# Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Drittes Capitel. Von der Eintheilung der algebraischen krummen Linien in Ordnungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

# Drittes Capitel.

## Von der Eintheilung der algebraischen krummen Lin in Ordnungen.

§. 47.

Da es eine eben so große Verschiedenheit unter d krummen Linien als unter den Funktionen giebt, so ist es b der unendlichen Menge derselben unmöglich, zur Kennt von ihnen zu gelangen, wofern man sie nicht in gew Classen theilt, und dadurch dem Verstande bey ihrer Unt suchung einen Leitfaden an die Hand giebt und zu Hü kommt. Zwar haben wir die krummen Linien bereits algebraische und in transcendente eingetheilt, allein je dieser Classen muß wegen der unendlichen Verschiedenh der Curven noch weiter zerlegt werden. Hier richten w indeß unser Augenmerk bloß auf die algebraischen Curve und wollen jetzt untersuchen, wie diese am bequemsten vo neuen in Classen getheilt werden können. Das erste, w dabey zu thun ist, besteht in der Festsetzung des Theilung grundes und der Kennzeichen der darnach zu machend Classen, damit man die Curven, denen ebendieselben Ken zeichen zukommen, zu ebenderselben Classe, und diejenige bey welchen diese Kennzeichen verschieden sind, zu versch denen Classen rechnen könne.

§. 48

§. 48.

Die einzige Quelle der gedachten Kennzeichen sind also die Funktionen oder Gleichungen, wodurch die Natur der krummen Linien ausgedruckt wird; indem bis jetzt kein anderer Weg bekannt ist, der zu allen algebraischen krummen Linien führte. Es können aber die Funktionen und die Gleichungen zwischen zwey Coordinaten auf mancherley Art eingetheilt werden, so wie solches auch im ersten Buche (im ersten Capitel) geschehen ist. Zuerst bietet sich die Vielförmigkeit der Funktionen, und zwar beym ersten Anblick als ein sehr guter Theilungsgrund der krummen Linien in Classen dar, und darnach würden diejenigen Curven, die aus einförmigen Funktionen entspringen, zur ersten Classe, diejenigen, deren Funktion zweyförmig ist, zur zweyten, und diejenigen, deren Natur durch eine dreyförmige Funktion ausgedruckt wird, zur dritten Classe gehören, und so ferner.

§. 49.

So natürlich aber auch diese Eintheilung zu seyn scheint, so findet man dennoch bey einer sorgfältigern Ueberlegung, daß sie der Natur der krummen Linien und den Eigenschaften derselben gar nicht angemessen ist. Wie vielförmig nemlich die Funktion seyn soll, auf welche eine krumme Linie führt, das hängt vorzüglich von der Lage der Axe ab, die willkührlich ist; so daß, wenn bey einer Axe die Applicate eine einförmige Funktion von der Abscisse ist, dieselbe bey einer andern Axe eine vielförmige Funktion seyn kann. Es würde also, wenn man hiernach die Classen der krummen Linien festsetzen wollte, eine und dieselbe krumme Linie in verschiedenen Classen vorkommen, und dies wäre wider den Zweck. So würde die Curve, welche durch die Gleichung $a^3y = aaxx - x^4$ ausgedruckt wird, zur ersten Classe gehören, weil die Applicate $y$ eine einförmige Funktion von $x$ ist; verwechselte man aber die Coordinaten, oder nähme man eine Axe an, die auf der vorigen senkrecht stünde, so bekäme man für eben diese Curve die Gleichung $y^4 - aayy + a^3x = 0$, und dabey gehörte denn die Curve zur vierten Classe. Es kann daher die Vielförmigkeit der Funktionen bey der Eintheilung derselben in Classen keinen Theilungsgrund abgeben.

## §. 50.

Eben so wenig läßt sich dazu die Menge der Glieder der Gleichungen, welche die Natur der Curven ausdrucken, gebrauchen. Denn wollte man die Curven, deren Gleichungen aus zwey Gliedern bestehen, wie $y^m = \alpha x^n$ zur ersten, die hingegen, deren Gleichungen drey Glieder enthalten, zur zweyten Classe rc. rechnen: so würde auch hierbey eine und dieselbe Curve in mehrern Classen vorkommen. So gehörte die Curve in dem Exempel §. 36. deren Gleichung $yy - ax = 0$ war, zur ersten und zur vierten Classe, weil man dafür, bey veränderter Axe, die Gleichung $16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0$ hat. Ja nähme man die Axe und den Anfangspunkt der Abscissen anders, so würde man sie auch zur zweyten und dritten und fünften Classe rechnen können, und es ist daher diese Eintheilung durchaus verwerflich.

