Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Fünftes Capitel. Von den Linien der zweyten Ordnung.

Fünftes Capitel.

Von den Linien der zweyten Ordnung.

§. 85.

Da die erste Ordnung der Linien bloß die gerade Lin in sich faßt, und die Natur dieser Linie schon aus der El mentar-Geometrie hinlänglich bekannt ist, so wollen w nun die Linien der zweyten Ordnung genauer betrachte weil diese Linien unter den Curven die einfachsten sind, u durch die ganze höhere Geometrie den größten Nutzen g währen. Es zeichnen sich aber diese Linien, die man au Kegel-Schnitte nennt, durch eine Menge sehr merkwü diger Eigenschaften aus, die schon den Alten nicht unb kannt waren, von den Neuern aber sehr vermehrt worde sind. Die Kenntniß dieser Eigenschaften ist eine so wichti Sache, daß viele die Erklärung derselben sogleich na der Elementar-Geometrie folgen lassen. Da sie indeß nic alle aus einerley Quelle fließen, sondern einige sich aus d Gleichung ergeben, andere sich finden lassen, wenn ma jene Linien als Schnitte eines Kegels betrachtet, und no andere wieder auf andern Wegen entdeckt werden, so wol len wir hier nur diejenigen Eigenschaften betrachten, di man mit Beyseitsetzung der übrigen Hülfsmittel bloß au der Gleichung zu finden im Stande ist.

§. 86.

§. 86.

Wir betrachten also die allgemeine Gleichung der Linien der zweyten Ordnung, nemlich

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta yy,$$

von der wir schon gezeigt haben [§. 54] daß sie, und zwar bey jedem Applicaten-Winkel, alle Linien der zweyten Ordnung in sich fasse. Giebt man derselben folgende Form,

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)y}{\zeta} + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$$

so erhellet daraus, daß zu jeder Abscisse x entweder zwey oder gar keine Applicaten y gehören, je nachdem die beyden Wurzeln von y entweder reell oder imaginär sind. Ist $\zeta = 0$ so kommt zwar jeder Abscisse nicht mehr als eine Applicate zu, aber weil alsdann die andere unendlich wird, so kann dieser Fall unsere Untersuchung nicht stören.

§. 87.

Wenn beyde Werthe von y reell sind, und dies findet statt, wenn die Applicate PMN, Fig. 19, die Curve in zwey Punkten M und N schneidet, so ist die Summe der beyden Wurzeln

$$PM + PN = -\frac{\varepsilon x - \gamma}{\zeta} = \frac{-\varepsilon . AP - \gamma}{\zeta}$$

vorausgesetzt, daß die gerade Linie AEF die Axe, A der Anfangspunkt der Abscissen, und APN der Winkel ist, unter welchem die Applicaten die Axe schneiden. Zieht man also unter eben dem Winkel eine andere Applicate npm, deren Werth pm negativ ist, so ist aus eben dem Grunde

$$pn - pm = \frac{-\varepsilon . Ap - \gamma}{\zeta}.$$

und

und die Differenz zwischen dieser und der vorhergehend Gleichung also

$$PM + pm + PN - pn = \frac{\varepsilon(Ap - AP)}{\zeta} = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}$$

Wenn man daher aus m und n nach der ersten Applica PMN gerade, der Axe parallele, Linien zieht, welche die PM in den Punkten μ und ν betreffen, so ist

$$M\mu + N\nu = \frac{\varepsilon . Pp}{\zeta}, \text{ oder}$$

$$M\mu + N\nu : Pp \text{ (oder } m\mu \text{ oder } n\nu) = \varepsilon : \zeta$$

Es bleibt nemlich dieses Verhältniß stets dasselbe, man m die Linien MN und mn in der Curve ziehen, wo man wi wenn sie nur die Axe unter dem angenommenen Applicat Winkel schneiden, und die geraden Linien $n\nu$ und $m\mu$ d Axe parallel gezogen werden.

§. 88.

Wenn Fig. 20. die Applicate PMN so weit fortgerü wird, bis die Punkte M und N zusammenfallen, so berüh die Applicate die Curve; denn wenn die beyden Dur schnittspunkte zusammenfallen, so verwandelt sich die A plicate, welche sonst die Curve schneidet, in eine Tangent Es sey KCI eine solche Tangente, und ihr parallel seye in beliebiger Anzahl gerade Linien MN, mn, welche d Curve auf beyden Seiten begegnen, so wie aus den Pun ten M, N, m und n nach der Tangente die geraden Lini MI, NK, und mi, nk der vorhin angenommenen Axe pa rallel gezogen. Da hier CK, ck auf die entgegenstehend Seite des Punktes C fallen, so muß man sie negativ neh men, und es ist demnach

$$CI - CK : MI = \varepsilon : \zeta, \text{ und}$$

$$Ci - Ck : mi = \varepsilon : \zeta; \text{ folglich}$$

$CI - CK : MI = Ci - Ck : mi$, oder
$MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$.

§. 89.

Da die Lage der Axe in Rücksicht auf die Curve willkührlich ist, so wird allemal, wie man auch die Linien MI, NK, mi, nk zieht, wofern sie nur einander parallel bleiben, $MI : mi = CI - CK : Ci - Ck$ seyn. Zieht man daher die Linien MI und NK so, daß $CI = CK$ wird, oder der CL, welche, aus dem Berührungspunkte C gezogen, die Ordinate MN in L in zwey gleiche Theile theilt, parallel: so wird $CI - CK = o$, und folglich auch $Ci - Ck = \frac{mi}{MI}(CI - CK) = o$. Verlängert man also CL bis in l, so wird, weil auch mi und nk der CL parallel sind, $ml = Ci$, und $nl = Ck$, und folglich $ml = nl$. Wenn daher eine durch den Berührungspunkt C gezogene gerade Linie CLl eine der Tangente parallele Ordinate MN halbiret, so halbiret dieselbe auch alle übrige dieser Tangente parallele Ordinaten mn.

§. 90.

Da die Linie CLl, Fig. 20, alle der Tangente ICK parallele Ordinaten in zwey gleiche Theile theilt, so pflegt man sie einen Durchmesser der Linie der zweyten Ordnung oder des Kegelschnitts zu nennen. Es lassen sich daher in jeder Linie der zweyten Ordnung unzählige Durchmesser ziehen, weil es für einen jeden Punkt dieser Linie eine Tangente giebt. Die Tangente ICK mag nemlich gegeben seyn, wo sie will, so wird allemal, wenn man MN der ICK parallel zieht und in L halbiret, die gerade Linie CL alle der IK parallele Ordinaten in zwey gleiche Theile theilen, und folglich ein Durchmesser der Linie der zweyte Ordnung seyn.

§. 91.

Hieraus folgt auch, daß die gerade Linie LI, welch irgend zwey einander parallele Ordinaten MN und mn i zwey gleiche Theile theilt, ebenfalls alle übrige der M und mn parallele Ordinaten in zwey gleiche Theile theil werde; indem es irgendwo eine der MN und mn parall Tangente IK, und folglich einen Durchmesser geben mu Hieraus läßt sich eine andere Methode ableiten, in ein gegebenen Linie der zweyten Ordnung unzählige Durchme ser zu finden. Zieht man nemlich nach Belieben zwey ei ander parallele Ordinaten oder Sehnen MN und mn, un halbiret dieselben in L und l: so halbiret die durch L un gelegte gerade Linie auch alle übrige der MN und mn pa rallele Ordinaten, und ist folglich ein Durchmesser. Wen dabey der Durchmesser, verlängert, die Curve in C trifft, berührt die durch C den Ordinaten parallel gezogene gera Linie IK die Curve in dem Punkte C.

§. 92.

Zu diesen Eigenschaften hat uns die Betrachtung de Summe der beyden Wurzeln von y in der Gleichung

$$yy + \frac{(\epsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0$$

geführt. Man weiß aber aus dieser Gleichung auch, da das Produkt beyder Wurzeln PM . PN (Fig 19) = $\frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta}$ ist, und dieser Ausdruck $\frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta}$ hat entweder zwey reelle Wurzeln oder nicht. Jenes findet statt, wenn die Curve von der Axe in zwey Punkten E und F

ge-

geschnitten wird. Denn weil alsdann $y = o$ wird, so ist dann auch $\frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = o$: und es sind demnach AE und AF die Wurzeln von x. Hieraus fließt [nach Th. I. Cap. 2. §. 29.]

$$\frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = \frac{\delta}{\zeta}(x - AE)(x - AF) = \frac{\delta}{\zeta}.PE.PF$$

weil $x = AP$ ist; und man hat folglich allezeit

$$PM.PN = \frac{\delta}{\zeta}.PE.PF, \text{ oder}$$

$$PM.PN : PE.PF = \delta : \zeta,$$

die Applicate PMN mag gezogen werden, wo man will, wofern nur der Winkel NPF dem angenommenen Applicaten-Winkel gleich ist. Zieht man also die Applicate mn, so ist, da Ep und pm negativ sind,

$$pm.pn = \frac{\delta}{\zeta}.pE.pF$$

§. 93.

