Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Zweytes Capitel. Von der Veränderung der Coordinaten.

Zweytes Capitel.

Von der Veränderung der Coordinaten.

§. 23.

So wie man eine, durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y, wovon jenes die Abscissen und dieses die Applicaten bedeutet, gegebene Curve über der Axe RS (Fig. 2.) beschreiben kann, wenn man in dieser Axe den Anfangspunkt der Abscissen A nach Belieben annimmt: so kann man auch umgekehrt jede bereits beschriebene Curve durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten ausdrucken. Ob aber gleich in diesem Falle die Curve selbst gegeben ist, so bleiben doch zwey Stücke unserer Willkühr überlassen, nemlich die Lage der Axe RS, und der Anfangspunkt der Abscissen A. Da nun diese Dinge auf unzählige Arten verändert werden können, so lassen sich auch für eine und dieselbe Curve unzählige Gleichungen finden, und man darf daher nicht sogleich von der Verschiedenheit der Gleichungen auf die Verschiedenheit der durch sie ausgedruckten Curven schließen, wenn gleich umgekehrt verschiedene Curven allemal verschiedene Gleichungen geben.

§. 24.

Ob also gleich durch Veränderung der Axe und des Anfangspunktes der Abscissen unzählige Gleichungen, die aber alle die Natur einer und derselben Curve ausdrucken, ent-

stehen:

stehen: so sind doch alle diese Gleichungen so beschaffen, daß man aus jeder von ihnen alle übrige abzuleiten im Stande ist. Ist nemlich eine Gleichung zwischen den Coordinaten bekannt, so kennt man dadurch auch die Curve; kennt man aber diese, so kann man auch, wenn man irgend eine gerade Linie zur Axe, und irgend einen Punkt darin zum Anfangspunkte der Abscissen annimmt, die Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten finden. Es soll also in diesem Capitel die Art und Weise gelehret werden, wie man aus einer für eine Curve gegebenen Gleichung eine andere Gleichung finden kann, welche die Natur eben dieser Curve für jede andere Axe und für jeden andern Anfangspunkt der Abscissen ausdruckt. Auf diese Art werden wir alle Gleichungen kennen lernen, welche die Natur einer und derselben Curve darstellen, und dadurch in den Stand gesetzt werden, die Verschiedenheit der krummen Linien aus der Verschiedenheit ihrer Gleichungen leichter zu beurtheilen.

§. 25.

Es sey also eine Gleichung zwischen x und y gegeben, aus welcher, wenn man Fig. 7. die gerade Linie RS zur Axe, und den Punkt A zum Anfangspunkte der Abscissen annimmt, und x die Abscisse AP, so wie y die Applicate PM bedeuten läßt, die krumme Linie CBM entspringe, und folglich die Natur dieser krummen Linie durch die gegebene Gleichung ausgedruckt werde. Behält man hier zuvörderst die Axe bey, nimmt aber in derselben einen andern Punkt D zum Anfangspunkte der Abscissen an, so daß nunmehr zu dem Punkte der Curve M die Abscisse DP = t gehöret, die Applicate MP = y aber dieselbe bleibt: so läßt sich auf folgende Art eine Gleichung zwischen t und y finden, welche ebenfalls die Natur der Curve CBM ausdruckt. Man setze AD = f, wodurch denn, da AD nach der Linken zu liegt, DP = t = f + x, und folglich x = t − f wird, und bringe darauf diesen Werth von x in die zwischen x und y gegebene Gleichung. Da nun die Größe von AD = f unserer Willkühr überlassen bleibt, so erhält man schon auf diesem Wege unzählige Gleichungen, die alle eben dieselbe krumme Linie ausdrucken.

§. 26.

