Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Siebentes Capitel. Von den ohne Ende fortlaufenden Schenkeln.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Siebentes Capitel.

Von den ohne Ende fortlaufenden Schenkeln.

§. 166.

Wenn eine krumme Linie, zu was für einer Ordnung und Art dieselbe auch immer gehören mag, einen ohne Ende fortlaufenden Schenkel hat, und man aus einem unendlich weit entfernten Punkte in derselben auf eine willkührlich angenommene Axe eine senkrechte Applicate herabfällt: so ist entweder die Abscisse x oder die Applicate y, oder es sind beyde Coordinaten unendlich. Denn sollte weder die Abscisse noch die Applicate unendlich seyn, sondern beyde eine bestimmte oder endliche Größe haben: so wäre die Entfernung des in der Curve angenommenen Punkts von dem Anfangspunkte der Abscissen endlich, nemlich $= \sqrt{(xx + yy)}$, wider das Angenommene. Wenn daher eine Curve einen ohne Ende fortlaufenden Schenkel hat, so gehört entweder zu irgend einer endlichen Abscisse eine unendliche Applicate, oder zu einer unendlichen Abscisse eine mögliche, endliche entweder oder unendliche, Applicate. Und hieraus lassen sich die ohne Ende fortlaufenden Schenkel der Curven entdecken.

§. 167.

Wenn eine algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten x und y von irgend einer Ordnung, die n anzeigen mag, gegeben ist, und man die Glieder besonders betrachtet, in welchen die veränderlichen Größen x und y, n Dimensionen haben, und welche also $\alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \delta y^{n-3}x^3 + \ldots\ldots + \xi x^n$ seyn werden: so läßt sich dieser Ausdruck in einfache Faktoren von der Form $Ay + Bx$ auflösen, die entweder reell oder imaginär sind, [1stes B. §. 90.] und hat derselbe imaginäre Werthe, so ist ihre Anzahl eine gerade Zahl, und je zwey derselben geben im Produkte einen doppelten reellen Faktor von der Form $A^2y^2 - 2ABxy.\cos.\varphi + B^2x^2$. [§. 91 des 1sten B. verbunden mit §. 145 eben dieses Buchs]. Ein solcher Faktor aber hat allezeit, es mag nun x, oder y, oder beyde zugleich $= \infty$ seyn, den unendlichen Werth $= \infty^2$, weil das Glied $2ABy x.\cos.\varphi$ immer kleiner ist, als die beyden übrigen, und weder A noch $B = 0$ seyn kann. Es kann daher ein solcher Faktor wie $A^2y^2 - 2ABxy.\cos.\varphi + B^2x^2$, wenn entweder x oder y, oder sowohl x als y unendlich groß angenommen wird, weder $= 0$, noch eine endliche Größe, ja nicht einmal bloß $= \infty$ seyn, sondern er ist allezeit $= \infty^2$, welches unendlich vielmal mehr ist als ∞.

§. 168.

Nimmt man daher an, daß der höchste Theil der Gleichung, $\alpha y^n + \beta y^{n-1}x + \gamma y^{n-2}x^2 + \ldots\ldots \xi x^n$, keinen einfachen reellen Faktor habe; ein Fall, der nur dann statt finden kann, wenn n eine gerade Zahl ist: so wird derselbe aus lauter doppelten Faktoren von der Form $A^2y^2 - 2ABxy.\cos.\varphi + B^2x^2$ bestehen. Wenn daher entweder x, oder y, oder x und y zugleich unendlich groß angenommen werden, so wird auch jener Ausdruck selbst einen unendlichen Werth $= \infty^n$ bekommen, und er kann also alsdann weder einer endlichen Größe, noch irgend einer unendlichen Größe ∞^m, deren Exponent m kleiner als n ist, gleich seyn. Da nun die übrigen Glieder der Gleichung,

in

in welchen die veränderlichen Größen x und y weniger Dimensionen haben, unendlich Große mit einem kleinern Exponenten geben: so können sie jenem höchsten Theile nie gleich werden, und es kann folglich auch die Gleichung nicht bestehen, wenn entweder x oder y oder beyde veränderliche Größen unendlich angenommen werden.

§. 169.

Wenn also eine krumme Linie durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y ausgedruckt wird, deren höchstes Glied keine einfache reelle Faktoren hat: so hat sie keine ohne Ende fortlaufende Schenkel, sondern es ist die ganze Curve in einem endlichen Raume enthalten, so wie die Ellipse oder der Kreis. Wenn daher in der allgemeinen Gleichung der Linien der zweyten Ordnung $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$ das höchste Glied $\alpha y^2 + \beta xy + \gamma xx$, worin die veränderlichen Größen x und y zwey Dimensionen haben, keine einfache reelle Faktoren hat, welches geschieht, wenn $\beta\beta$ größer als $4\alpha\gamma$ wird: so hat die Curve keinen ohne Ende fortlaufenden Schenkel, und ist daher eine Ellipse.

§. 170.