Schneidet also, Fig. 21. eine gerade Linie PEF eine Linie der zweyten Ordnung in den Punkten E und F, und werden auf dieselbe in beliebiger Anzahl einander parallele Ordinaten NMP, npm gezogen, so ist allemal

$$PM.PN : PE.PF = pm.pn : pE.pF = \delta : \zeta$$

Und da die Lage der Axe willkührlich ist, so ist auf ähnliche Art, wenn man PMN die Axe seyn läßt, und eqf der PEF parallel zieht,

$$PM.PN : PE.PF = qM.qN : qe.qf = pm.pn : pE.pF$$

und folglich

$$qe.qf : pE.pF = qM.qN : pm.pn$$

Wenn also zwey einander parallele Ordinaten ef und EF gegeben sind, und zwey andere unter sich parallele Ordinaten MN und mn so gezogen werden, daß sie jene in den Punkten P, p, q und r schneiden: so ist allezeit

$$PM.PN : PE.PF = pm.pn : pE.pF = qM.qN : qe.qf$$
$$= rm.rn : re.rf$$

und dies ist die zweyte Haupteigenschaft der Linien der zweyten Ordnung.

§. 94.

Wenn die beyden Punkte M und N zusammenfallen, so berührt die Linie PMN die Curve in dem Punkte, wo solches geschiehet, und es verwandelt sich alsdann das Rechteck PM . PN in das Quadrat von PM oder PN. Hieraus läßt sich eine neue Eigenschaft der Tangenten ableiten. Berührt nemlich, Fig. 24, die Linie CPp die Linie der zweyten Ordnung in dem Punkte C, und zieht man in beliebiger Anzahl unter einander parallele Linien PMN, pmn unter einem und demselben Winkel auf die Tangente CPp: so ist nach der eben angeführten Behauptung

$$PC^2 : PM.PN = pC^2 : pm.pn,$$ d. h.

wenn eine Ordinate MN die Tangente unter einem gegebenen Winkel trifft, so hat allezeit das Quadrat CP^2 zu dem Rechtecke PM . PN ein beständiges Verhältniß.

§. 95.

Hieraus folgt auch, daß, wenn, Fig. 20, ein Durchmesser CD einer Linie der zweyten Ordnung, der alle unter einander parallele Ordinaten MN, mn in zwey gleiche Theile theilt, der Curve in den Punkten C und D begegnet,

$$CL.LD : LM.LN = Cl.lD : lm.ln$$

ist. Da aber $LM = LN$ und $lm = ln$, so wird hieraus

$$LM^2 : lm^2 = CL.LD : Cl.lD$$

d. h. das Quadrat der halben Ordinate LM hat zu dem

Recht-

Rechtecke CL . LD ein beständiges Verhältniß. Nimmt man daher den Durchmesser CD zur Axe, und die halben Ordinaten LM zu den Applicaten an: so ergiebt sich hieraus eine Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung. Setzt man nemlich den Durchmesser $CD = a$, die Abcisse $CL = x$, und die Applicate $LM = y$, so steht, weil dann $LD = a - x$ wird, y^2 mit $ax - xx$ in einem beständigen Verhältnisse. Druckt man dasselbe durch $h : k$ aus, so erhält man für die Linien der zweyten Ordnung die Gleichung:

$$yy = \frac{h}{k}(ax - xx).$$

§. 96.

Betrachtet man die beyden gefundenen Eigenschaften in Verbindung mit einander, so gelangt man dadurch zur Entdeckung anderer Eigenschaften. Es seyen, Fig. 22, in einer Linie der zweyten Ordnung zwey einander parallele Ordinaten AB und CD gezogen, und darauf das Viereck ACDB ergänzt worden. Zieht man nunmehr aus einem beliebigen Punkte der Curve M die Ordinate MN mit AB und CD parallel, welche folglich die geraden Linien AC und BD in den Punkten P und Q schneiden wird: so sind die Theile derselben PM und QN einander gleich. Es theilt nemlich [nach §. 91] die gerade Linie, welche die Ordinaten AB und CD halbirt, auch die Ordinate MN in zwey gleiche Theile, und eben das muß sie nach der Elementar-Geometrie mit dem Stücke PQ thun. Da also die Linien MN und PQ in einem und demselben Punkte halbiret werden, so muß

$$MP = NQ, \text{ und } MQ = NP$$

seyn. Kennt man daher außer den vier Punkten A, B, C, D einer Linie der zweyten Ordnung noch einen fünften M, so findet man daraus den sechsten N, wenn man $NQ = MP$ macht.

§. 97.

Da also MQ.QN zu BQ.DQ ein beständiges Verhältniß hat, so muß auch, da QN = MP ist, MP.MQ zu BQ.DQ ein beständiges Verhältniß haben. Zieht man nemlich durch einen andern Punkt der Curve c die gerade Linie GcH den Linien AB und CD parallel, und so weit verlängert, bis sie den Seiten AC und BD in G und H begegnet: so hat auch cG.cH zu BH.DH eben dasselbe beständige Verhältniß, und es ist folglich

cG.cH : BH.DH = MP.MQ : BQ.DQ

Wenn aber durch M der Grundlinie BD parallel die Linie RMS gelegt wird, welche den parallelen Ordinaten AB und CD in R und S begegnet: so ist auch, das BQ = MR und DQ = MS, das Verhältniß MP.MQ : MR.MS ein beständiges Verhältniß. Wenn also durch irgend einen Punkt der Curve M zwey gerade Linien gezogen werden, davon die eine MPQ den gegenüberstehenden Seiten AB und CD, die andere RMS aber der Grundlinie BD parallel ist, so sind die Durchschnittspunkte P, Q, R und S so beschaffen, daß MP.MQ zu MR.MS ein beständiges Verhältniß hat.

§. 98.

Wenn anstatt der Ordinate CD, die der AB parallel war, irgend eine andere Ordinate Dc genommen, und die Sehne Ac gezogen wird, so daß die den Seiten AB und BD parallelen Linien MQ und RMS die Seiten des Vierecks ABDc in den Punkten p, Q, R und s schneiden: so findet eine ähnliche Eigenschaft statt. Denn einmal ist

MP.MQ : BQ.DQ = cG.cH : BH.DH, oder

MP.MQ : MR.MS = cG.cH : BH.DH,

weil RS der BD parallel und gleich ist. Ferner hat man, da

$\Delta APp \backsim \Delta AGc$, und $\Delta DGs \backsim \Delta cHD$ ist,

$Pp : AP = Gc : AG$, oder, da $AP : AG = BQ : BH$,

$Pp : BQ (MR) = Gc : BH$, und

$DS (MQ : Ss = cH : DH$. Hieraus fließt

$MQ . Pp : MR . Ss = cG . cH : BH . DH$,

so wie sich aus der Verbindung dieser Proportion mit der vorhergehenden

$MP . MQ : MR . MS = MQ . Pp : MR . Ss$

und aus dieser durch Addition der vorhergehenden und nachfolgenden Glieder

$MP . MQ : MR . MS = Mp . MQ : MR . Ms$

ergiebt. Man mag also in der Curve die Punkte c und M annehmen wo man will, so ist das Verhältniß $Mp . MQ : MR . Ms$ allemal dasselbe, wofern nur die Linien MQ und Rs durch M mit den Sehnen AB und BD parallel gezogen werden. Nun fließt aber aus der letzten Proportion folgende:

$$MP : MS = Mp : Ms;$$

und da also, wenn man den Punkt c verändert, bloß die Punkte p und s verändert werden, so bleibt bey aller Veränderung die man mit c vornehmen mag, wenn M unverändert beybehalten wird, das Verhältniß $Mp : Ms$ stets ein und eben dasselbe.

§. 99.