Wenn die Curve die Axe RS in irgend einem Punkte z. B. in C, schneidet, so erhält man, wenn man diesen Punkt C zum Anfangspunkte der Abscissen annimmt, eine Gleichung, welche, wenn die Abscisse CP = o ist, auch die Applicate PM = o giebt, vorausgesetzt, daß dem Punkte der Axe C nicht mehr als eine Applicate zugehört. Den Punkt C aber findet man, er mag nun der einzige Durchschnittspunkt seyn, oder es mag deren mehrere geben, aus der zuerst gegebenen Gleichung zwischen x und y, wenn man y = o setzt, und dann daraus den Werth oder die Werthe von x entwickelt. So wie nemlich da, wo die Curve die Axe schneidet, y = o wird, so muß man auch, wenn man y = o setzt, aus der Gleichung alle die Abscissen oder Werthe von x finden, wo die Curve die Axe trifft.

§. 27.

Es wird also der Anfangspunkt der Abscissen, wenn man die Axe beybehält, verändert, wenn man die Abscisse x um eine gegebene Größe vermehrt oder vermindert, d. h. wenn man t − f für x setzt; und dabey ist f eine positive Größe, wenn man den neuen Anfangspunkt der Abscissen D auf der linken Seite von A annimmt, und eine negative,

wenn

wenn man D auf der rechten Seite eben dieses Punktes fallen läßt.

Nun wollen wir annehmen, daß die Curve LBM Fig. 8. nach einer zwischen AP = x, und PM = y gegebenen Gleichung beschrieben sey, und daß dieselbe eine andere der ersten parallele Axe rs, und darin D zum Anfangspunkte der Abscissen erhalten solle. Zugleich falle die Axe rs auf die Seite der negativen Applicaten, und zwar so, daß ihre Entfernung von der ersten AF = g, und die Entfernung DF = AG = f sey. Setzt man also die Abscisse, die auf dieser neuen Axe zu dem Punkte der Curve M gehört, oder DQ = t, und die Applicate QM = u, so wird t = DF + FQ = f + x, und u = PM + PQ = g + y, folglich

$$x = t - f; \text{ und } y = u - g.$$

Wenn man daher in der gegebenen Gleichung allenthalben t — f für x, und u — g für y setzt, so bekommt man eine Gleichung zwischen t und u, welche die Natur eben derselben Curve ausdruckt.

§. 28.

Da die Größen f und g willkührlich angenommen, und also unendlich verändert werden können, so kann man auf dem jetzt beschriebenen Wege unzähligemal mehr Gleichungen erhalten, als auf dem vorhin [§. 25] erwähnten; aber alle diese Gleichungen drucken demohngeachtet nicht mehr als eine krumme Linie aus. Wenn also zwey Gleichungen, die eine zwischen x und y, und die andere zwischen t und u, bloß so von einander unterschieden sind, daß man jede von ihnen durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Coordinaten in die andere verwandeln kann, so geben diese Gleichungen bey aller ihrer Verschiedenheit dennoch nicht mehr als eine Curve. Es lassen sich daher sehr leicht unzählige von einander verschiedene Gleichungen machen, die bey aller ihrer Abweichung von einander doch nicht mehr als eine Curve ausdrucken.

§. 29.

Es sey nunmehr Fig. 9. die neue Axe rs auf der ersten RS senkrecht, und schneide dieselbe in dem Anfangspunkte der Abscissen A, so daß also beyde Axen den Anfangspunkt der Abscissen mit einander gemein haben. Da man für die Axe RS eine die Curve LM ausdruckende Gleichung zwischen der Abscisse AP = x, und der Applicate PM = y hat, so ziehe man aus dem Punkte der Curve M auf die neue Axe rs die Linie MQ senkrecht, und setze die neue Abscisse AQ = t, und die neue Applicate QM = y, wo denn, weil APMQ ein Rechteck ist, t = y, und u = x wird. Man kann also aus der gegebenen Gleichung zwischen x und y eine neue Gleichung zwischen t und u machen, wenn man u für x, und t für y setzt. Hier wird nun die erste Abscisse x in die Applicate QM = u, und die Applicate y in die Abscisse AQ = t verwandelt, und es geht daher in dem angenommenen Falle bey Annehmung einer neuen Axe weiter keine Veränderung vor, als daß die Coordinaten mit einander verwechselt werden. Aus diesem Grunde nennt man daher auch die Abscissen und Applicaten Coordinaten, ohne dabey zu unterscheiden, welches die Abscisse und welches die Applicate sey. Denn wenn eine Gleichung zwischen zwey Coordinaten x und y gegeben ist, so erhält man eine und dieselbe Curve, man mag x oder y für die Abscisse nehmen.