## §. 51.

Diese Unbequemlichkeiten vermeidet man, wenn man die Curven nach den Graden der Gleichungen eintheilt, durch welche sie ausgedruckt werden. Denn da der Grad der Gleichung, wodurch eine Curve ausgedruckt wird, un-

ver-

verändert derselbe bleibt, man mag die Axe und den Anfangspunkt der Abscissen und den Coordinaten-Winkel annehmen, wie man will, so gehört dabey jede krumme Linie nie zu mehr als zu einer Classe. Nimmt man daher die Anzahl der Dimensionen, welche die rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten in der Gleichung für die Curve haben, zum Theilungsgrunde an, so bleiben die Classen bey allen Veränderungen, die man mit der Axe, dem Anfangspunkte der Abscissen und dem Coordinaten-Winkel vornimmt, unverändert dieselben, und jede Curve gehört nie zu mehr als zu einer Classe, man mag ihre specielle, oder ihre allgemeinste Gleichung zum Grunde legen. Am richtigsten theilt man daher die Curven nach den Graden der Gleichungen ein, wodurch sie ausgedruckt werden.

§. 52.

So wie man nun die aus der Anzahl der Dimensionen entspringenden Arten der Gleichungen nach Graden unterscheidet, so wollen wir die aus eben dieser Quelle fließenden Classen der krummen Linien mit dem Namen der Ordnungen belegen. Da also die allgemeine Gleichung des ersten Grades

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y$$

ist, so gehören hiernach alle Linien, die sich aus dieser Gleichung, wenn man darin x und y rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten bedeuten läßt, ergeben, zur ersten Ordnung. Wir haben aber oben [§. 39.] gesehen, daß die angeführte Gleichung bloß die gerade Linie ausdruckt, und es begreift daher die erste Ordnung weiter keine Linie in sich, als die gerade, welches auch allerdings unter allen Linien die einfachste ist. Da also der Name, Curve, hier nicht gebraucht werden kann, so wollen wir die Ordnungen, womit wir uns jetzt beschäftigen, nicht Ordnungen der krummen Linien, sondern bloß Ordnungen der Linien nennen. Die erste Ordnung der Linien faßt also keine krumme, sondern allein die gerade Linie in sich.

§. 53.

Es ist aber hierbey gleichgültig, ob man die Coordinaten rechtwinklig oder schiefwinklig annimmt. Denn ist der Winkel, welchen die Applicaten mit der Axe machen $= q$ und sein Sinus $= \mu$, so wie sein Cosinus $= \nu$: so wird die Gleichung in eine Gleichung für rechtwinklige Coordinaten verwandelt, wenn man $y = \frac{u}{\mu}$, und $x = \frac{\nu u}{\mu} + t$ setzt §. 44., und man bekommt dadurch für die rechtwinklige Coordinaten t und u die Gleichung:

$$o = \alpha + \beta t + (\frac{\beta \nu}{\mu} + \frac{\gamma}{\mu}) u.$$

Da nun diese Gleichung eben den Umfang hat als die vorhergehende, denn beyde sind allgemeine Gleichungen: so erhellet, daß die Bedeutung der Gleichung nicht eingeschränkt wird, wenn man den Winkel, den die Applicaten mit der Axe machen, einem rechten Winkel gleich setzt. Eben dieses findet auch bey den Gleichungen der folgenden Ordnungen statt, ihr Umfang wird nicht geringer, wenn auch ihre Coordinaten rechtwinklig angenommen werden. Da also die allgemeinen Gleichungen, sie mögen zu einem Grade gehören, zu was für einem sie wollen, durch Veränderung des Coordinaten-Winkels nichts von ihrem Umfange verlieren, so werden wir auch ihre Bedeutung durch Annehmung rechtwinkliger Coordinaten nicht einschränken. Denn eben die Curve, die bey schiefwinkligen Coordinaten in einer Glei-

chung

chung enthalten ist, wird auch bey rechtwinkligen Coordinaten durch eben diese Gleichung ausgedruckt.