Sind in einer Linie der zweyten Ordnung, Fig. 23, vier Punkte A, B, C und D gegeben, und die Linien AB, BD, DC und CA gezogen, so daß ABCD ein in der Curve beschriebenes Viereck ist: so findet man durch das Vorhergehende die allgemeinste Eigenschaft der Kegelschnitte. Zieht man nemlich aus irgend einem Punkte der Curve M nach den Seiten des in ihr beschriebenen Trapeziums unter gegebenen Winkeln die Linien MP, MQ, MR und MS, so sind allezeit die Rechtecke zwischen je zweyen dieser Linien, d nach gegenüberstehenden Seiten gezogen sind, in einem g gebenen Verhältnisse; oder es ist das Verhältniß MP.MQ MR.MS stets eben dasselbe und gegeben, man mag d Punkt M annehmen wo man will, wofern man nur d Winkel bey P, Q, R und S dieselben bleiben läßt. Um si hiervon zu überzeugen, ziehe man durch M die Linie M der AB, und die Linie rs der BD parallel, und bezeich die Punkte, in welchen diese Linien die Seiten des Trap zium schneiden, durch die Buchstaben p, q, r und Alsdann ist nach dem Vorhergehenden Mp.Mq zu Mr.M in einem gegebenen Verhältnisse. Da ferner alle Wink gegeben sind, so sind auch die Verhältnisse MP : Mp MQ : Mq, MR : Mr, und MS : Ms gegeben. Hierau fließt, daß auch MP . MQ zu MR . MS ein gegebenes Ve hältniß hat.

§. 100.

Wir haben oben [§. 94] gesehen, daß, wenn, Fig. 2 parallele Ordinaten, MN, mn verlängert werden, bis s einer Tangente CPp in P und p begegnen, PM.PN : CP $=$ pm . pn : Cp^2 ist. Nimmt man daher die Punkte L und l so, daß PL die mittlere Proportional-Linie zwische PM und PN, und pl die mittlere Proportional-Linie zwi schen pm und pn wird: so ist PL^2 : CP^2 $=$ pl^2 : Cp^2 und folglich PL : CP $=$ pl : Cp; woraus erhellet, da alle Punkte L, l in einer geraden Linie liegen, die durc den Berührungspunkt C geht. Wenn daher eine Applicat PMN so in L geschnitten wird, daß PL^2 $=$ PM . PN ist, so theilt die gerade Linie CLD, welche durch die Punkt C und L gezogen wird, auch alle übrige Applicaten so in l, daß pl die mittlere Proportional-Linie zwischen pm und pn

ist.

ist. Und wenn zwey Applicaten PN und pn so in L und l geschnitten werden, daß $PL^2 = PM \cdot PN$, und $pl^2 = pm \cdot pn$ ist, so geht die gerade Linie Ll verlängert durch den Berührungspunkt C, und schneidet alle übrige Applicaten, die der PMN und pmn parallel sind, in eben dem Verhältnisse.

§. 101.

Nachdem wir diese Eigenschaften der Linien der zweyten Ordnung, die aus ihrer Gleichung unmittelbar fließen, kennen gelernt haben, so wollen wir uns zur Untersuchung solcher Eigenschaften dieser Curven wenden, deren Entdeckung etwas mehr Nachdenken erfordert. Ist also die allgemeine Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung,

$$yy + \frac{(\varepsilon x + \gamma)}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0,$$

gegeben, nach welcher zu jeder Absciſſe $AP = x$ (Fig. 25) eine doppelte Applicate y, nemlich PM und PN, gehört: so läßt sich die Lage des Durchmessers, der alle Ordinaten MN in zwey gleiche Theile theilt, bestimmen. Es sey IG dieser Durchmesser, der folglich die Ordinate MN in dem Halbirungs Punkte L schneiden, und diesen Punkt mit der MN gemein haben wird. Man setze $PL = z$, so ist, da $z = \frac{1}{2} PM + \frac{1}{2} PN$ ist, $z = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{2\zeta}$, oder

$$2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0;$$

und durch diese Gleichung wird die Lage des Durchmessers bestimmt.

§. 102.

Auch läßt sich daraus ferner die Länge des Durchmessers IG (Fig. 25) finden, wodurch man die beyden Stellen der

Curve kennen lernt, wo die Punkte M und N zusamm-fallen, oder wo $PM = PN$ wird. Es ist nemlich aus d[er] gegebenen Gleichung [§. 87 und 92]

$$PM + PN = \frac{-\varepsilon x - \gamma}{\zeta}, \text{ und } PM \cdot PN = \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta}$$

und folglich, [wenn $PM = PN$ ist,]

$$(PM - PN)^2 = (PM + PN)^2 - 4PM \cdot PN =$$
$$\frac{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)xx + 2(\varepsilon\gamma - 2\beta\zeta)x + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{\zeta\zeta} = 0$$

oder

$$xx - \frac{2(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}x + \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta} = 0:$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind AK und AH, so da[ß]

$$AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\varepsilon\gamma}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}, \text{ und}$$

$$AK \cdot AH = \frac{\gamma\gamma - 4\alpha\zeta}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$$

wird. Hieraus fließt

$$(AH - AK)^2 = KH^2 =$$
$$\frac{4(2\beta\zeta - \varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}{(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)^2}$$

und dabey ist

$$IG^2 = \frac{\varepsilon\varepsilon + 4\zeta\zeta}{4\zeta\zeta}KH^2$$

indem die Applicaten auf der Axe senkrecht angenommen werden.

§. 103.

Es seyen die Applicaten, die wir bisher betrachtet haben, auf der Axe AH (Fig. 25) senkrecht, und daraus nunmehr eine Gleichung für schiefwinklige Applicaten zu finden. Man ziehe aus einem Punkte der Curve M die Applicate

Mp unter dem Winkel MpH schief auf die Axe, und setze sin. MpH $= \mu$, und cos. MpH $= \nu$. Ferner sey die neue Abscisse Ap $= t$, und die Applicate pM $= u$. Alsdann ist

$$\frac{y}{u} = \mu, \text{ und } \frac{Pp}{u} = \nu, \text{ und folglich}$$

$$y = \mu u, \text{ und } x = t + \nu u.$$

Setzt man aber diese Werthe in die zwischen x und y gegebene Gleichung, $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$, so wird

$$\begin{aligned} 0 = \alpha + \beta t + \nu\beta u + \delta tt + 2\nu\delta tu &+ \nu\nu\delta uu \\ + \mu\gamma u \quad + \mu\varepsilon tu &+ \mu\nu\varepsilon uu \\ &+ \mu\mu\zeta uu \end{aligned}$$

oder

$$\mu\mu + \frac{((\mu\varepsilon + 2\nu\delta)t + \mu\gamma + \nu\beta)u + \delta tt + \beta t + \alpha}{\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta} = 0$$

§. 104.

Hier hat wieder jede Applicate einen doppelten Werth, nemlich pM und pn, und es läßt sich daher der Durchmesser ilg der Ordinaten Mn auch wieder wie vorhin bestimmen. Theilt man nemlich die Ordinate Mn in l in zwey gleiche Theile, so liegt der Punkt l in dem Durchmesser: und setzt man pl $= v$, so wird

$$v = \frac{pM + pn}{2} = \frac{-(\mu\varepsilon + 2\nu\delta)t - \mu\gamma - \nu\beta}{2(\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon + \nu\nu\delta)}.$$

Fällt man ferner aus l die Linie lq auf die Axe AH senkrecht herab, und setzt dabey

$$Aq = p, \text{ und } ql = q; \text{ so wird}$$

$$\mu = \frac{q}{v}, \text{ und } \nu = \frac{pq}{v} = \frac{p - t}{v}; \text{ folglich}$$

$$v = \frac{q}{\mu}; \text{ und } t = p - \nu v = p - \frac{\nu q}{\mu}.$$

Bringt

Bringt man diese Werthe in die vorhin zwischen t und gefundene Gleichung, so erhält man

$$\frac{q}{\mu} = \frac{-\mu\varepsilon p - 2\nu\delta p + \nu\varepsilon q + 2\nu\nu\delta q : \mu - \mu\gamma -}{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}$$

oder

$$(2\mu\mu\zeta + \mu\nu\varepsilon)q + (\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta)p + \mu\mu\gamma + \mu\nu\beta = 0$$

oder

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)q + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)p + \mu\gamma + \nu\beta = 0$$

und durch diese Gleichung wird die Lage des Durchmesser ig bestimmt.

§. 105.