§. 30.

Wir haben hier angenommen, daß das Stück As der neuen Axe rs die positiven Abscissen enthalte, und daß die posi-

positiven Applicaten auf die rechte Seite der Axe r s fallen; aber da dieses unserer Willkühr überlassen ist, so kann man damit nach Gefallen ändern. Bestimmt man nemlich das Stück A r für die positiven Abscissen, so ist A Q = — t, und dann muß man in der Gleichung zwischen x und y für y setzen — t. Bestimmt man ferner die rechte Seite der Axe r s für die negativen Applicaten, so wird Q M = — u, und man muß alsdann — u für x setzen. Hieraus erhellet, daß die Curve dieselbe bleibt, wenn man gleich in der Gleichung zwischen den Coordinaten eine oder beyde Coordinaten negativ annimmt; und dies hat man sich für alle Veränderungen der Gleichungen zu merken.

§. 31.

Es schneide ferner Fig. 10. die neue Axe r s die erste R S unter einem beliebigen Winkel S A s, und zwar in dem Anfangspunkte der Abscissen A, so daß dieser Punkt in beyden Axen der Anfangspunkt der Abscissen sey. Ferner sey für die Axe R S eine die Curve L M ausdruckende Gleichung zwischen der Abscisse A P = x, und der Applicate P M = y gegeben, und daraus die Gleichung für eben dieselbe Curve für die Axe r s zu finden. Oder es sey aus dem Punkte der Curve M auf die neue Axe die senkrechte Linie M Q herabgefällt, und die Gleichung zwischen der neuen Abscisse A Q = t, und der Applicate M Q = u zu finden. Setzt man den Winkel S A s = q, seinen Sinus = m, seinen Cosinus = n, und den Radius = 1, so wird m m + n n = 1. Zieht man ferner aus P die Linien P p und P q senkrecht auf die neuen Coordinaten, so wird, weil A P = x, ist.

$P p = x. \sin. q$, und $A p = x. \cos. q$

und, weil $P M Q = P A Q = q$, und $P M = y$ ist,

$P q = Q p = y. \sin. q$; und $M q = y. \cos. q$.

Hieraus fließet

$AQ = t = Ap - Qp = x . \cos. q - y . \sin. q$; und

$QM = u = Mq + Pp = x . \sin. q + y . \cos. q$.

§. 32.

Da aber $\sin. q = m$, und $\cos. q = n$ ist, so wird ferner

$t = nx - my$; und $u = mx + ny$; und folglich

$x = nt + mu = nnx + mmx$, und

$y = nu - mt = nny + mmy$.

Man findet also die gesuchte Gleichung zwischen t und u wenn man in der Gleichung zwischen x und y allenthalben $nt + mu$ für x, und $nu - mt$ für y schreibt, vorausgesetzt, daß der Theil As der Axe die positiven Absciſſen enthalte, und die positiven Applicaten auf die Seite von QM fallen. Auch haben wir hier angenommen, daß der Winkel SAs auf der Seite der negativen Applicaten liege; fiele As über AS, so müßte man in der Rechnung den Winkel $SAs = q$ als negativ betrachten, und daher auch seinen Sinus m negativ nehmen.

§. 33.