### §. 54.

Die Linien der zweyten Ordnung sind insgesammt in folgender allgemeinen Gleichung des zweyten Grades enthalten:

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2,$$

denn wir zählen alle Curven, welche durch diese Gleichung, wenn darin x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten, ausgedruckt werden, zur zweyten Ordnung der Linien. Da also die erste Ordnung keine Curve enthält, so sind dieses die einfachsten krummen Linien, und werden daher auch von einigen krumme Linien der ersten Ordnung genannt. Gewöhnlich heißen diese Curven Kegel-Schnitte, weil man sie auch durch Schneidung des Kegels erhalten kann, und es giebt davon mehrere Arten, den Kreis, die Ellipse, die Parabel, und die Hyperbel, welche wir weiter hin aus der allgemeinen Gleichung ableiten werden.

### §. 55.

Zur dritten Ordnung der Linien gehören alle Curven, welche folgende allgemeine Gleichung des dritten Grades an die Hand giebt:

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \vartheta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3;$$

wenn man darin x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten läßt, indem diese Gleichung durch Annehmung schiefwinkliger Coordinaten, wie wir bereits angemerkt haben, [§. 53.] keinen weitern Umfang bekommt. Da diese Gleichung eine weit größere Anzahl beständiger Größen, die man willkührlich bestimmen kann, enthält, als die vorhergehende, so begreift die gegenwärtige Ordnung auch eine weit größere Menge von Arten in sich, deren Classification man beym Newton findet.

§. 56.

Zur vierten Ordnung der Linien gehören alle Curven, welche durch folgende allgemeine Gleichung,

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \vartheta x^2 y + \iota xy^2 + \varkappa y^3 + \lambda x^4 + \mu x^3 y + \nu x^2 y^2 + \xi xy^3 + o y^4,$$

ausgedruckt werden, wenn x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten, indem die Gleichung bey schiefen Applicaten keine größere Allgemeinheit erhält. In dieser Gleichung sind funfzehn beständige Größen enthalten, die man nach Belieben annehmen kann, und daher ist die Verschiedenheit der Arten, die zu dieser Ordnung gehören, noch größer als bey der vorhergehenden Ordnung. Man nennt diese Linien der vierten Ordnung auch Curven der dritten Ordnung, weil man die zweyte Ordnung der Linien als die erste Ordnung der Curven betrachtet, und aus eben dem Grunde sind die Linien der dritten Ordnung mit den Curven der zweyten Ordnung einerley.

§. 57.

Hieraus läßt sich schon abnehmen, was für Curven zur fünften, sechsten, siebenten Ordnung 2c. gehören. Es besteht aber die allgemeine Gleichung für die Linien der fünften Ordnung, da darin zu der allgemeinen Gleichung für die Linien der vierten Ordnung noch die Glieder

$$x^5;\; x^4 y;\; x^3 y^2;\; x^2 y^3;\; xy^4;\; y^5$$

kommen, aus ein und zwanzig Gliedern, so wie die allgemeine Gleichung für die Linien der sechsten Ordnung deren acht und zwanzig in sich faßt, und überhaupt diese Menge der Glieder nach den Trigonal-Zahlen fortgeht. Es enthält

hält nemlich die allgemeine Gleichung für die Linien der nten Ordnung $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ Glieder, und eben so groß ist die Anzahl der in ihr befindlichen beständigen Größen, die man nach Belieben bestimmen kann.

§. 58.

Indeß führt nicht jede veränderte Bestimmung dieser beständigen Größen auf verschiedene krumme Linien. Denn da wir in dem vorhergehenden Capitel gesehen haben, daß man für eine und dieselbe Curve durch Veränderung der Axe und des Anfangspunktes der Abscissen unzählige Gleichungen finden kann, so dürfen wir aus der Verschiedenheit der Gleichungen, die zu einem und demselben Grade gehören, nicht auf eine Verschiedenheit der durch sie ausgedruckten Curven schließen. Es wird daher bey der Herleitung der Geschlechter und Arten, die unter einer Ordnung begriffen sind, aus der allgemeinen Gleichung viel Behutsamkeit erfordert, wenn man nicht Gefahr laufen will, eine und dieselbe Curve zu zwey und mehreren Arten zu rechnen.

§. 59.