Nun schneide der erste Durchmesser IG, dessen Lag durch die Gleichung $2\zeta z + \varepsilon x + \gamma = 0$ [§. 101] bestimm wurde, verlängert, die Axe in O, so wird

$$AO = \frac{-\gamma}{\varepsilon}; \text{ und folglich } PO = \frac{-\gamma}{\varepsilon} - x, \text{ und}$$

$$\text{tang. } LOP = \frac{z}{PO} = \frac{-\varepsilon z}{\varepsilon x + \gamma} = \frac{\varepsilon}{2\zeta}, \text{ und tang. } MLG = \frac{2\zeta}{\varepsilon}.$$

Ferner treffe der andere Durchmesser ig, verlängert mi der Axe in o zusammen, so wird

$$Ao = \frac{-\mu\gamma - \nu\beta}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}, \text{ und tang. } Aol = \frac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}. \text{ *)}$$

Da nun tang. $AOL = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$ ist, so schneiden sich die bey den Durchmesser IG und ig einander in irgend einem Punkte C, und machen einen Winkel $OCo = Aol - AOL$, und es ist demnach

$$\text{tang. } OCo = \frac{4\nu\delta\zeta - \nu\varepsilon\varepsilon}{4\mu\zeta\zeta + 2\nu\delta\varepsilon + 2\nu\varepsilon\zeta + \mu\varepsilon\varepsilon} \text{ **)}$$

Der Winkel hingegen, unter welchem der zweyte Durchmesser ig seine Ordinaten halbirt, ist $Mlo = 180^0 - lpo - Aol$, und folglich seine Tangente, oder

tang.

$$\text{tang. Mlo} = \frac{2\mu\mu\zeta + 2\mu\nu\varepsilon + 2\nu\nu\delta}{\mu\mu\varepsilon + 2\mu\nu\delta - 2\mu\nu\zeta - \nu\nu\varepsilon} \text{ ***)}$$

*) Da nemlich, aus der Gleichung am Ende des vorhergehenden §, $Aq = p = \frac{-\mu\gamma - \nu\beta - (2\mu\zeta + \nu\varepsilon)q}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}$ ist, so wird $Ao - Aq = \frac{(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)q}{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}$, und folglich tang. $Aol = \frac{lq}{qo} = \frac{q}{Ao - Aq} = \frac{\mu\varepsilon + 2\nu\delta}{2\mu\zeta + \nu\varepsilon}$.

**) Diese Bestimmung ergiebt sich aus tang. $(\alpha - \beta) = \frac{\text{tang. } \alpha - \text{tang. } \beta}{1 + \text{tang. } \alpha . \text{ tang. } \beta}$, wenn man tang. α = tang. Aol, und tang. β = tang. AOL macht.

***) Es ist nemlich tang. Mlo = tang. $(180^\circ - lpo - Aol) = \frac{\text{tang. } (180^\circ - lpo) - \text{tang. } Aol}{1 + \text{tang. } (180^\circ - lpo) . \text{ tang. } Aol}$, und tang. $(180^\circ - lpo) = -\text{tang. } lpo = -\frac{\mu}{\nu}$.

§. 106.

Jetzt wollen wir den Punkt C betrachten, in welchem sich die beyden Durchmesser IG und ig schneiden. Fällt man aus demselben auf die Axe die senkrechte Linie CD herab, und setzt dabey

$$AD = g; \text{ und } CD = h;$$

so wird, einmal, weil C in dem Durchmesser IG liegt,

$$2\zeta h + \varepsilon g + \gamma = 0$$

und zweytens, weil sich C auch in dem Durchmesser ig befindet,

$$(2\mu\zeta + \nu\varepsilon)h + (\mu\varepsilon + 2\nu\delta)g + \mu\gamma + \nu\beta = 0.$$

Zieht man nun von dieser zweyten Gleichung die erste, durch μ multiplicirt ab, so bekömmt man

$$\nu\varepsilon h + 2\nu\delta g + \nu\beta = 0, \text{ oder } \varepsilon h + 2\delta g + \beta = 0$$

und aus der ersten und dieser letzten Gleichung wird

$$h = \frac{-\varepsilon g - \gamma}{2\zeta} = \frac{-2\delta g - \beta}{\varepsilon}, \text{ folglich}$$

$$(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta)g = 2\beta\zeta - \gamma\varepsilon, \text{ und}$$

$$g = \frac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}; \text{ und } h = \frac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$$

Da in diesen beyden Bestimmungen die Größen μ und von welchen die Schiefe der Applicaten pMn abhängt, nicht mit vorkommen, so erhellet daraus, daß der Punkt C unverändert bleibt, wie die Schiefe der gedachten Applicaten auch immer sich ändern mag.

§. 107.

Es schneiden sich also die Durchmesser IG und ig stets in demselben Punkte C, und hat man denselben einmal gefunden, so gehen alle Durchmesser durch ihn; so wie auch umgekehrt alle durch diesen Punkt gezogene gerade Linien Durchmesser sind, und daher alle unter einem gewissen beständigen Winkel gezogene Ordinaten in zwey gleiche Theile theilen. Da es also in jeder Linie der zweyten Ordnung nicht mehr als einen Punkt von dieser Art giebt, und darin alle Durchmesser sich schneiden, so pflegt man diesen Punkt den Mittelpunkt der Linien der zweyten Ordnung zu nennen. Man findet denselben aus der Gleichung

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$$

wenn man $AD = \dfrac{2\beta\zeta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ annimmt, und dabey $CD = \dfrac{2\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ macht.

§. 108.

§. 108.

Nun haben wir oben [§. 102] gefunden, daß $AK + AH = \frac{4\beta\zeta - 2\gamma\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\zeta}$ sey, und dabey sind IK und GH aus den Endpunkten des Durchmessers IG auf die Axe senkrecht herabgefällt. Hieraus erhellet, daß $AD = \frac{AK + AH}{2}$ ist, und daß also der Punkt D in gleicher Entfernung von K und H in der KH liegt. Es liegt daher auch der Punkt C in der Mitte der Durchmessers IG, und da dies auch von jedem andern Durchmesser gilt, so schneiden sich nicht nur alle Durchmesser in einem und demselben Punkte, sondern sie theilen sich auch einander insgesammt in zwey gleiche Theile.

§. 109.

Nun sey, Fig 26, irgend ein Durchmesser AI die Axe, und der Winkel, den die Ordinaten MN mit demselben machen, oder $APM = q$, sein Sinus $= m$, und sein Cosinus $= n$. Setzt man die Abscisse $AP = x$, und die Applicate $PM = y$, so verwandelt sich, da die Applicate zwey gleiche entgegengesetzte Werthe hat, deren Summe folglich $= o$ ist, die allgemeine Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung in folgende:

$$yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$$

und diese Gleichung giebt, wenn man $y = o$ seyn läßt, die Punkte der Axe G und I, wo dieselbe von der Curve geschnitten wird. Es hat nemlich die Gleichung

$$xx + \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha}{\gamma} = o$$

die beyden Wurzeln, $x = AG$, und $x = AI$, und es ist daher

$$AG + AI = \frac{-\beta}{\gamma}, \text{ und } AG \,.\, AI = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Da

Da nun der Mittelpunkt C in der Mitte des Durchmessers GI liegt, so wird derselbe leicht gefunden, indem

$$AC = \frac{AG + AI}{2} = \frac{-\beta}{2\gamma}$$

§. 110.

Kennt man den Mittelpunkt einer Linie der zweyten Ordnung C in der Axe AI, so nimmt man denselben am füglichsten zu Anfangspunkte der Abscissen. Man setze also $Cp = t$, so erhält man, da $PM = y$ bleibet, und $x = AC - CP = \frac{-\beta}{2\gamma} - t$ ist, folgende Gleichung zwischen den Coordinaten t und y

$$yy = \alpha - \frac{\beta\beta}{2\gamma} + \frac{\beta\beta}{4\gamma} - \beta t + \beta t + \gamma tt$$

oder

$$yy = \alpha - \frac{\beta\beta}{2\gamma} + \gamma tt$$

Setzt man also x für t, so hat man eine allgemeine Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung für den Fall wenn irgend ein Durchmesser zur Axe und der Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Abscissen angenommen worden ist, nemlich

$$yy = \alpha - \beta xx$$

Macht man also $y = o$, so wird $CG = CI = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, und es ist demnach der ganze Durchmesser $GI = 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

§. 111.