Endlich sey Fig. 11. die Lage der neuen Axe ohne alle weitere Bedingung angenommen, und so auch der Anfangspunkt der Absciſſen D in derselben. Ferner sey RS die erste Axe, wobey man eine Gleichung für die Curve LM zwischen der Absciſſe $AP = x$, und der Applicate $PM = y$ habe, und daraus eine Gleichung zwischen andern Coordinaten t und u, die sich auf die neue Axe rs beziehen, zu finden. Man fälle aus irgend einem Punkte der Curve M die Linie MQ senkrecht auf rs, und setze die Absciſſe $DQ = t$, und die Applicate $QM = u$. Ferner ziehe man, um die Gleichung zwischen diesen Coordinaten zu finden, aus dem

neuen

neuen Anfangspunkte der Abscissen D die Linie DG auf die erste Axe RS senkrecht, und setze $AG = f$, und $DG = g$. Dann lege man durch D die gerade Linie DO der ersten Axe RS parallel, und lasse sie von der verlängerten Applicate PM in O schneiden, wodurch man $MO = y + g$, und $DO = GP = x + f$ erhält. Endlich setze man den Winkel $ODQ = q$, seinen Sinus $= m$, den Cosinus $= n$, und den Radius ein für allemal $= 1$, so daß also wieder $mm + nn = 1$ sey.

§. 34.

Zieht man nunmehr aus dem Punkte O sowohl auf die neue Axe DQ als auf die Applicate MQ die Linien Op und Oq senkrecht, so wird, da $OMQ = ODQ$, und $DO = x + f$, und $MO = y + g$ ist,

$$Op = Qq = (x + f) .\ \text{sin}.\ q = mx + mf,$$
$$\text{und } Dp = (x + f)\ \text{cos}.\ q = nx + nf;$$
$$Oq = Qp = (y + g)\ \text{sin}.\ q = my + mg,$$
$$\text{und } Mq = (y + g)\ \text{cos}.\ q = ny + ng.$$

Hieraus fließen folgende Bestimmungen der neuen Coordinaten t und u aus x und y:

$$DQ = t = nx + nf - my - mg, \text{ und}$$
$$QM = u = mx + mf + ny + ng,$$

Da sich aber daraus, weil $mm + nn = 1$ ist,

$$nt + mu = x + f, \text{ und } nu - mt = y + g$$

ergiebt, so bekommt man hieraus

$$x = mu + nt - f; \text{ und } y = nu - mt - g.$$

Bringt man daher diese Werthe von x und y in die Gleichung zwischen x und y, so findet man die Gleichung zwischen t und u, welche die Natur eben dieser Curve ausdruckt.

§. 35.

Da sich keine Axe rs denken läßt, die mit der Curve in derselben Ebene läge, und in dieser letzten Bestimmung nicht enthalten wäre; so giebt es auch keine Gleichung für die Curve LM zwischen rechtwinkligen Coordinaten, die nicht in der zwischen t und u gefundenen Gleichung begriffen seyn sollte. Ob also gleich die Größen f und g nebst dem Winkel q, wovon m und n abhangen, auf unzählige Arten verändert werden können, so drucken doch alle Gleichungen die in der zwischen t und u auf die beschriebene Art gefundenen Gleichung enthalten sind, die Natur einer und derselben Curve aus. Man pflegt daher diese Gleichung zwischen t und u die allgemeine Gleichung für die Curve LM zu nennen, weil dieselbe alle Gleichungen, die zu eben dieser krummen Linie gehören, ohne Ausnahme in sich faßt.

§. 36.

Es ist schon oben [§. 23.] angemerkt worden, daß man nicht allemal aus der Verschiedenheit zweyer oder mehrerer zwischen Coordinaten gegebenen Gleichungen auf eine Verschiedenheit unter den durch sie ausgedruckten Curven schliessen könne: jetzt sind wir im Stande, solches genauer zu bestimmen. Sind nemlich zwey Gleichungen, die eine zwischen x und y, und die andere zwischen t und u gegeben, so setze man in der ersten $x = mu + nt - f$, und $y = nu - mt - g$, und lasse dabey m und n so von einander abhangen, daß $mm + nn = 1$ sey. Hierauf untersuche man, ob die andere Gleichung zwischen t und u in der dadurch gefundenen Gleichung enthalten sey, oder ob die Buchstaben f, g, m und n so bestimmt werden können, daß man daraus die gedachte andere Gleichung zwischen t und u erhalte. Ist dieses möglich, so drucken beyde Gleichungen eine und

die-

dieselbe Curve aus, wo nicht, so gehören sie zu verschiedenen krummen Linien.

