Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Anhang von den Flächen.

Anhang
von
den Flächen.

Erstes Capitel.

Von den Oberflächen der Körper überhaupt.

§. 1.

Die Untersuchungen, welche wir in dem Vorhergehenden über die Curven angestellt haben, und die Art und Weise, diese Curven durch Gleichungen auszudrucken, haben allerdings einen sehr weiten Umfang, und erstrecken sich auf alle krumme Linien, deren Punkte insgesammt in einer und derselben Ebene liegen; wenn aber die Curve nicht ganz in eine und dieselbe Ebene fällt, so reichen die ertheilten Vorschriften nicht hin, ihre Eigenschaften zu entdecken. Diese Art der Curven hat eine doppelte Krümmung, und in dieser Rücksicht haben wir darüber vom Herrn Clairaut eine vortrefliche und scharfsinnige Abhandlung. Da indeß dieser Gegenstand mit der Lehre von den Flächen zusammenhängt, welche ich mir in dem gegenwärtigen Abschnitte vorzutragen vorgenommen habe, so werde ich davon nicht besonders handeln, sondern die Betrachtung desselben mit der folgenden Untersuchung über die Flächen verbinden.

§. 2.

So wie die Linien entweder gerade oder krumme Linien sind, so sind die Flächen entweder eben oder nicht eben;

unebene Flächen aber nenne ich sowohl die convexen als die concaven, und auch diejenigen, die theils convex theils concav sind. So ist die äußere Fläche einer Kugel, eines Cylinders und eines Kegels, wenn man von der Grundfläche abstrahirt, convex, die Fläche einer Schüssel hingegen concav. So wie man ferner unter einer geraden Linie diejenige versteht, in welcher jede drey Punkte nach einerley Richtung liegen, so ist eine Ebene diejenige, in welcher jede vier Punkte in eine und dieselbe Ebene fallen; woher denn die nicht ebene Fläche, sie mag convex oder concav seyn, als ein solche gedacht werden kann, worin man nicht durch jede vier Punkte Eine Ebene zu legen im Stande ist.

§. 3.

Wie eine unebne Fläche beschaffen sey, läßt sich leicht erkennen, wenn man weiß, wie weit sie in jedem Punkte von einer Ebene abstehe. So wie wir nemlich die Beschaffenheit der Curven aus den Entfernungen ihrer Punkte von einer zur Axe angenommenen geraden Linie zu beurtheilen im Stande sind: so kann man auch die Beschaffenheit einer unebenen Fläche aus der Entfernung ihrer Punkte von einer nach Belieben angenommenen Ebene abnehmen. Soll also die Beschaffenheit einer Fläche angegeben werden, so darf man nur nach Belieben eine Ebene annehmen, und sich aus jedem Punkte jener Fläche auf dieselbe senkrechte Linie gezogen gedenken; und kann man die Länge dieser senkrechten Linie durch eine Gleichung bestimmen, so wird diese Gleichung auch die Natur der gedachten Fläche ausdrucken. Aus einer solchen Gleichung lassen sich aber auch umgekehrt alle Punkte dieser Fläche angeben, und es wird daher durch dieselbe auch die Fläche selbst bestimmt.

§. 4.

Es stelle die Ebene der Kupfertafel die Ebene vor, auf welche alle Punkte einer gegebenen Fläche bezogen werden sollen. Ferner sey M, Fig. 119, irgend ein Punkt in der gegebenen Fläche außer der Ebene der Tafel, und aus demselben MQ auf diese Ebene senkrecht herabgefällt worden. Um nun die Lage dieses Punktes algebraisch auszudrucken, nehme man in der Ebene irgend eine gerade Linie AB zur Axe an, und ziehe auf dieselbe aus Q die gerade Linie QP senkrecht. Endlich nehme man in der Axe AB irgend einen Punkt A zum Anfangspunkte der Abscissen an. Ist dieses geschehen, so kennt man die Lage des Punktes M, wenn man die Länge der drey Linien AP, PQ, und QM weiß; und es wird demnach die Lage jedes Punktes M einer Fläche durch drey senkrechte Coordinaten auf eine ähnliche Art bestimmt, als solches bey den Punkten der Curven, die in einer Ebene lagen, durch zwey rechtwinklige Coordinaten geschehen ist.

§. 5.