Setzt man $x = o$, so findet man die Ordinate durch den Mittelpunkt, EF: es wird nemlich $CE = EF = \sqrt{\alpha}$

und

und folglich die ganze Ordinate EF $= 2\sqrt{\alpha}$. Da diese Ordinate durch den Mittelpunkt geht, so ist auch sie ein Durchmesser, [§. 107], der den Durchmesser GI unter dem Winkel ECG $= q$ schneidet. Es theilet aber dieser zweyte Durchmesser EF alle Ordinaten, die dem ersten Durchmesser GI parallel sind, in zwey gleiche Theile. Denn nimmt man die Absc isse CP negativ, so bleibt die zu ihr gehörige nach I zu fallende Applicate der vorigen PM gleich; und da sie ihr auch parallel ist, so wird die gerade Linie durch die beyden Punkte M dem Durchmesser GI parallel, und muß folglich von EF in zwey gleiche Theile getheilt werden. Es sind also die beyden Durchmesser GI und EF so beschaffen, daß jeder alle Ordinaten, die dem andern parallel sind, in zwey gleiche Theile theilt, und wegen dieser Eigenschaft werden sie zusammengehörige Durchmesser genannt. Wenn also in den Endpunkten G und I des Durchmessers GI gerade Linien gezogen werden, die dem andern Durchmesser EF parallel sind, so berühren diese Linien die Curve, und eben dieses thun die geraden Linien, die durch die Punkte E und F dem Durchmesser GI parallel gelegt werden. [§. 91].

§. 112.

Nun ziehe man (Fig. 26) irgend eine schiefwinklige Applicate MQ, und setze dabey AQM $= \phi$; sin. AQM $= \mu$; cos. AQM $= \nu$; die Absciße CQ $= t$, und die Applicate MQ $= u$. Da in dem Dreyecke PMQ der Winkel

PMQ $= \phi - q$, und also sin. PMQ $= \mu n - \nu m$

ist, [§. 128 des ersten und §. 109 des zweyten Buchs], so verhält sich

$$y : u : PQ = \mu : m : \mu n - \nu m$$

und es wird also

$$y = \frac{\mu u}{m};\ PQ = \frac{(\mu n - \nu m) u}{m}, \text{ und}$$

$$x = t - PQ = t - \frac{(\mu n - \nu m) u}{m}.$$

Bringt man diese Werthe in die Gleichung $yy = \alpha - \beta x$
oder $yy + \beta xx - \alpha = 0$, §. 110, so wird

$$(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2) uu - 2\beta m(\mu n - \nu m) tu$$
$$\beta m^2 tt - \alpha m^2 = 0$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für die Applicate u
doppelter Werth, QM und − Qn, und es wird also

$$QM - Qn = \frac{2\beta m(\mu n - \nu m) t}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}.$$

Theilt man man die Ordinate Mn in p in zwey glei
Theile, so wird die gerade Linie Cpg ein neuer Durchm
ser, der alle der Mn parallele Ordinaten halbirt, u
dabey ist

$$Qp = \frac{\beta m(\mu n - \nu m) t}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}.$$

§. 113.

Hieraus aber fließt

$$\text{tang. } GCg = \frac{\mu . Qp}{CQ + \nu . Qp} = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu m)}, \text{ un}$$

$$\text{tang. } Mpg = \frac{\mu . CQ}{pQ + \nu . CQ} = \frac{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}{\mu\nu + \beta(\mu n - \nu m)(\nu n + m}$$

und Mpg ist der Winkel, unter welchem die neuen Ordi
naten Mn von dem Durchmesser gi halbirt werden. Fer
ner ist

$$Cp^2 = CQ^2 + Qp^2 + 2\nu . CQ . Qp =$$
$$\frac{\mu^4 + 2\beta\mu^3 n(\mu n - \nu m) + \beta\beta\mu\mu(\mu n - \nu m)^2}{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)^2} tt$$

und

und folglich

$$Cp = \frac{\mu t \sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}{\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2}$$

Setzt man $Cp = r$, und $pM = s$, so wird

$$t = \frac{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}$$

und

$$u = s + Qp =$$

$$s + \frac{\beta m(\mu n - \nu m)r}{\mu\sqrt{(\mu^2 + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}$$

Diese Werthe geben ferner

$$y = \frac{\mu s}{m} + \frac{\beta(\mu n - \nu m)r}{\sqrt{(\ldots\ldots\ldots\ldots)}}$$

$$x = -\frac{(\mu n - \nu m)s}{m} + \frac{\mu r}{\sqrt{(\ldots\ldots)}}$$

und dadurch verwandelt sich die Gleichung $yy + \beta xx - \alpha = 0$ in

$$\frac{(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)ss}{mm} + \frac{\beta(\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2)rr}{\mu\mu + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2}$$

$$- \alpha = 0.$$

§. 114.

Druckt man nun den Halbmesser CG durch f und den halben zugehörigen Durchmesser $CE = CF$ durch g aus, so wird

$$f = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \text{ und } g = \sqrt{a}, \text{ oder}$$

$$\alpha = gg;\ \beta = \frac{gg}{ff}, \text{ und also } yy + \frac{ggxx}{ff} = gg.$$

Setzt man ferner den Winkel $GCg = p$, so wird

$$\text{tang.}\, p = \frac{\beta m(\mu n - \nu m)}{\mu + n\beta(\mu n - \nu\mu)}\ \text{§. 113}$$

 und

und da, wenn man $ECe = \pi$ setzt, indem $GCE = q$ §. 111, $AQM = \varphi = q + \pi$ wird, so hat man

$\mu = \mathrm{sin.}(q + \pi)$; $\nu = \mathrm{cos.}(q + \pi)$; $m = \mathrm{sin.}\, q$; $n = \mathrm{cos}$

Es ist demnach

$$\mathrm{tang.}\, p =$$
$$\frac{\beta.\, \mathrm{sin.}\, q.\, \mathrm{sin.}\, \pi}{\mathrm{sin.}(q + \pi) + \beta\, \mathrm{cos.}\, q.\, \mathrm{sin.}\, \pi} = \frac{\beta.\, \mathrm{tang.}\, q.\, \mathrm{tang.}\, \pi}{\mathrm{tang.}\, q + \mathrm{tang.}\, \pi + \beta\, \mathrm{tang.}}$$
$$\mathrm{sin.}\, p =$$
$$\frac{\beta.\, \mathrm{sin.}\, q.\, \mathrm{sin.}\, \pi}{\sqrt{(\mu\mu + 2\beta\mu n(\mu n - \nu m) + \beta\beta(\mu n - \nu m)^2)}}$$

und

$$\mu\mu + \beta(\mu n - \nu m)^2 = (\mathrm{sin.}(q + \pi))^2 + \beta(\mathrm{sin.}\, \pi)$$

Braucht man diese Werthe, so findet man folgende Glei-chung zwischen r und s:

$$\frac{((\mathrm{sin.}\, \overline{q + \pi})^2 + \beta(\mathrm{sin.}\, \pi)^2)ss}{(\mathrm{sin.}\, q)^2} + \frac{\beta((\mathrm{sin.}\, \overline{q + \pi})^2 + \beta(\mathrm{sin.}\, \pi)^2)r}{\beta\beta(\mathrm{sin.}\, q)^2(\mathrm{sin.}\, \pi)^2}$$
$$(\mathrm{sin.}\, p)^2 - \alpha = 0$$

Es ist aber

$$\beta = \frac{\mathrm{tang.}\, p.\, \mathrm{sin.}(q + \pi)}{(\mathrm{sin.}\, q - \mathrm{cos.}\, q.\, \mathrm{tang.}\, p)\, \mathrm{sin.}\, \pi} = \frac{\mathrm{tang.}\, p\, (\mathrm{tang.}\, q + \mathrm{tang.}\, \pi)}{\mathrm{tang.}\, \pi\, (\mathrm{tang.}\, q - \mathrm{tang.}\, p)}$$
$$= \frac{gg}{ff} = \frac{\mathrm{cot.}\, \pi.\, \mathrm{tang.}\, q + 1}{\mathrm{cot.}\, p.\, \mathrm{tang.}\, q - 1}, \text{ oder}$$
$$\mathrm{tang.}\, q = \frac{ff + gg}{gg.\, \mathrm{cot.}\, p - ff.\, \mathrm{cot.}\, \pi}$$

woraus sich eine Menge von Folgen ableiten läßt. Es ist aber

$$\frac{gg}{ff} = \frac{\mathrm{sin.}\, p.\, \mathrm{sin.}(q + \pi)}{\mathrm{sin.}\, \pi\, \mathrm{sin.}(q - p)}$$

§. 115.