Um dies desto deutlicher aus einander setzen zu können, wollen wir jede Gleichung zwischen den Coordinaten x und y auf die Art in Glieder theilen, daß wir zu dem höchsten oder ersten alle die Glieder der Gleichung rechnen, worin die veränderlichen Größen x und y die höchste Dimension von dem Exponenten n haben. Das zweyte Glied ferner soll alle die Glieder der Gleichung bekommen, worin beyde veränderliche Größen $n - 1$ Dimensionen ausmachen. Zu dem dritten Gliede sollen alle die Glieder der Gleichung gehören, worin die Anzahl der Dimensionen der veränderlichen Größen x und y, durch $n-2$ ausgedruckt wird; und auf diese Art wollen wir weiter fortgehen, bis zu dem Gliede, worin keine Dimension von x und y enthalten ist, und welches daher bloß aus einer beständigen Größe besteht. Außerdem wollen wir das erste oder höchste Glied P, das zweyte Q, das dritte R, das vierte S u. s. f. nennen.

§. 171.

Da also die krumme Linie, welche durch die Gleichung $P + Q + R + S +$ ꝛc. $= 0$ ausgedruckt wird, wenn P keinen einfachen reellen Faktor hat, auch keinen ohne Ende fortlaufenden Schenkel hat: so wollen wir nunmehr annehmen, daß das höchste Glied P Einen einfachen reellen Faktor $ay - bx$ habe, so daß $P = (ay - bx)M$ sey, wo M eine Funktion von x und y von $n - 1$ Dimensionen bedeutet, die keine einfache reelle Faktoren hat. Setzt man daher x oder y oder x und $y = \infty$, so wird $M = \infty^{n-1}$; Q kann ein ähnliches unendlich Großes seyn, aber R, S, ꝛc. werden unendlich Große von niedrigern Graden. Folglich kann die Gleichung $P + Q + R +$ ꝛc. $= 0$ bestehen, wenn $ay - bx =$ einer endlichen Größe oder $= 0$ ist, und die Curve wird daher ohne Ende fortlaufen.

§. 172.

Es sey also $ay - bx = p$, wo p eine solche endliche Größe seyn muß, daß $pM + Q + R + S +$ ꝛc. $= 0$, oder $p = \frac{-Q - R - S \text{ ꝛc.}}{M}$ wird, wenn die Curve ins Unendliche übergeht. Da aber M eine unendliche Größe von einer höhern Ordnung als R, S, ꝛc. ist, so werden

die

die Brüche $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$, ꝛc. $= o$, und folglich $p = \frac{-Q}{M}$.
Man erhält also den Werth von p aus dem Bruche $\frac{-Q}{M}$, wenn man darin x und y unendlich groß annimmt. Da ferner $ay - bx = p$ ist, so ist $y = \frac{bx + p}{a}$, und $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax} = \frac{b}{a}$, weil $\frac{p}{ax} = o$ wird, wenn $x = \infty$ ist. Wenn also die Curve ins Unendliche übergeht, so ist $y = \frac{bx}{a}$.

§. 173.

Da Q und M homogene Funktionen von $n - 1$ Dimensionen sind, so ist $\frac{-Q}{M}$ eine Funktion von keiner Dimension [1 B. §. 85] welche daher, wenn man $y = \frac{bx}{a}$ setzt, einen beständigen Werth p für giebt. Oder, da die Funktion $\frac{-Q}{M}$ bestimmt wird, sobald das Verhältniß zwischen y und x, welches das Verhältniß $b : a$ ist, bestimmt wird: so erhält man den Werth von p, wenn man in der Funktion $\frac{-Q}{M}$ allenthalben b anstatt y, und a anstatt x setzt. Hat man auf diese Art p gefunden, so wird $ay - bx = p$, und diese Gleichung ist in der gegebenen Gleichung $P + Q + R + S$ ꝛc. $= o$ enthalten, wenn die Curve ins Unendliche übergeht.

§. 174.

Der Theil der Curve im Unendlichen wird also durch die Gleichung $ay - bx = p$ ausgedruckt; und da dies eine

Gleichung für eine gerade Linie ist, [§ 39. 40], so muß diese gerade Linie, wenn sie ohne Ende verlängert wird, mit der Curve zusammenfallen. Es ist daher die gedachte gerade Linie eine Asymptote der Curve, weil die krumme Linie mit ihr im Unendlichen zusammenfällt, und sich ihr daher immer mehr und mehr nähert. Und da die gegebene Gleichung $P + Q + R + S +$ ꝛc. $= 0$, wenn man x oder $y = \infty$ setzt, in diese, $ay - bx = p$, übergeht: so erhellet zugleich, daß diese gerade Linie, nach beyden Seiten verlängert, im Unendlichen mit der Curve zusammenfällt. Es hat daher die krumme Linie zwey ohne Ende fortlaufende, und einander entgegenstehende Schenkel, davon der eine mit der geraden Linie, wenn man sie vorwärts, und der andere mit ihr, wenn man sie rückwärts ohne Ende verlängert, zusammenfällt.

§. 175.