Da man also aus dem Grade der zwischen den Coordinaten gegebenen Gleichung die Ordnung der Curve beurtheilt, so ist man, sobald eine algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten $x$ und $y$ gegeben ist, im Stande, sogleich zu bestimmen, zu was für einer Ordnung die durch jene Gleichung ausgedruckte Curve gehöret. Doch muß man, wenn die Gleichung irrational ist, dieselbe zuvor von ihrer Irrationalität befreyen, und überdem daraus auch die etwa vorkommenden Brüche wegschaffen, worauf denn die höchste

Zahl der Dimensionen der in ihr befindlichen veränderlichen Größen x und y die Ordnung der Curve anzeiget. So gehört z. B. die durch die Gleichung $yy - ax = 0$ ausgedruckte Curve zur zweyten Ordnung, hingegen die Linie, auf welche die Gleichung $yy = x\sqrt{(aa - xx)}$ führt, zur vierten Ordnung, weil man aus dieser Gleichung durch Wegbringung der Irrationalität eine Gleichung vom vierten Grade erhält. Die Linie, welche durch die Gleichung $y = \frac{a^3 - axx}{aa + xx}$ ausgedruckt wird, ist eine Linie der dritten Ordnung, weil man aus dieser Gleichung durch Wegschaffung des Bruchs $aay + xxy = a^3 - axx$ bekömmt, und das Glied $xxy$ drey Dimensionen hat.

## §. 60.

Es können aber in einer und derselben Gleichung mehrere von einander verschiedene Curven enthalten seyn, je nachdem man die Applicaten senkrecht oder unter einem gegebenen Winkel gegen einander geneigt annimmt. So giebt die Gleichung $yy = aa - xx$ bey rechtwinkligen Coordinaten den Kreis, bey schiefwinkligen hingegen die Ellipse. Alle diese verschiedenen Curven gehören indeß zu einer und derselben Ordnung, weil die Verwandlung der schiefwinkligen Coordinaten in rechtwinklige auf die Ordnung der Curven keinen Einfluß hat, [§. 51 u. 53] Ob also gleich die allgemeinen Gleichungen für die krummen Linien, ihre Ordnung mag seyn, welche sie will, durch den Winkel, welchen die Applicaten mit der Axe machen, weder einen weitern, noch einen engern Umfang bekommen; so ist doch bey den speciellen Gleichungen für die krummen Linien die dadurch ausgedruckte Curve nicht eher bestimmt, als bis

der

der Winkel unter welchen die Coordinaten gegen einander geneigt sind, bestimmt ist.

§. 61.

Soll eine Curve zu der Ordnung, welche durch ihre Gleichung angezeigt wird, ganz eigentlich gehören, so muß die gedachte Gleichung nicht in rationale Faktoren aufgelöset werden können. Denn hat eine Gleichung zwey oder mehrere Faktoren, so ist sie ein Inbegriff mehrerer Gleichungen, davon jede eine krumme Linie enthält, die zusammengenommen der gegebenen Gleichung entsprechen. Wenn also eine Gleichung in Faktoren aufgelöset werden kann, so druckt sie nicht eine sondern mehrere continuirliche Curven aus, davon eine jede durch eine besondere Gleichung angezeigt werden kann, und die weiter keine Verbindung unter einander haben, als daß ihre Gleichungen in der gegebenen Gleichung mit einander multiplicirt worden sind. Da diese Verbindung von unserer Willkühr abhängt, so können dergleichen Curven nicht als continuirliche Curven betrachtet werden, und es geben daher die Gleichungen, die wir oben [im ersten Buche, im 5ten Capitel, §. 95.] complexe Gleichungen genannt haben, keine continuirliche, sondern aus continuirlichen zusammengesetzte Linien, die wir daher mit dem Namen der complexen Linien belegen wollen.

§. 62.

So besteht die Gleichung $yy = ay + xy - ax$, die zu einer Linie der zweyten Ordnung zu gehören scheint, wenn man sie auf o reducirt, oder daraus $yy - ay - xy + ax = 0$ macht, aus den beyden Faktoren $(y - x)(y - a) = 0$; und faßt daher die beyden Gleichungen

$y - x = 0$, und $y - a = 0$ in sich. Diese beyden Gleichungen gehören zu geraden Linien, und zwar die erste zu einer solchen, die die Axe in dem Anfangspunkte der Abscissen unter einem halben rechten Winkel schneidet, und die andere zu einer solchen, die mit der Axe parallel läuft, und von ihr um a entfernt ist; und diese beyden geraden Linien werden also zugleich durch die Gleichung $yy = ay + xy - ax$ ausgedruckt. Eben so ist die Gleichung $y^4 - xy^3 - aaxx - ay^3 + axxy + aaxy = 0$ eine complexe Gleichung, und es druckt daher dieselbe keine continuirliche Linie der vierten Ordnung aus, sondern sie enthält, da sie aus den Faktoren $(y - x)(y - a)(yy - ax)$ besteht, drey verschiedene Linien, zwey gerade, und eine in der Gleichung $yy = ax$ enthaltene krumme Linie.