Es sey der Halbmesser $Cg = a$, und der zugehörige Halbmesser $Ce = b$; so fließt aus der vorhin [zwischen

r

r und s §. 114] gefundenen Gleichung [wenn man darin $s = 0$ werden läßt]

$$a = \frac{\sin. q. \sin. \pi \sqrt{\alpha\beta}}{\sin. p \sqrt{((\sin. \overline{q + \pi})^2 + \beta (\sin. \pi)^2)}}$$

$$= \frac{gg . \sin. q. \sin. \pi}{\sin. p \sqrt{(ff(\sin.(q + \pi))^2 + gg (\sin. \pi)^2)}}$$

[weil $\sqrt{\alpha\beta} = \frac{gg}{f}$ und $\beta = \frac{gg}{ff}$ ist, §. 114] und [wenn man darin $r = 0$ setzt,]

$$b = \frac{fg . \sin. q}{\sqrt{(ff(\sin.(q + \pi))^2 + gg (\sin. \pi)^2)}}$$

und es ist daher

I. $a : b = g . \sin. \pi : f . \sin. p.$

Nun ist $(\sin.(q + \pi))^2 + \frac{gg}{ff}(\sin. \pi)^2 = \frac{\sin.(q + \pi)}{\sin.(q - p)}(\sin.(q - p) \times$
$\sin.(q + \pi) + \sin. p. \sin. \pi) = \frac{\sin. q \sin. (q + \pi). \sin. (q + \pi - p)}{\sin.(q - p)}$

und folglich

$$a = \frac{gg. \sin. \pi}{f. \sin. p} \sqrt{\frac{\sin. q. \sin. (q - p)}{\sin. (q + \pi) \sin. (q + \pi - p)}}$$

oder, weil $\frac{gg}{ff} = \frac{\sin. p. \sin. (q + \pi)}{\sin. \pi. \sin. (q - p)}$ ist,

$$a = f \sqrt{\frac{\sin. q. \sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p). \sin. (q + \pi - p)}} \text{ und}$$

$$b = g \sqrt{\frac{\sin. q. \sin. (q - p)}{\sin. (q + \pi). \sin. (q + \pi - p)}}$$

also

II. $a : b = f. \sin. (q + \pi) : g. \sin. (q - p)$ und

III. $ab = \frac{fg. \sin. q}{\sin. (q + \pi - p)}.$

§. 116.

Wenn man also in einem Kegelschnitte zwey Paar zusam mengehörige Durchmesser GI, EF, und gi, ef hat, so i [aus I §. 115.]

$$Cg : Ce = CE . \sin. ECe : CG . \sin. GCg$$

und folglich

$$\sin. GCg : \sin. ECe = CE . Ce : CG . Cg$$

und daher, wenn man die Sehnen Ee und Gg zieht

$$\Delta GCg = \Delta ECe$$

Ferner ist [aus II §. 115]

$$Cg : Ce = CG . \sin. GCe : CE . \sin. gCE$$

oder

$$Ce . CG . \sin. GCe = CE . Cg . \sin. gCE$$

und folglich, wenn man die Sehnen Ge und gE zieht,

$$\Delta GCe = \Delta gCE$$

oder, wenn man die gegenüberliegenden Dreyecke nimmt

$$\Delta ICf = \Delta iCF$$

Endlich giebt die dritte Gleichung $ab . \sin. (q + \pi - q) = fg . \sin. q$,

$$Cg . Ce . \sin. gCe = CG . CE . \sin. GCE$$

und zieht man daher die Sehnen eg und EG, oder di gegenüber liegenden FI und fi, so ist auch

$$\Delta ICF = \Delta iCf$$

und daraus folgt, daß die Parallelogramme zwischen i zwey zusammengehörigen Durchmessern einander gleich sind.

§. 117.

Wir haben also drey Paar gleiche Dreyecke, nemlich

$$\text{I. } \Delta FCf = \Delta ICi$$

$$\text{II. } \Delta fCI = \Delta FCi$$

$$\text{III. } \Delta FCI = \Delta fCi$$

und daraus fließt die Gleichheit der Trapezien

$$FfCI = iICf.$$

Zieht

Zieht man hiervon das gemeinschaftliche Dreyeck fCI ab, so findet man $\Delta FIf = \Delta Ifi$; und da diese Dreyecke einerley Grundlinie fI haben, so fließt aus ihrer Gleichheit ferner, daß die Sehnen Fi und fI einander parallel sind. Auch ist $\Delta FIi = \Delta ifF$, und setzt man diese Dreyecke zu den gleichen Dreyecken FCI und fCi, so werden die Trapezien FCIi und iCfF einander gleich.

§. 118.

Hieraus läßt sich eine Methode ableiten, durch einen jeden Punkt M einer Linie der zweyten Ordnung eine Tangente MT zu legen. Es sey, Fig. 27, der Durchmesser GI zur Axe angenommen, und der halbe zugehörige Durchmesser CE. Man ziehe durch M die Linie MP nach der Axe und mit CE parallel, so wird MP eine halbe Ordinate und $PN = PM$. Ist nun auch CM, welches ein Halbmesser seyn wird, gezogen, so suche man den damit zusammengehörigen Halbmesser CK, und diesem wird die gesuchte Tangente MT parallel seyn. Es sey der Winkel $GCE = q$; $GCM = p$; und $ECK = \pi$; so ist, wie wir [§. 114] gesehen haben

$$\frac{EC^2}{GC^2} = \frac{\sin. p. (\sin. (p + \pi)}{\sin. \pi (\sin. (q - p)}, \text{ und [§. 115]}$$

$$MC = CG \sqrt{\frac{\sin. q. \sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p). \sin. (q + \pi - p)}}$$

Nun ist aber in dem Dreyecke CMP

$$MC^2 = CP^2 + MP^2 + 2PM. CP. \cos. q,$$

$$MP : MC = \sin. p : \sin. q, \text{ und}$$

$$MP : CP = \sin. p : \sin. (q - p)$$

Ferner ist in dem Dreyecke CMT, da die Winkel gegeben sind,

$$CM : CT : MT = \sin. (q + \pi) : \sin. (q + \pi - p) : \sin. p$$

Schafft man daher die Winkel weg, so wird

$$MC = CG\sqrt{\frac{MC.CM}{CP.CT}},\ \text{oder}\ CG^2 = CP.CT,$$

folglich

$$CP : CG = CG : CT$$

und hierdurch wird die Lage der Tangente sehr leicht gefunden. Es fließt aber aus dieser Proportion, wenn man dieselbe durch die Subtraction und Addition der Glieder verändert

$$CP : PG = CG : TG,\ \text{und weil}\ CG = CI$$
$$CP : IP = CG : TI.$$

§. 119.

Da $\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin.p.\sin.(q+\pi)}{\sin.\pi.\sin.(q-p)}$; $\frac{CK^2}{CM^2} = \frac{\sin.p.\sin.(q-p)}{\sin.\pi\sin.(q+\pi)}$; $\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin.q.\sin.(q+\pi)}{\sin.(q-p)\sin.(q+\pi-p)}$ und $\frac{CK^2}{CE^2} = \frac{\sin.q.\sin.(q-p)}{\sin.(q+\pi).\sin.(q+\pi-p)}$ ist: so wird

$$\frac{CE^2+CG^2}{CG^2} = \frac{\sin.p.\sin.(q+\pi)+\sin.\pi.\sin.(q-p)}{\sin.\pi.\sin.(q-p)},\ \text{und}$$

$$\frac{CK^2+CM^2}{CM^2} = \frac{\sin.p.\sin.(q-p)+\sin.\pi.\sin.(q+\pi)}{\sin.\pi.\sin.(q+\pi)}$$

Nun ist aber

$$\sin.A.\sin.B = \tfrac{1}{2}\cos.(A-B) - \tfrac{1}{2}\cos.(A+B)$$

und umgekehrt

$$\tfrac{1}{2}\cos.A - \tfrac{1}{2}\cos.B = \sin.\frac{A+B}{2}.\sin.\frac{B-A}{2}$$

Folglich ist $\sin.p.\sin.(q+\pi) + \sin.\pi.\sin.(q-p) =$
$\tfrac{1}{2}\cos.(q+\pi-p) - \tfrac{1}{2}\cos.(q+\pi+p) + \tfrac{1}{2}\cos.(q-\pi-p)$
$- \tfrac{1}{2}\cos.(q+\pi-p) =$
$\tfrac{1}{2}\cos.(q-\pi-p) - \tfrac{1}{2}\cos.(q+\pi+p) = \sin.q.\sin.(p+\pi)$

Ferner

Ferner ist $\sin. p . \sin. (q - p) + \sin. \pi . \sin. (q + \pi) =$

$$\tfrac{1}{2} \cos. (q - 2p) - \tfrac{1}{2} \cos. q + \tfrac{1}{2} \cos. q - \tfrac{1}{2} \cos. (q + 2\pi)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cos. (q - 2p) - \tfrac{1}{2} \cos. (q + 2\pi) =$$

$$\sin. (q + \pi - p) . \sin. (p + \pi)$$

Hierdurch wird

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CG^2} = \frac{\sin. q . \sin. (p + \pi)}{\sin. \pi \, \sin. (q - p)}, \text{ und}$$

$$\frac{CK^2 + CM^2}{CM^2} = \frac{\sin. (q + \pi - p) . \sin. (p + \pi)}{\sin. \pi . \sin. (q + \pi)}$$

und es ist folglich

$$\frac{CE^2 + CG^2}{CK^2 + CM^2} = \frac{CG^2}{CM^2} . \frac{\sin. q . \sin. (q + \pi)}{\sin. (q - p) . \sin. (q + \pi - p)} = \frac{CG^2}{CM^2} . \frac{CM^2}{CG^2}$$

oder

$$CE^2 + CG^2 = CK^2 + CM^2.$$

In jeder Linie der zweyten Ordnung ist also die Summe der Quadrate jeder zweyer zusammengehörigen Durchmesser eine beständige Größe.