Exempel.

Auf diese Art wird erhellen, daß folgende zwey Gleichungen

$$yy - ax = 0$$

und

$$16uu - 24tu + 9tt - 55au + 10at = 0$$

bey ihrer großen Verschiedenheit von einander dennoch zu einer und derselben krummen Linie gehören. Denn setzt man in der ersten Gleichung

$x = mu + nt - f$; und $y = nu - mt - g$;

so verwandelt sich dieselbe in

$$\left.\begin{array}{l} nnuu - 2mntu + mmtt - 2ngu + 2mgt + gg \\ \qquad - mau - nat + af \end{array}\right\} = 0.$$

Um nun zu finden, ob die zweyte von den gegebenen Gleichungen hierin enthalten sey, multiplicire man dieselbe mit nn, und die gefundene mit 16, damit die ersten Glieder von beyden gleich werden. Hierdurch bekommt man

$$16nnuu - 24nntu + 9nntt - 55nnau + 10nnat = 0$$

und

$$\left.\begin{array}{l} 16nnuu - 32mntu + 16m^2tt - 32ngu + 32mgt + 16gg \\ \qquad - 16mau - 16nat + 16af \end{array}\right\} = 0$$

Ferner untersuche man, wie viel Glieder durch Bestimmung der willkührlichen Größen f, g, m und n einander gleich gemacht werden können. Hier hat man nun zuvörderst

$$24nn = 32mn, \text{ und } 9nn = 16mm$$

und aus jeder dieser Gleichung folgt

$$3^n = 4m.$$

Weil

Weil aber $mm = 1 - nn$ ist, so ergiebt sich aus der zweyten außerdem

$$25nn = 16, \text{ und also}$$

$$n = \frac{4}{5}, \text{ und } m = \frac{3}{5}$$

und es stimmen daher schon drey Glieder mit einander überein. Das vierte und fünfte Glied geben

$55nna = 32ng + 16ma$; und $10nna = 32mg - 16na$ und hier kommt es nun darauf an, zu untersuchen, ob beyde Gleichungen einerley Werth für g geben. Nun fließt aus der ersten

$$g = \frac{55na}{32} - \frac{ma}{2n} = \frac{11a}{8} - \frac{3a}{8} = a$$

und aus der zweyten

$$g = \frac{5nna}{16m} + \frac{na}{2m} = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} = a$$

Beyde Werthe stimmen also mit einander überein, und so sind schon fünf Glieder einander gleich. Es ist folglich weiter nichts übrig, als daß $gg + af = 0$ sey; welches da f noch nicht bestimmt ist, ohne Schwierigkeit erhalten wird, weil man nur $f = -a$ zu setzen braucht. Es ist also gezeigt worden, daß die beyden gegebenen Gleichungen zu einer und derselben krummen Linie gehören.

§. 37.

Ob indeß gleich sehr von einander verschiedene Gleichungen eine und dieselbe Curve ausdrucken können, so giebt es doch auch Fälle, wo die Verschiedenheit der Gleichungen ein sicheres Kennzeichen der Verschiedenheit der durch sie ausgedruckten Curven ist. Dies ist allemal, wenn die gegebenen Gleichungen zu verschiedenen Ordnungen oder Graden gehören, d. h. wenn die höchsten Dimensionen der Coordinaten x und y, t und u verschieden sind, denn alsdann sind die durch die gedachten Gleichungen ausgedruckten Curven nie dieselben. Es mag nemlich eine Gleichung zwischen x und y zu einem Grade gehören, zu was für einem sie will, so erhält man allemal, wenn man darin $x = mu + nt - f$, und $y = nu - mt - g$ setzt, eine Gleichung zwischen t und u von eben demselben Grade. Wenn also eine andere Gleichung zwischen t und u zu einem andern Grade gehört, so druckt sie auch eine andere Curve aus.

§. 38.