Da also die Curve, wenn die für sie gegebene Gleichung $P + Q + R + S +$ ꝛc. so beschaffen ist, daß das höchste Glied derselben Einen einfachen reellen Faktor hat, zwey ohne Ende fortlaufende Schenkel hat, die sich einer und derselben geraden Linie, welche man ihre Asymptote nennt, auf beyden Seiten immer mehr und mehr nähern: so wollen wir jetzt annehmen, daß das höchste Glied P zwey einfache reelle Faktoren $ay - bx$, und $cy - dx$ habe, so daß $P = (ay - bx)(cy - dx)M$, und M eine homogene Funktion von $n - 2$ Dimensionen sey. Hier sind aber zwey Fälle zu erwägen, indem diese beyden Faktoren entweder einander gleich oder ungleich seyn können.

§. 176.

Sind nun zuvörderst diese Faktoren einander ungleich, so ist offenbar, daß die Gleichung

$(ay$

$(ay-bx)(cy-dx)M + Q + R + S +$ ꝛc. $= 0$
für unendliche Abscissen oder Applicaten auf eine doppelte Weise bestehen kann, entweder wenn $ay-bx$, oder wenn $cy-dx$ einer endlichen Größe gleich ist. Setzt man daher $ay-bx = p$, so daß p eine endliche Größe ist, so ist im Unendlichen $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, und es wird, wie vorhin,

$$p = \frac{-Q-R-S-\text{ꝛc.}}{(cy-dx)M} = \frac{-Q}{(cy-dx)M},$$

welches eine Funktion von x und y von keiner Dimension ist. Wenn man also $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, oder, welches auf eins hinausläuft, allenthalben b anstatt y, und a anstatt x setzt, so findet man den wahren Werth der gesuchten beständigen Größe p. Es ist folglich $p = \frac{-Q}{(bc-ad)M}$, und da wegen der Ungleichheit der Faktoren $bc-ad$ nicht $= 0$ seyn, und eben so wenig M, da es gar keinen reellen einfachen Faktor enthält, $= 0$ werden kann: so entsteht daraus für p ein endlicher Werth, oder es wird $= 0$, welches geschiehet, wenn entweder das Glied Q gänzlich fehlt, oder den Faktor $ay-bx$ hat.

§. 177.

Es hat also die Curve wegen des einfachen reellen Faktors $ay-bx$ des höchsten Gliedes P, eben so wie im ersten Falle, Eine Asymptote, deren Lage durch die Gleichung $ay-bx = p$ angezeigt wird. Auf eine ähnliche Art aber kommt ihr auch wegen des andern Faktors $cy-dx$ eine Asymptote zu, welche durch die Gleichung $cy-dx = q$ ausgedruckt wird, wenn man $q = \frac{-Q}{(ay-bx)M}$

annimmt, nachdem man allenthalben anstatt y und x die bestimmten Werthe d und c gesetzt hat. Es hat daher die Curve zwey Asymptoten, und folglich vier ohne Ende fortlaufende Schenkel, die mit diesen geraden Linien endlich zusammenfallen. So verhielt es sich, wie wir oben gesehen haben bey der Hyperbel; und wenn daher das höchste Glied $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx$ in der Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung $\alpha yy + \beta xy + \gamma xx + \delta y + \epsilon x + \zeta = 0$ zwey einfache reelle und ungleiche Faktoren hat, welches statt findet, wenn $\beta\beta$ größer als $4\alpha\gamma$ ist, so ist die Curve eine Hyperbel.

§. 178.

Nun seyen die beyden Faktoren $ay - bx$ und $cy - dx$ einander gleich, so daß $P = (ay - bx)^2 M$. Da $P + Q + R + S + \text{ꝛc} = 0$ ist, so ist $(ay - bx)^2 = \frac{-Q - R - S - \text{ꝛc}}{M}$; und da Q eine Funktion von $n - 1$; R eine Funktion von $n - 2$; und S eine Funktion von $n - 3$ Dimensionen ist, so wird, da M ebenfalls $n - 2$ Dimensionen hat, wenn x oder y unendlich groß werden, $\frac{S}{M} = 0$, und folglich

$$(ay - bx)^2 = \frac{-Q}{M} - \frac{R}{M} = \frac{-Q}{M(\mu y + \nu x)}(\mu y + \nu x) - \frac{R}{M}.$$

Nun sind aber $\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)}$ und $\frac{R}{M}$ Funktionen von keiner Dimension der Größen x und y. Da also im Unendlichen $y : x = b : a$ ist, so werden beyde Funktionen, wenn man das Verhältniß $\frac{b}{a}$ anstatt $\frac{y}{x}$, oder b für y, und a für x setzt, zu beständigen Größen.

§. 179.

Es werde daher durch diese Substitution

$$\frac{Q}{M(\mu y + \nu x)} = A, \text{ und } \frac{R}{M} = B;$$

so wird

$$(ay - bx)^2 = - A(\mu y + \nu x) - B:$$

und dies ist die Gleichung für eine krumme Linie, welche mit der Linie, die durch die Gleichung $P + Q + R + S +$ ꝛc. $= o$ ausgedruckt wird, im Unendlichen zusammenfällt. Da aber die Größen μ und ν willkührlich sind, so setze man $\mu = b$ und $\nu = a$, und lasse bey veränderten Coordinaten

$ay - bx = u\sqrt{(aa + bb)}$ und $by + ax = t\sqrt{(aa + bb)}$ seyn. Alsdann ist für eben diese Curve

$$uu + \frac{At}{\sqrt{(aa + bb)}} + \frac{B}{aa + bb} = o$$

wovon in die Augen fällt, daß es eine Gleichung für die Parabel ist. Die gesuchte Curve ist daher von der Art, daß sie ohne Ende fortgeführt, mit einer Parabel zusammenfällt. Sie hat daher nur zwey ohne Ende fortlaufende Schenkel, deren Asymptote keine gerade Linie, sondern die durch die vorhergehende Gleichung ausgedruckte Parabel ist.

