoch Newton auf dem von ihm betretenen Wege noch weit mehr Arten finden können, da sich hingegen nach meiner Methode weder mehr noch weniger Arten entdecken lassen.

§. 237.

Damit nun die Natur und der Umfang einer jeden Art desto besser erkannt werden möge, so will ich für jede Art die allgemeine Gleichung in der einfachsten Form, die sie, ohne ihren Umfang zu vermindern, erhalten kann, hersetzen, und zugleich bey jeder die darunter begriffenen Newtonianischen Arten anführen.

Die erste Art.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + bx + cy + d = 0$$

wenn mm größer als nn, und b nicht $= 0$ ist.

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten, 33, 34, 35, 36, 37, 38.

Die zweyte Art.

$$y(xx - 2mxy + nnyy) + ayy + cy + d = 0$$

wenn mm größer als nn ist.

Hier-

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

Die dritte Art.

$$y(x-my)(x-ny)+ayy+bx+cy+d=0$$

wenn weder $b=0$, noch $mb+c+\frac{aa}{(m-n)^2}=0$, noch

$nb+c+\frac{aa}{(m-n)^2}=0$, noch $m=n$ ist.

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; desgleichen 24, 25, 26, 27, wenn $a=0$ ist.

Die vierte Art.

$$y(x-my)(x-ny)+ayy+cy+d=0$$

wenn weder $c+\frac{aa}{(m-n)^2}=0$, noch $m=n$ ist.

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21; desgleichen, wenn $a=0$ ist, 28, 29, 30, 31.

Die fünfte Art.

$$y(x-my)(x-ny)+ayy-\frac{aay}{(m-n)^2}+d=0$$

wenn m nicht $=n$ ist.

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten 22, 23, und 32.

Die sechste Art.

$$yy(x-my)+axx+bx+cy+d=0$$

wenn weder $a=0$, noch $2m^3aa-mb-c=0$ ist.

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52.

Die siebente Art.

$$yy(x-my)+axx+bx+m(2m^2a^2-b)y+d=0$$

 wenn

wenn a nicht = o ist.

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten 53, 54, 55, 56.

Die achte Art.

$$yy(x - my) + bbx + cy + d = o$$

wenn weder $c = -mbb$, noch $b = o$ ist

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten 61 und 62.

Die neunte Art.

$$yy(x - my) + bbx - mbby + d = o$$

wenn b nicht = o ist.

Hieher gehört von den Newtonianischen Arten die 63ste.

Die zehnte Art.

$$yy(x - my) - bbx + cy + d = o$$

wenn weder $c = mbb$, noch $b = o$ ist.

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten 57, 58, 59.

Die eilfte Art.

$$yy(x - my) - bbx + mbby + d = o$$

wenn b nicht = o ist.

Hieher gehört von den Newtonianischen Arten die 60ste.

Die zwölfte Art.

$$yy(x - my) + cy + d = o$$

wenn c nicht = o ist.

Hieher gehört von den Newtonianischen Arten die 64ste.

Die dreyzehnte Art.

$$yy(x - my) + d = o$$

Hieher gehört von den Newtonianischen Arten die 65ste.

Die vierzehnte Art.

$$y^3 + axx + bxy + cy + d = o$$

wenn

wenn a nicht o = ist

Hieher gehören von den Newtonianischen Arten 67, 68, 69, 70, 71.

Die funfzehnte Art.

$$y^3 + bxy + cx + d = o$$

wenn b nicht = o ist.

Hieher gehört von den Newtonianischen Arten die 66ste.

Die sechszehnte Art.

$$y^3 + \alpha y + bx = o$$

wenn b nicht = o ist.

Hieher gehört von den Newtonianischen Arten die 72ste.

§. 238.

Es haben aber diese Arten meistens einen so weiten Umfang, daß jede merkwürdige Unterabtheilungen zuläßt, wenn man auf die Gestalt, welche die Curven in dem endlichen Raume haben, Rücksicht nimmt. Aus diesem Grunde hat auch Newton eine größere Anzahl von Arten angenommen, um die Curven, die sich in dem endlichen Raume merklich von einander unterscheiden, von einander absondern zu können. Es wäre daher aber besser, die Gattungen, welche wir mit dem Namen der Arten belegt haben, Geschlechter zu nennen, und den Namen der Arten für die unter ihnen begriffenen zu brauchen. Dies wird insbesondere bey den Eintheilungen der Linien der vierten und der höhern Ordnungen wichtig, weil dabey jede Art, oder vielmehr jedes Geschlecht, eine noch viel größere Verschiedenheit zuläßt.

Zehntes