§. 120.

Wenn also zwey zusammengehörige Halbmesser CG und CE, Fig. 27, gegeben werden, so findet man zu jedem willkührlich angenommenen Halbmesser CM den damit zusammengehörigen CK, wenn man

$$CK = \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CM^2)}$$

nimmt. Es ist daher wegen der obigen Eigenschaften der Kegelschnitte

$$TG . TI : TM^2 = CG . CI : CK^2 = CG^2 : CK^2$$

$$= CG^2 : CE^2 + CG^2 - CM^2$$

und folglich

$$TM = CG \sqrt{\frac{CE^2 + CG^2 - CM^2}{TG . TI.}}$$

Auf ähnliche Art kommen, wenn man die Ordinate M zieht, und durch N die Tangente NT legt, beyde Tangenten MT und NT in einem Punkte der Axe TI, nemlich in T zusammen, indem für jede $CP : CG = CG : CT$ ist. Zieht man aber die Linie CN, so wird

$$TN = CG\sqrt{\frac{CE^2 + CG^2 - CN^2}{TG.TI}},$$

und folglich

$$TM^2 : TN^2 = CE^2 + CG^2 - CM^2 : CE^2 + CG^2 - CN^2$$

Und da MN in P in zwey gleiche Theile getheilt worden ist, so ist

$$\sin.CTM : \sin.CTN = TN : TM =$$
$$\sqrt{(CE^2 + CG^2 - CN^2)} : \sqrt{(CE^2 + CG^2 - CM^2)}$$

§. 121.

Nun lege man durch die Punkte A und B des Durchmessers AB, Fig. 28, die Tangenten AK und BL, und verlängere irgend eine andere Tangente MT, bis sie die vorhergehenden in den Punkten K und L schneiden. Ferner sey ECF ein zugehöriger Durchmesser, und also sowohl die Applicate PM als die Tangenten AK und BL demselben parallel. Da nun, wegen der Natur der Tangenten [§ 118]

$CP : CA = CA : CT$ ist, so wird, weil $CB = CA$

$CP : AP = CA : AT$; und $CP : BP = CA : BT$

folglich

$$CP : CA = CA : CT = AP : AT = BP : BT$$

und daher

$AT : BT = AP : BP$. Da nun

$AT : BT = AK : BL$, ist, so hat man

$AK : BL = AP : BP$.

Ferner fließt hieraus

AT

$$AT = \frac{CA.AP}{CP};\ BT = \frac{CA.BP}{CP}, \text{ und}$$

$$PT = \frac{CA.AP}{CP} + AP = \frac{AP.BP}{CP}; \text{ und es ist folglich}$$

$$AT : PT = CA : BP = AK : PM.$$

Auf eine ähnliche Art wird

$$BT : PT = CA : AP = BL : PM, \text{ und daher}$$

$$AK = \frac{CA.PM}{BP};\ BL = \frac{CA.PM}{AP}, \text{ und } AK.BL = \frac{CA^2.PM^2}{AP.BP}$$

Da nun $AP.BP : PM^2 = AC^2 : CE^2$ ist, so folgt hieraus die merkwürdige Eigenschaft, daß

$$AK.BL = CE^2$$

ist; und daraus wird ferner

$$AK = CE\sqrt{\frac{AP}{BP}};\ BL = CE\sqrt{\frac{BP}{AP}}$$

$$AP : BP = AK^2 : CE^2 = CE^2 : BL^2 = KM : ML$$

und

$$AK : BL = KM : LM$$

§. 122.

Durch was für einen Punkt M einer Linie der zweyten Ordnung man also auch eine Tangente legen mag, welche den parallelen Tangenten AK und BL in den Punkten K und L begegnet, so ist immer der Halbmesser CE, welcher den Tangenten AK und BL parallel ist, die mittlere Proportional-Linie zwischen AK und BL oder

$$CE^2 = AK.BL$$

Zieht man also durch irgend einen andern Punkt m auf eine ähnliche Art die Tangente kml, so ist auch

$$CE^2 = Ak.Bl, \text{ und folglich}$$

$$AK : Ak = Bl : BL, \text{ und}$$

$$AK : Kk = Bl : Ll.$$

Schnei-

Schneiden sich nun diese beyden Tangenten in o, so ist

$$AK : Bl = Ak : BL = Kk : Ll = ko : lo = Ko : Lo$$

Und dieses sind die vornehmsten Eigenschaften der Kegelschnitte auf welche Newton in seinen Principiis Philosophiae naturalis die Auflösung einer Menge der wichtigsten Aufgaben gegründet hat.

§. 123.

Da $AK : Bl = Ko : Lo$., so ist I, wenn LB nach I verlängert wird, so daß $BI = AK$ ist, der Punkt, wo die Tangente, die auf der andern Seite der KL parallel gezogen werden kann, die Tangente LB schneiden würde; so wie K der Punkt in der Tangente LK, wo sie von der der BL parallelen Tangente AK geschnitten wird. Es geht demnach die gerade Linie IK durch den Mittelpunkt C, und wird daselbst in zwey gleiche Theile getheilt. Wenn daher zwey Tangenten BL und LM auf die beschriebene Art nach I und K verlängert, und von einer dritten Tangente lmo in den Punkten l und o geschnitten werden, so ist

$$BI : Bl = Ko : Lo, \text{ folglich}$$
$$IB : Il = Ko : KL$$

und also, die dritte Tangente lmo mag gezogen werden, wo sie will, allezeit

$$IB.KL = Il.Ko.$$

Zieht man also eine vierte Tangente $\lambda\mu\omega$, welche die beyden zuerst angenommenen IL und KL in den Punkten λ und ω schneidet: so ist auch

$$IB.KL = I\lambda.K\omega, \text{ und folglich}$$
$$Il.Ko = I\lambda.K\omega, \text{ oder } Il : I\lambda = K\omega : Ko$$

Zieht man also die geraden Linien $l\omega$ und λo, und theilet dieselben in irgend einem Verhältnisse, so theilet die gerade Linie, die durch die Theilungspunkte geht, die Linie IK in eben dem Verhältnisse, in welchem jene Linien

ge-

getheilet werden. Werden daher die Linien $l\omega$ und λo in zwey gleiche Theile getheilt, so theilt die gerade Linie, die durch die Halbirungspunkte gezogen wird, auch die Linie IK in zwey gleiche Theile, und geht folglich durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes C.

§. 124.

Daß die gerade Linie nmH, Fig. 30, welche die Linien $l\omega$ und λo in einem gegebenen Verhältnisse theilt, auch die Linie KI in eben dem Verhältnisse theilen müsse, wenn

$$Il : I\lambda = K\omega : Ko, \text{ oder } I\lambda : \lambda l = Ko : o\omega$$

ist; läßt sich auf folgende Art geometrisch erweisen. Es theile die gerade Linie mn die $l\omega$ und λo in dem Verhältnisse $m : n$, oder es sey

$$\lambda m : mo = ln : n\omega = m : n$$

und dabey schneide sie verlängert die Tangenten IL und KL in den Punkten Q und R: so ist

$$\sin. Q : \sin. R = \frac{ln}{Ql} : \frac{n\omega}{R\omega} = \frac{\lambda m}{Q\lambda} : \frac{mo}{Ro} = \frac{m}{Ql} : \frac{n}{R\omega}$$

und folglich

$$Ql : R\omega = Q\lambda : Ro; \text{ und } l\lambda : o\omega = Q\lambda : Ro = Ql : R\omega$$

Da nun $l\lambda : o\omega = I\lambda : Ko$, so ist auch

$$QI : RK = l\lambda : o\omega; \text{ und } \sin. Q : \sin. R = \frac{m}{l\lambda} : \frac{n}{o\omega}$$

Es ist aber auch

$$\sin. Q : \sin. R = \frac{HI}{QI} : \frac{HK}{KR} = \frac{HI}{l\lambda} : \frac{HK}{o\omega}, \text{ und folglich}$$

$$HI : HK = m : n = \lambda m : mo = ln : n\omega$$

§. 125.