§. 180.

Dies findet statt, wenn A nicht $= o$ ist: allein wenn $A = o$ wird (welches geschiehet, wenn das zweyte Glied Q fehlet, oder durch $ay - bx$ theilbar ist), so hört die gefundene Gleichung auf eine Gleichung für die Parabel zu seyn, und verwandelt sich in $uu + \frac{B}{aa + bb} = o$, wobey drey Fälle zu betrachten sind. Ist nemlich zuvörderst B eine negative Größe, oder $\frac{B}{aa + bb} = - ff$, so begreift die Gleichung $uu - ff = o$ diese zwey Gleichungen $u - f = o$, und $u + f = o$ in sich, welche zu zweyen geraden einander parallelen Linien gehören, davon eine jede eine Asymptote der Curve ist, wie im ersten Falle. Es hat daher die Curve vier ohne Ende fortlaufende Schenkel, die über alle Grenzen hinaus verlängert mit diesen beyden geraden Linien zusammenfallen.

§. 181.

Der zweyte Fall findet statt, wenn B eine positive Größe, oder $= + ff$ ist. Weil aber die Gleichung $uu + ff = o$ in diesem Falle unmöglich wird, so hat die Curve alsdann keinen ohne Ende fortlaufenden Schenkel, sondern ist ganz in einem endlichen Raume enthalten. Es hat daher die Curve, welche durch die Gleichung $P + Q + R + S +$ ꝛc. ausgedruckt wird, nicht bloß in dem Falle keinen ohne Ende fortlaufenden Schenkel, wenn das höchste Glied P keinen einfachen reellen Faktor hat, sondern es kann dieser Umstand, wie wir gesehen haben, auch statt finden, obgleich P Faktoren hat. In der Folge werden noch mehrere Fälle dieser Art vorkommen.

§. 182.

Der dritte Fall endlich tritt ein, wenn auch $B = o$ wird, ein Umstand, der sich bey jedem der beyden vorhergehenden Fälle ereignen kann, daher es zweifelhaft ist, wie die Curve beschaffen seyn werde. Man muß also, um die Gestalt der Curve zu bestimmen, die folgenden Glieder betrachten. Da nemlich

$P + Q + R + S +$ ꝛc. $= o$, und $P = (ay - bx)^2 M$ ist:

so

so ist im Unendlichen

$\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, und $(ay - bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \frac{T}{M} +$ ꝛc. $= 0$. Nun setze man, wie vorhin [§ 179] nachdem man die Substitution $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ gebraucht hat,

$$\frac{Q}{M} = A(by + ax), \text{ und } \frac{R}{M} = B;$$

ferner sey, da S, T, V ꝛc. Funktionen von $(n-2)$, $(n-3)$ ꝛc. Dimensionen, M aber eine Funktion von $n-1$ Dimensionen ist,

$$\frac{S(by+ax)}{M} = C; \frac{T(by+ax)^2}{M} = D; \frac{V(by+ax)^3}{M} = E, \text{ꝛc.: so ist}$$

$$(ay - bx)^2 + A(by + ax) + B + \frac{C}{by + ax} + \frac{D}{(by + ax^2)} + \frac{E}{(by + ax)^3} = 0.$$

Diese Gleichung druckt daher die Natur der krummen Linie aus, deren im Unendlichen gedachter Theil, welchen man erhält, wenn man $by + ax$ unendlich groß annimmt, mit der Curve zusammenfällt, die aus der Gleichung $P + Q + R + S +$ ꝛc. $= 0$ entspringt. Denn ohngeachtet $(ay - bx)^2$ wenn die Curve ins Unendliche übergeht, einen endlichen oder einen unendlichen Werth, aber von einer niedrigen Orduung als ∞^2, erhält, so hat gleichwohl $xy + ax$ einen unendlichen Werth.

§. 183.

Verändert man nun aber die Axe der gefundenen Asymptote, und setzt die Abscissen darauf $\frac{ax + by}{\sqrt{(aa + bb)}} = t$, und die

die Applicate $\frac{ay - bx}{\sqrt{(aa + bb)}} = u$, desgleichen, der Kürze wegen, $\sqrt{(aa + bb)} = g$; so bekommt man

$$uu + \frac{At}{g} + \frac{B}{gg} + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 t^2} + \frac{E}{g^5 t^3} + \text{etc.} = 0.$$

Da also in dem gegenwärtig zu entwickelnden Falle $A = 0$ und $B = 0$ ist, so wird

$$uu + \frac{C}{g^3 t} + \frac{D}{g^4 t^2} + \frac{E}{g^5 t^3} + \text{etc.} = 0.$$

Ist nun C nicht $= 0$, so verschwinden, wenn man $t = \infty$ annimmt, die Glieder $\frac{D}{g^4 t^2} + \frac{E}{g^5 t^3} + \text{etc.}$ gegen $\frac{C}{g^3 t}$, und es wird folglich

$$uu + \frac{C}{g^3 t} = 0.$$

Diese Gleichung druckt daher die Natur der krummen Linie aus, die, wenn man $t = \infty$ setzt, mit der Curve zusammenfällt. Da nun daraus $u = \pm\sqrt{\frac{-C}{g^3 t}}$ ist, so hat die Curve zwey Schenkel, welche sich nach einem und demselben Theile der Axe zu auf beyden Seiten immer mehr und mehr nähern.