Wenn also zwey Gleichungen, die eine zwischen x und y, und die andere zwischen t und u, nicht zu einerley Graden gehören, so schließt man daraus sogleich mit Recht auf die Verschiedenheit der durch sie ausgedruckten Curven. Nur dann also, wenn beyde Gleichungen zu einem und demselben Grade gehören, kann man ungewiß seyn, und in diesem Falle hat man also auch nur nöthig, die vorhin beschriebene Untersuchung anzustellen. Da indeß der erklärte Weg sehr weitläuftig und beschwerlich wird, wenn die Gleichungen zu einem höhern Grade gehören, so werden unten andere Regeln gegeben werden, wornach man die Verschiedenheit der Curven auf eine leichtere Art zu beurtheilen im Stande seyn wird.

§. 39.

Die Vorschriften, die bisher zur Erfindung einer allgemeinen Gleichung für die krummen Linien gegeben worden sind, lassen sich auch bey der geraden Linie gebrauchen. Denn ist Fig. 12 anstatt einer Curve die gerade Linie LM, welche der Axe RS parallel seyn soll, gegeben, so hat die Applicate PM, man mag den Anfangspunkt der Abscissen an-

annehmen, wo man will, immer dieselbe Größe, oder es ist allenthalben $y = a$, und diese Gleichung ist also die Gleichung einer mit der Axe parallel gezogenen geraden Linie. Um nun die allgemeine Gleichung für die gerade Linie, wobey die Axe rs jede Lage haben kann, zu finden, setze man $DG = g$; $\sin. ODs = m$, $\cos. ODs = n$, desgleichen die Absciſſe $DQ = t$, und die Applicate $MQ = u$. Da also

$$y = nu - mt - g,$$

ist, so wird

$$nu - mt - g - a = o$$

und dieses ist eine allgemeine Gleichung für die gerade Linie. Multiplicirt man dieselbe durch die beständige Größe k, und setzt man dabey $nk = \alpha$, $mk = -\beta$, und $(g + a)k = -b$, so erhält man daraus zur allgemeinen Gleichung für die gerade Linie

$$\alpha u + \beta t + b = o.$$

Da diese Gleichung die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen t und u ist, so erhellet hieraus, daß jede Gleichung zwischen zwey Coordinaten, die zum ersten Grade gehört, keine krumme, sondern eine gerade Linie ausdrucke.

§. 40.

So oft sich daher eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y von der Form

$$\alpha x + \beta y - a = o$$

ergiebt, so hat man dadurch allemal eine gerade Linie, deren Lage gegen die Axe RS Fig. 13. auf folgende Art bestimmt werden kann. Man setzet zuvörderst $y = o$, und findet dadurch den Punkt C in der Axe, wo die gerade Linie, die durch die Gleichung ausgedruckt wird, die Axe

schnei-

schneidet, indem alsdann $AC = \frac{a}{\alpha}$ wird. Ferner setzt man $x = o$, wodurch man $y = \frac{a}{\beta}$ erhält, welches der Werth der Applicate in dem Anfangspunkte der Abscissen ist. Da man auf diese Art zwey Punkte hat, die in der gesuchten geraden Linie liegen, so ist dadurch die ganze gerade Linie bestimmt, und es entspricht folglich die Linie LM der gegebenen Gleichung. Denn setzt man eine nach Belieben angenommene Abscisse $AP = x$, und die zu ihr gehörige Applicate $PM = y$, so hat man wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke CPM und CAB

$$CP : PM = CA : AB;\ \text{d. h.}$$

$$\frac{a}{\alpha} - x : y = \frac{a}{\alpha} : \frac{a}{\beta}$$

Hieraus aber fließt

$$\frac{ay}{\alpha} = \frac{aa}{\alpha\beta} - \frac{ax}{\beta},\ \text{oder}$$

$$\alpha x + \beta y = a$$

und dieses ist die gegebene Gleichung.

§. 41.