Wenn zwey zusammengehörige Halbmesser CG, CE, Fig. 27, gegeben sind, welche sich unter dem schiefen Winkel $GCE = q$ schneiden, so lassen sich allemal zwey andere zusammengehörige Halbmesser CM und CK finden, die gegen einander unter dem rechten Winkel MCK geneigt sind. Es sey der Winkel GCM $= p$, so ist, wenn man ECK $= \pi$ setzt, $q + \pi - p = 90^o$, und folglich $\sin.\pi = \cos.(q-p)$, und $\sin.(q+\pi) = \cos.p$. Hierdurch wird nach §. 119

$$\frac{CE^2}{CG^2} = \frac{\sin.p.\cos.p}{\sin.(q-p)\cos.(q-p)} = \frac{\sin.2p}{\sin.2(q-p)} =$$

$$\frac{\sin.2p}{\sin.2q.\cos.2p - \cos.2q.\sin.2p}$$

und also

$$\frac{CG^2}{CE^2} = \sin.2q.\cot.2p - \cos.2q, \text{ und } \cot.2\,GCM =$$

$$\cot.2q + \frac{CG^2}{CE^2.\sin.2q}$$

eine Gleichung, deren Auflösung allemal möglich ist. Es ist aber

$$\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{\sin.q.\cos.p}{\sin.(q-p)}; \text{ und } \frac{CG^2}{CM^2} = 1 - \frac{\tang.p}{\tang.q}, \text{ und also}$$

$$\tang.p = \tang.q - \frac{CG^2}{CM^2}\tang.q.$$

Da nun

$$CM^2 + CK^2 = CG^2 + CE^2; \text{ und } CK.CM = CG.CE.\sin.q$$

ist, so wird

$$CM + CK = \sqrt{(CG^2 + 2CG.CE.\sin.q + CE^2)} \text{ und}$$

$$CM - CK = \sqrt{(CG^2 - 2CG.CE.\sin.q + CE^2)}$$

woraus sich denn die rechtwinkligen zusammengehörigen Durchmesser finden lassen.

§. 126.

Es seyn CA und CE, Fig. 29, die beyden rechtwinkligen zusammengehörigen Halbmesser des Kegelschnitts, welche man Hauptdurchmesser zu nennen pflegt, und welche sich

sich in dem Mittelpunkte C senkrecht schneiden. Ferner sey die Abscisse $CP = x$, und die Applicate $PM = y$. Alsdann ist, wie wir, §. 110, gesehen haben, $yy = \alpha - \beta xx$; und wenn man die Haupthalbmesser $AC = a$, und $CE = b$ setzt, so wird $\alpha = bb$, und $\beta = \frac{bb}{aa}$, folglich

$$yy = bb - \frac{bbxx}{aa}.$$

Da diese Gleichung unverändert bleibt, man mag x und y positiv oder negativ nehmen, so erhellet daraus, daß die Curve vier gleiche und ähnliche Theile haben werde, die auf beyden Seiten der Durchmesser AC und EF liegen. Es ist nemlich der Quadrant ACE ähnlich und gleich dem Quadranten ACF, und ihnen liegen auf der andern Seite des Durchmessers EF zwey gleiche gegenüber.

§. 127.

Wenn aus dem Mittelpunkte C, Fig. 29, welchen wir zum Anfangspunkte der Abscissen angenommen haben, die gerade Linie CM gezogen wird, so ist

$$CM = \sqrt{(xx + yy)} = \sqrt{(bb - \frac{bbxx}{aa} + xx)}$$

und wenn $b = a$, oder $CE = CA$ ist, so wird

$$CM = \sqrt{bb} = b = a.$$

In diesem Falle sind also alle aus dem Mittelpunkte C nach der Curve gezogene gerade Linien einander gleich; und da dies die Eigenschaft des Zirkels ist, so erhellet, daß ein Kegelschnitt, in welchem die beyden zusammengehörigen Hauptdurchmesser gleich sind, nichts anders als ein Kreis ist, für welchen sich also hieraus, wenn man $CP = x$, $PM = y$, und $CA = a$ setzt, folgende Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten ergiebt,

$$yy = aa - xx.$$

§. 128.

§. 128.

Wenn aber b nicht gleich a ist, so läßt sich die gerade Linie CM durch x nicht rational ausdrücken. Dagegen giebt es einen andern Punkt D in der Axe, der so beschaffen ist, daß alle von ihm nach der Curve gezogene gerade Linien DM rational ausgedruckt werden können. Um diesen Punkt zu finden, setze man $CD = f$, und da alsdann $DP = f - x$ ist, so wird

$$DM^2 = ff - 2fx + xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = bb + ff - 2fx + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$$

Dieser Ausdruck ist nun ein Quadrat, wenn

$$ff = \frac{(aa - bb)(bb + ff)}{aa}, \text{ oder } o = aa - bb - ff$$

ist, und daraus wird

$$f = \pm \sqrt{(aa - bb)}$$

Es giebt also einen doppelten Punkt von der beschriebenen Art in der Axe AC, der auf beyden Seiten von dem Mittelpunkte C um $CD = \sqrt{(aa - bb)}$ entfernt ist. Es ist aber

$$DM^2 = aa - 2x\sqrt{(aa - bb)} + \frac{(aa - bb)xx}{aa}, \text{ und also}$$

$$DM = a - \frac{x\sqrt{(aa - bb)}}{a} = AC - \frac{CD.CP}{AC}.$$

Setzt man $CP = o$, so wird $DM = DE = a = AC$, und setzt man die Abscisse $CP = CD$, oder $x = \sqrt{(aa - bb)}$ so verwandelt sich die gerade Linie DM in die Applicate DG, und es wird also

$$DG = \frac{bb}{a} = \frac{CE^2}{AC}$$

oder DG die dritte Proportional-Linie zu AC und CE.

§. 129.

§. 129.

Wegen dieser besondern Eigenschaft, welche die auf die erwähnte Art bestimmten Punkte D haben, sind dieselben der größten Aufmerksamkeit werth; auch haben sie sonst noch viele andere wichtige Beschaffenheiten, und werden deswegen mit einem besondern Namen belegt. Man nennet nemlich diese Punkte Brennpunkte des Kegelschnittes, und da dieselben in dem größern Durchmesser a liegen, so unterscheidet man auch diesen größern Durchmesser von dem mit ihm zusammengehörigen b dadurch, daß man jenen die Haupt- und Zwergaxe, und diesen, b, die zugehörige Axe nennt. Die rechtwinklige Applicate DG aber, die aus dem einen von den beyden Brennpunkten auf der Hauptaxe aufgerichtet ist, erhält den Namen des halben Parameters, indem man unter dem ganzen Parameter die Ordinate in D, oder DG zweymal genommen, versteht. Es ist also die halbe zugehörige Axe CE die mittlere Proportional-Linie zwischen dem halben Parameter und der halben Hauptaxe AC. Endlich giebt man den Punkten der Hauptaxe, wo dieselbe von der Curve geschnitten wird, den Namen der Scheitel, dergleichen z. B. A ist; und diese Punkte haben die Eigenschaft, daß die Tangenten der Curve, die durch sie gelegt werden, auf der Hauptaxe AC senkrecht stehen.

§. 130.

Man setze den halben Parameter $DG = c$, und die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel $AD = d$; so ist

$$CD = a - d = \sqrt{(aa - bb)} \text{ und } DG = \frac{bb}{a} = c; \text{ folglich}$$

$$bb = ac; \text{ und } a - d = \sqrt{(aa - ac)}; \text{ also}$$

$$ac = 2ad - dd; \text{ und } a = \frac{dd}{2d - c}; \text{ und } b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}.$$

Sind also die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel AD = d, und der halbe Parameter DG = c gegeben, so läßt sich der Kegelschnitt bestimmen. Setzt man nun CP = x, so wird

$$DM = a - \frac{(a-d)x}{a} = \frac{dd}{2d-c} - \frac{(c-d)x}{d}$$

Es sey DP = t, so wird $x = CD - t = \frac{(c-d)d}{2d-c} - t$, und daher

$$DM = c + \frac{(c-d)t}{d}.$$

Druckt man den Winkel ADM durch v aus, so wird $\frac{t}{DM} = -\cos. v$ und also

$$d.DM = cd + (d-c)DM.\cos. v,$$

$$DM = \frac{cd}{d-(d-c).\cos. v}, \text{ und}$$

$$\cos. v = \frac{d(DM - DG)}{(d-c)DM}.$$

Sechs-