§. 184.

Ist überdies $C = 0$, so muß man diese Gleichung $uu + \frac{D}{g^4 t^2} = 0$ nehmen, wo wieder ein dreyfacher Fall statt findet, indem D eine positive, oder eine negative Größe, oder $= 0$ seyn kann. Weil in dem ersten Falle die Gleichung unmöglich wird, so hat darin die Curve keinen ohne Ende fortlaufenden Schenkel, sondern ist ganz in einem endlichen Raume enthalten. Was den zweyten Fall be-

betrifft, wenn $\frac{D}{g^4} = -ff$, weil $uu = \frac{ff}{tt}$ ist; so hat darin die Applicate u, sowohl wenn man $t = + \infty$, als wenn man $t = - \infty$ setzt, einen doppelten verschwindenden Werth, einen positiven und einen negativen, und die Curve daher vier Schenkel, die sich nach beyden Theilen der Axe und zu beyden Seiten derselben immer mehr nähern. Im dritten Falle, oder wenn $D = o$ ist, muß man diese Gleichung $uu + \frac{E}{g^5 t^3} = o$ nehmen, mit der es eben die Bewandniß hat: und so muß man so lange fortgehen, als die Gleichung $P + Q + R + S +$ rc. $= o$ fernere Glieder darbietet.

§. 185.

Angenommen nunmehr, daß das höchste Glied der Gleichung $P + Q + R + S +$ rc. $= o$ drey einfache reelle Faktoren habe: so ist offenbar, daß von jedem dieser drey Faktoren, wenn sie einander ungleich sind, alles das gilt, was oben [§ 171 — 174] von Einem reellen Faktor gelehret worden ist. In diesem Falle hat also die Curve sechs ohne Ende fortlaufende Schenkel zu dreyen geraden Asymptoten. Wenn zwey Faktoren gleich sind, so gilt von dem dritten eben das, was nach dem Vorhergehenden davon behauptet werden muß; was aber die beyden gleichen Faktoren betrifft, so muß man auf sie das vorhin [§ 178 — 185] von zwey gleichen Faktoren Gesagte anwenden. Es bleibt daher nur der dritte Fall zu betrachten übrig, wenn alle drey Faktoren einander gleich sind. Es sey daher $P = (ay + bx)^3 M$. Und da die Gleichung $P + Q + R + S +$ rc. $= o$ im Unendlichen nicht bestehen kann, wofern nicht $(ay - bx)^3$ einen endlichen oder wenigstens einen unendlichen Werth von einer

nie-

niedrigern Ordnung als ∞^3 hat, damit die Potestät des Unendlichen, worin das höchste Glied P übergeht, kleiner werde als ∞^n: so ist allerdings im Unendlichen $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.

§. 186.

Um diesen Fall weiter zu entwickeln, müssen wir das zweyte Glied Q betrachten, und sehen, ob es denselben Faktor $ay - bx$ hat oder nicht. Fehlt dasselbe gänzlich, so findet das erstere statt, indem o einen jeden Faktor zuläßt. Es sey also zuvörderst Q nicht durch $ay - bx$ theilbar. Da nun Q eine Funktion von $n - 1$, und M eine Funktion von $n - 3$ Dimensionen ist, so ist $\frac{Q}{(ax + by)^2 M}$ eine Funktion von keiner Dimension; und es wird daher $\frac{Q}{(ax - by)^2 M}$, wenn man $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ setzt, eine beständige Größe, die wir A nennen wollen, und $(ay - bx)^3 + A(ax + by)^2 = 0$, weil die folgenden Glieder im Unendlichen gegen $A(ax + by)^2$ verschwinden.

§. 187.

Die krumme Linie, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird, ist daher so beschaffen, daß sie, ins Unendliche fortgeführt, mit der krummen Linie, welche durch die Gleichung $P + Q + R + S +$ 2c. $= 0$ ausgedruckt wird, zusammenfällt. Um sie aber genauer kennen zu lernen, wollen wir für sie eine andere Axe annehmen, worauf die Absciſſe $t = \frac{ax + by}{g}$, und die Applicate $u = \frac{ay - bx}{g}$ für $\sqrt{(aa + bb)} = g$ seyn soll. Alsdann ist $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$, und

und diese Gleichung giebt, wenn man darin $t = \infty$ setzt, den Theil der gesuchten Curve $P + Q + R +$ rc. $= 0$ im Unendlichen. Wenn daher die Gestalt der Curve $u^3 + \frac{Att}{g} = 0$ bekannt ist, so ist auch die Gestalt des Theils der Curve $P + Q + R +$ rc. $= 0$ im Unendlichen bekannt. In dem folgenden Capitel aber wollen wir diese krummlinigen Asymptoten besonders betrachten.