Wenn entweder α oder $\beta = o$ ist, so findet zwar die beschriebene Construction nicht statt, indeß sind diese Fälle an sich sehr leicht. Denn ist $\alpha = o$, und $y = a$, so ist klar, daß diese Gleichung eine gerade Linie ausdruckt, die der Axe parallel, und von ihr um a entfernt ist; ist aber $a = o$, oder $y = o$, so fällt die durch die Gleichung ausgedruckte Linie mit der Axe zusammen. Wird hingegen $\beta = o$, und $x = a$, so ist die Linie, welche der Gleichung ein Genüge thut, auf der Axe senkrecht, und zwar in dem vom Anfangspunkte der Abscissen um a entfernten Punkte.

sind, und sein Sinus $= \mu$, so wie sein Cosinus $= \nu$; au sey eine Gleichung zwischen $AQ = t$, und $QM = u$ g geben. Zieht man aus M die Applicate MP auf die A senkrecht, so wird, wenn man $AP = x$, und $MP =$ setzt,

$$u = \frac{y}{\mu};\ \text{und}\ t = \frac{\nu y}{\mu} + x$$

und bringt man daher diese Werthe in die zwischen t und gegebene Gleichung, so erhält man daraus die Gleichu zwischen x und y, welche man suchte.

§. 45.

Ist für die Curve LM Fig. 15 eine Gleichung zwisch den rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$, und $PM =$ gegeben, so findet man die allgemeinste Gleichung für eb diese Curve auf folgende Art. Man nehme irgend eine ge rade Linie rs zur Axe, und darin D zum Anfangspunk der Abscissen an. Ferner setze man den Winkel DTM welchen die Applicaten MT mit der Axe machen, $= \phi$ seinen Sinus $= \mu$ und seinen Cosinus $= \nu$, so daß als die neuen Applicaten, zwischen welchen die Gleichung ge sucht wird, DT und TM seyn. Dann ziehe man aus D die Linie DG auf die vorige Axe RS senkrecht, nehm $AG = f$, $DG = g$, und nachdem man DO der Axe RS parallel gezogen, $\sin. ODs = m$, und $\cos. ODs = n$. Endlich fälle man, wie vorhin, aus M die Linie MQ au die Axe rs senkrecht herab, und setze $DQ = t$, und $QM = u$ die schiefwinkligen Coordinaten aber $DT = r$, und $TM = s$. Alsdann ist zuvörderst

$t = r - \nu s$; und $u = \mu s$ (§. 43); und zweytens

$x = mu + nt - f$; und $y = nu - mt - g$ (§. 36.)

Hieraus aber fließt

$$x = nr - (n\nu - m\mu)s - f, \text{ und}$$
$$y = -mr + (\mu n + \nu m)s - g$$

und dabey ist $n\nu - m\mu = \cos. AVM$ oder dem Cosinus des Winkels, welchen die neuen Applicaten mit der vorigen Axe RS einschließen, und $\mu n + \nu m = \sin. AVM$. Wenn man also in der zwischen x und y gegebenen Gleichung für x und y jene Werthe setzt, so erhält man daraus die allgemeinste Gleichung für die Curve LM zwischen den Coordinaten r und s.

§. 46.

Da die Werthe, welche man auf diese Art für x und y setzt, die veränderlichen Größen r und s nur in der ersten Dimension enthalten, so ist offenbar, daß die gefundene allgemeinste Gleichung zu eben der Ordnung gehöret, von welcher die zwischen x und y gegebene ist. Bey allen Veränderungen also, die man mit einer Gleichung für eine Curve vornehmen kann, indem man nach Belieben die Axe, oder den Anfangspunkt der Abscissen, oder den Coordinaten-Winkel anders nimmt, bleibt demohngeachtet die Ordnung oder der Grad der Gleichung unverändert. Ob man daher gleich jede zwischen rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten gegebene Gleichung auf unzählige Arten verändern kann, so, daß sie gleichwohl noch immer dieselbe Curve ausdruckt; so erhält man dabey doch nie eine Gleichung weder von einem höhern noch von einem niedrigern Grade. Und hierin liegt der Grund, warum Gleichungen von verschiedenen Graden, so ähnlich sie übrigens auch einander seyn mögen, dennoch allemal verschiedene Curven ausdrucken.