§. 63.

Es ist daher leicht, complexe Linien, die zwey oder mehrere, gerade oder krumme, Linien, von was für einer Art man will, enthalten, zu finden. Denn druckt man jede dieser Linien für eine und dieselbe Axe und denselben Anfangspunkt der Abscissen durch eine auf o gebrachte Gleichung aus, so hat man in dem Produkte dieser Gleichungen eine complexe Gleichung, welche alle jene Linien in sich begreift. Wäre z. B. Fig. 16 aus dem Mittelpunkte C mit dem Radius $CA = a$ ein Kreis beschrieben, und durch den Mittelpunkt desselben die gerade Linie LN gezogen, so könnte man hiernach für jede Axe eine Gleichung finden, welche den Kreis und die gerade Linie, als wenn beyde nur eine Linie wären, zusammen in sich enthielte.

§. 64.

Man nehme den Durchmesser AB, welche die gerade Linie LN unter einem halben rechten Winkel schneide, zur Axe,

Axe, und darauf den Anfangspunkt der Abscissen in A an, und setze die Abscisse $AP = x$, und die Applicate $PM = y$. Alsdann ist, für die gerade Linie, $PM = CP = a - x$, und weil der Punkt M auf der Seite der negativen Applicaten liegt, $y = -a + x$, oder $y - x + a = 0$. Für den Kreis hingegen findet man, weil $PM^2 = AP.PB$, und $BP = 2a - x$ ist, $yy = 2ax - xx$, oder $yy + xx - 2ax = 0$. Multiplicirt man also diese beyden Gleichungen mit einander, so bekommt man folgende complexe Gleichung vom dritten Grade,

$$y^3 - y^2x + yxx - x^3 + ayy - 2axy + 3axx - 2aax = 0,$$

welche sowohl den Kreis als die gerade Linie in sich enthält. Es gehören nemlich darin zu jeder Abscisse $AP = x$ drey Applicaten, zweye für den Kreis, und eine für die gerade Linie. Denn setzt man z. B.

$$x = \frac{1}{2}a, \text{ so wird}$$

$$y^3 + \frac{1}{2}ay^2 - \frac{3}{4}aay - \frac{3}{8}a^3 = 0, \text{ und also}$$

$$\text{I. } y + \frac{1}{2}a = 0, \text{ oder } y = -\frac{1}{2}a.$$

Ferner erhält man durch die Division mit der gefundenen Wurzel

$$yy - \frac{3}{4}aa = 0, \text{ und es ist daher auch}$$

$$\text{II. } y = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$\text{III. } y = -\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

Es wird demnach der Kreis und die gerade Linie LN durch die gefundene Gleichung ausgedruckt, als wenn beyde Linien eine einzige continuirliche Linie wären.

§. 65.

§. 65.

Nachdem wir diesen Unterschied zwischen complexen und incomplexen Curven bemerkt haben, so ist klar, daß die Linien der zweyten Ordnung entweder continuirliche Curven, oder aus zwey geraden Linien zusammengesetzte complexe Linien sind; denn hat die allgemeine Gleichung Faktoren, so sind dieselben einfach, und drucken also gerade Linien aus. Die Linien der dritten Ordnung aber sind entweder incomplexe oder aus einer geraden Linie und einer Linie der zweyten Ordnung, oder aus drey geraden Linien zusammengesetzte complexe Linien. Ferner sind die Linien der vierten Ordnung entweder continuirliche Linien, oder complexe, die aus einer geraden Linie, und einer Linie der dritten Ordnung, oder aus zwey Linien der zweyten Ordnung, oder aus einer Linie der zweyten Ordnung und zwey geraden Linien, oder endlich aus vier geraden Linien zusammengesetzt sind. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den complexen Linien der fünften und der übrigen höhern Ordnungen. Hieraus erhellet, daß jede Linie von einer höhern Ordnung alle Linien der niedern Ordnungen unter sich begreift, aber diese nicht allein, sondern es ist jede Linie der niedern Ordnungen verbunden, entweder mit geraden Linien, oder mit Linien der zweyten, der dritten und der folgenden Ordnungen, doch so, daß allemal die Summe der Ordnungszahlen der einfachen Linien der Ordnungszahl der complexen Linie gleich ist.