§. 188.

Wenn das zweyte Glied Q den Faktor $ay - bx$ hat, so ist es dabey entweder auch durch $(ay - bx)^2$ theilbar oder nicht. Es sey zuvörderst nicht durch $(ay - bx)^2$ theilbar. Hier nehme man die Funktion von keiner Dimension $\frac{Q}{(ay - bx)(ax + by)M}$, so daß dieselbe, wenn man $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ setzt, die beständige Größe A gebe; wo dann

$$(ay - bx)^3 + A(ay - bx)(ax + by) + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + \text{rc.} = 0$$

seyn wird. Hier ist nun $\frac{R}{M}$, wenn man $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$ setzt, entweder $B(ay - bx)$ oder $B(ax + by)$, je nachdem R entweder durch $ay - bx$ theilbar ist oder nicht; dagegen ist $\frac{S}{M}$ eine beständige Größe C. Wenn man daher diese Gleichung in eine andere zwischen den Coordinaten t und u für eine andere Axe, so wie vorhin, verwandelt, so ist entweder

$$u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} + \frac{C}{g^3} = 0 \text{ oder}$$

$$u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0.$$

Da indeß bloß der Fall hieher gehört, in welchem $t = \infty$, so so verschwinden die letzten Glieder dieser Gleichungen. Es ist also in dem ersten Falle

$$u^3 + \frac{Atu}{g} + \frac{Bu}{gg} = o,$$

welche Gleichung eine doppelte Asymptote, nemlich einmal $u = o$, und zweytens $uu + \frac{At}{g} = o$ giebt, wovon jene eine gerade Linie, diese hingegen eine Parabel ist. Auch in dem letzten Falle hat u, wenn $t = \infty$ ist, entweder einen endlichen Werth, so daß, weil das Endliche gegen das Unendliche verschwindet, $\frac{Atu}{g} + \frac{Bt}{g^2} = o$, und $u = \frac{-B}{Ag}$ für die gerade Linie ist. Oder es kann auch u einen unendlichen Werth haben, und dann entsteht wegen des Verschwindens des letzten Gliedes $u^2 + \frac{At}{g} = o$ für die Parabel. Es ergiebt sich daher in beyden Fällen eine doppelte Asymptote, wovon die eine eine gerade Linie und die andere eine Parabel ist, daher man diese Fälle auch nicht weiter von einander zu unterscheiden nöthig hat.

§. 189.

Nun sey Q auch durch $(ay - bx)^2$ theilbar, so erhält man, je nachdem R durch $(ay - bx)$ theilbar oder nicht theilbar ist, durch eben die Operationen, die vorhin angestellt wurden, zwischen t und u diese Gleichungen: entweder

$$u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = o, \text{ oder}$$

$$u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = o.$$

Die

Die erste Gleichung ist eine Gleichung für drey gerade einander parallele Linien, wenn alle drey Wurzeln derselben reell sind; oder für eine einzige geradlinige Asymptote, wenn zwey von diesen Wurzen imaginär sind. Hieraus entstehen aber wieder verschiedene Fälle, je nachdem von jenen drey parallelen Asymptoten entweder zwey oder alle drey zusammenfallen. Die letzte Gleichung $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bt}{g^2} = 0$ aber kann für $t = \infty$ nur alsdann statt finden, wenn $u = \infty$ ist, so daß das Glied $\frac{Au^2}{g}$ gegen das erste u^3 verschwindet, und also $u^3 + \frac{Bt}{g^2} = 0$ wird, welches eine Gleichung für eine krummlinige Asymptote der dritten Ordnung ist.

§. 190.

Wenn aber $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$ ist: so muß man die folgenden Glieder der Gleichung $P + Q + R + S +$ 2c. $= 0$ zu Hülfe nehmen, wodurch man die Gleichung

$$u^3 + \frac{D}{g^4 t} + \frac{E}{g^5 t^2} + \frac{F}{g^6 t^3} + \text{2c.} = 0$$

erhält. Ist nun darin nicht $D = 0$, so verschwinden alle Glieder vom dritten an, so daß also $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$ ist. Ist aber auch $D = 0$, so wird $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$; und ist auch $E = 0$, so ist $u^3 + \frac{F}{g^6 t^3} = 0$, 2c. Alle diese Gleichungen sind Gleichungen für krumme Linien, welche für $t = \infty$ mit der durch $P + Q + R + S +$ 2c. $= 0$ ausgedruckten Curve zusammenfallen. Da in jeder u^3, eine Potestät mit einem ungeraden Exponenten, vorkommt, so sind sie alle reell, und zeigen folglich an, daß es ohne Ende fortlaufende Schenkel gebe. Es ist indeß für diese Fälle auch die durch die Gleichung $u = 0$ ausgedruckte gerade Linie eine Asymptote, weil sie die Asymptote der Curven $u^3 + \frac{D}{g^4 t} = 0$; $u^3 + \frac{E}{g^5 t^2} = 0$, rc. ist.

§. 191.

Da also die Schenkel der Curven, die sich einer geradlinigen Asymptote nähern, so sehr von einander verschieden seyn können, so ist es von Wichtigkeit, diese Verschiedenheit genauer zu betrachten; und dies wird geschehen, wenn man die einfachste krumme Linie zu bestimmen sucht, welche, auf eben dieselbe geradlinige Asymptote bezogen, mit der gegebenen Curve zusammenfällt. So erhellet, obgleich die Gleichung $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$, wenn sie lauter reelle Wurzeln hat, drey geradlinige einander parallele Asymptoten anzeigt, [§ 189], doch noch nicht, ob die Schenkel der Curve im Unendlichen hyperbolisch, das heißt, in der Gleichung $u = \frac{C}{t}$, oder von einer andern Art, z. B. in der Gleichung $u = \frac{C}{tt}$, oder $u = \frac{C}{t^3}$, rc. enthalten sind. Um dieses zu erkennen muß man das zunächst folgende Glied, nemlich $\frac{D}{g^4 t}$, oder wenn dieses fehlt, $\frac{E}{g^5 t^2}$, oder wenn auch dieses mangelt, $\frac{F}{g^6 t^3}$ nehmen. Wir wollen, um diesen Gegenstand allgemein zu behandeln, das folgende Glied $= \frac{K}{t^k}$ setzen, wo denn aus der Natur der Gleichung P +

$Q + R + S +$ ꝛc. $= 0$, die n Dimensionen hat, erhellet, daß k nicht größer seyn kann als $n - 3$. Läßt man nun die Wurzeln der Gleichung $u^3 + \frac{Au^2}{g} + \frac{Bu}{g^2} + \frac{C}{g^3} = 0$ diese seyn, $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma)$, so ist $(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) - \frac{K}{t^k} = 0$. Ferner sey $u - \alpha = \frac{J}{t^\mu}$, eine Gleichung, welche die Natur der einen Asymptote ausdruckt; so ist $\frac{J}{t^\mu}(\alpha - \beta + \frac{J}{t^\mu})(\alpha - \gamma + \frac{J}{t^\mu} = \frac{K}{t^k}$; und wenn man $t = \infty$ setzt, so wird $\frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) J}{t^\mu} = \frac{K}{t^k}$.

§. 192.

Diese Gleichung findet statt, wenn die Wurzel α den beyden übrigen Wurzeln β und γ ungleich ist, und in diesem Falle wird $J = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}$ und $\mu = k$; daher denn die Wurzel $u = \alpha$ die krummlinige Asymptote $u - \alpha = \frac{K}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) t^k}$ giebt. Sind daher alle Wurzeln einander ungleich, so giebt eine jede eine solche Asymptote. Wenn aber zwey Wurzeln einander gleich sind, oder $\beta = \alpha$ ist, so fallen zwey Asymptoten in eine zusammen, und es ist alsdann $\frac{J^2(\alpha - \gamma)}{t^{2\mu}} = \frac{K}{t^k}$, woraus $J^2 = \frac{K}{\alpha - \gamma}$, und $2\mu = k$ wird. Es wird daher die Natur dieser doppelten Asymptote durch die Gleichung $(u - \alpha)^2 = \frac{K}{(\alpha - \gamma) t^k}$ ausgedruckt. Sind endlich alle drey Wurzeln einander gleich, so daß daher alle drey Asymptoten in eine zusammenfallen, so wird die Natur dieser Asymptote durch die Gleichung $(u-\alpha)^3 = \frac{K}{t^k}$ ausgedruckt.

§. 193.

Wenn das höchste Glied der Gleichung $P + Q + R +$ $S +$ rc. $= 0$ vier einfache reelle Faktoren hat, so läßt sich die Natur der ohne Ende fortlaufenden Schenkel nebst den Asymptoten, sowohl wenn die gedachten Faktoren alle einander ungleich, als wenn dieselben paarweise gleich, oder auch, wenn davon drey einander gleich sind, aus dem Vorhergehenden beurtheilen. Bloß der einzige Fall, wenn alle Wurzeln einander gleich sind, bedarf einer weitern Betrachtung. Es sey daher $P = (ay - bx)^4 M$, so daß M eine Funktion von $n-4$ Dimensionen ist. Setzt man nun in den Funktionen von keiner Dimension, so wie oben, [§. 175] $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$, um daraus beständige Größen zu erhalten, und nimmt man überdem bey veränderter Axe [§. 183] $t = \frac{ax + by}{g}$, und $u = \frac{ay - bx}{g}$, so daß $g = \sqrt{(aa + bb)}$ ist: so erhält man für die Asymptoten folgende Gleichungen zwischen den Coordinaten t und u. Zuvörderst $u^4 + \frac{At^3}{g} = 0$ wenn sich Q nicht durch $ay - bx$ theilen läßt.

§. 194.

Ist hiernächst Q zwar durch $ay - bx$, aber nicht durch $(ay - bx)^2$ theilbar, so bekommt man $u^4 + \frac{Attu}{g} + \frac{Btt}{gg} = 0$, worin, für $t = \infty$, die Applicate u entweder eine endliche oder eine unendliche Größe seyn kann; und hieraus er-

ergiebt sich eine doppelte Asymptote, nemlich eine gerad-linige $u + \frac{B}{gA} = o$, und eine krummlinige, $u^3 + \frac{Att}{g} = o$. Was die geradlinige betrifft, so nehme man, um sie genauer kennen zu lernen, das folgende Glied $\frac{K}{t^k}$. Dann findet man $u + \frac{B}{gA} + \frac{gK}{At^{k+2}} = o$, und dies ist die Gleichung für die Curve, wovon der Theil, der zu der Abscisse $t = \infty$ gehört, mit der gesuchten Curve zusammenfällt.

§. 195.

Es sey nunmehr Q durch $(ay - bx)^2$, aber nicht durch $(ay - bx)^3$ theilbar. Hier muß man sehen, ob R durch $ay - bx$ theilbar ist, oder nicht. Im ersten Falle ergiebt sich die Gleichung

$$u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btu}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = o;$$

im letzten aber diese,

$$u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{gg} + \frac{Ct}{g^3} = o.$$

Die erste Gleichung giebt zwey andere Gleichungen, je nachdem u endlich oder unendlich ist, und zerfällt daher in $uu + \frac{Bu}{gA} + \frac{C}{ggA} = o$, und $u^2 + \frac{At}{g} = o$. Die erste dieser beyden Gleichungen führt auf zwey gerade parallele Linien, wenn sie zwey reelle und ungleiche Wurzeln hat; wenn aber ihre Wurzeln imaginär sind, so ist dies ein Kennzeichen, daß es keinen ohne Ende fortlaufenden Schenkel giebt: die andere Gleichung $u^2 + \frac{At}{g} = o$ hingegen giebt eine parabolische Asymptote. Was die Gleichung

$u^4 + \frac{Atu^2}{g} + \frac{Btt}{g^2} = 0$ betrifft, so enthält dieselbe, wei[l] $\frac{Ct}{g^3}$ gegen $\frac{Btt}{gg}$, wenn $t = \infty$ wird, verschwindet, zwe[y] Gleichungen von der Form $uu + \alpha t = 0$, und es entsteh[en] daher zwey parabolische Asymptoten, wenn A^2 größer al[s] $4B$ ist, die aber in eine zusammenfallen, wenn $A^2 = 4[B]$ wird, und imaginär werden, wenn A^2 kleiner als $4B$ i[st], in welchem Falle also kein ohne Ende fortlaufender Sche[n]kel statt findet.

§. 196.

Ist endlich Q durch $(ay - bx)^3$ theilbar, so erhäl[t] man, je nachdem R und S durch $ay - bx$ theilbar oder nicht theilbar sind, folgende Gleichungen:

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Cu}{g^3} + \frac{D}{g^4} = 0$$

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Bu^2}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{But}{g^2} + \frac{Ct}{g^3} = 0$$

$$u^4 + \frac{Au^3}{g} + \frac{Btt}{g^2} = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen ist eine Gleichung für vier ge[-]rade einander parallele Linien, wenn alle ihre Wurzeln reell und einander ungleich sind; sind aber darunter gleiche, so fallen zwey oder mehrere von diesen geraden Linien in eine zusammen; und sind imaginäre Wurzeln darunter, so heben dieselben entweder zwey von ihnen, oder alle auf. In der zweyten Gleichung muß, wegen $t = \infty$, die Ap[-]plicate u nothwendig unendlich seyn, und dann geht sie in diese über $u^4 + \frac{Ct}{g^3} = 0$, welche auf eine krummlinige Asym[-]

ptote

ptote von der vierten Ordnung führt. Aus der dritten Gleichung kann sie den endlichen Werth haben $u + \frac{C}{gB} = o$; außerdem steckt aber darin auch die Gleichung $u^3 + \frac{Bt}{gg} = o$, welche eine krummlinige Asymptote von der dritten Ordnung zu erkennen giebt. Endlich verwandelt sich die vierte Gleichung, da $u = \infty$ wird, wenn $t = \infty$ ist, in $u^4 + \frac{Btt}{gg} = o$. Diese Gleichung ist unmöglich, wenn B eine positive Größe ist; ist aber B eine negative Größe, so zeigt sie zwey einander am Scheitel entgegenstehende Parabeln an, die, ins Unendliche fortgeführt, mit der Curve zusammenfallen.

§. 197.

Hieraus erhellet schon, wie man weiter fortgehen kann, wenn noch mehr einfache Faktoren des höchsten Gliedes P einander gleich sind. Denn was die ungleichen Faktoren betrifft, so kann ein jeder von ihnen besonders betrachtet, und so die aus ihm entspringende Asymptote bestimmt werden. Wenn aber zwey Faktoren einander gleich sind, so lehrt der 178ste und die folgenden §§ die Natur der Curve finden. Zu eben dieser Absicht dienen, wenn drey Faktoren einander gleich sind, § 185 und die folgenden. Den Fall endlich, wo vier Faktoren einander gleich sind, haben wir so eben betrachtet, und auf ähnliche Art kann, wenn mehrere gleiche Faktoren vorkommen, gehandelt werden. Uebrigens erhellet hieraus die große Mannigfaltigkeit und Verschiedenheit unter den krummen Linien, selbst wenn man bloß auf die ohne Ende fortlaufende Schenkel sieht; denn die Verschiedenheit, die statt findet, wenn die Curven in dem endlichen Raume betrachtet werden, haben wir noch gar nicht berührt.