Da wir also drey Coordinaten AP, PQ und QM haben, so wollen wir $AP = x$; $PQ = y$, und $QM = z$ setzen. Diese drey Coordinaten werden uns die Natur der gegebenen Fläche zu erkennen geben, wenn wir, nachdem wir x und y willkührlich angenommen haben, zu bestimmen im Stande sind, wie groß z ist; denn können wir dieses, so lassen sich alle Punkte M in der gedachten Fläche angeben. Es wird daher die Natur einer jeden Fläche durch eine Gleichung ausgedruckt, in welcher die Coordinate z durch die beyden übrigen Coordinaten x und y und durch beständige Größen bestimmt wird; und es ist daher für jede gegebene Fläche die veränderliche Größe z gleich einer Funktion zweyer veränderlichen Größen x und y. Umgekehrt druckt, wenn z irgend einer Funktion von x und y gleich ist, diese Gleichung eine Fläche aus, deren Natur sich aus ihr erkennen läßt. Setzt man demnach für x und y alle, sowohl positive als negative Werthe, die sie bekommen können, so erhält man alle Punkte Q der angenommenen Ebene; und dann ergiebt sich aus der Gleichung zwischen z, x und y die Länge der senkrechten Linie QM = z, von dieser Ebene bis zu der durch die Gleichung ausgedruckten Fläche. Ist z positiv, so liegt der Punkt M über der Ebene APQ; ist aber z negativ, so liegt M unter ihr; wird z = o, so fällt M in die Ebene, und wird es imaginär, so gehört zu dem Punkte Q in der Fläche gar kein Punkt M. Hat endlich z mehr reelle Werthe, so schneidet die auf der Ebene durch Q senkrecht aufgerichtete Linie die gegebene Fläche in mehr als in einem Punkte.

§. 6.

Will man also die verschiedenen Arten der Flächen bestimmen, so bietet sich sogleich die Abtheilung derselben in continuirliche oder reguläre, und in discontinuirliche oder irreguläre dar. Eine Fläche ist nemlich continuirlich, deren Punkte sich insgesammt durch eine und dieselbe Gleichung zwischen z, x und y ausdrucken lassen, oder wo z für alle Punkte dieselbe Funktion bleibt. Irregulär wird hingegen eine Fläche genannt, wenn die Theile derselben durch verschiedene Funktionen ausgedruckt werden, z. B. wenn dieselbe an einem Orte sphärisch, an einem andern conisch, an einem dritten cylindrisch oder eben ist. Diese irregulären Flächen setzen wir indeß hier ganz bey Seite, und betrachten blos die regulären, deren Natur durch eine und dieselbe Gleichung ausgedruckt wird. Denn kennt man

diese,

diese, so lassen sich darnach auch die irregulären, da sie aus regulären Theilen zusammengesetzt sind, leicht beurtheilen.

§. 7.

Die regulären Flächen werden zuvörderst in algebraische und in transcendente eingetheilt. Eine Fläche ist eine algebraische, wenn ihre Natur durch eine algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und z ausgedruckt wird, oder wenn z einer algebraischen Funktion von x und y gleich ist. Ist hingegen z keine algebraische Funktion von x und y, oder kommen in der Gleichung zwischen x, y und z transcendente Größen vor; z. B. solche die von Logarithmen oder Kreisgrößen abhangen, so ist die Fläche, die durch eine solche Gleichung ausgedruckt wird, eine transcendente. Dergleichen ist z. B. da, wenn $z = x \,.\, l.y$; oder $z = y^x$; oder $z = y \,.\, \sin. x$ ist Es fällt aber in die Augen, daß man die Untersuchung der algebraischen Flächen vor der Betrachtung der transcendenten vorhergehen lassen muß.

§. 8.

Ferner muß man, um die Natur einer Fläche kennen zu lernen, vor allen Dingen untersuchen, was z in Ansehung der Menge seiner Werthe für eine Funktion von x und y ist. Hier kommen zuerst diejenigen Flächen vor, wobey z eine einförmige Funktion von x und y ist. Es sey P eine solche einförmige oder rationale Funktion von x und y; so werden, wenn $z = P$ ist, den einzelnen Punkten der Ebene Q eben so viel Punkte der Fläche zugehören, oder es wird jede auf der Ebene APQ senkrecht aufgerichtete gerade Linie die Fläche in nicht mehr als in einem Punkte schneiden. In diesem Falle kann der Werth der geraden Linie QM nie imaginär werden, sondern es giebt

diese

diese gerade Linie allemal einen reellen Punkt in der Fläche. Es bringt indeß diese Verschiedenheit der Funktionen keine wesentliche Verschiedenheit unter den Flächen hervor; denn sie hängt von der Lage der Ebene APQ ab, welche eben so als die Lage der Axe willkührlich ist. Bezieht man daher dieselbe Fläche auf eine andere Ebene, so kann die Funktion z aus einer einförmigen in eine vielförmige übergehen.

§. 9.

Es seyen P und Q einförmige Funktionen von x und y; so werden, wenn

$$zz - Pz + Q = 0$$

ist, die geraden Linien, die aus den Punkten Q der angenommenen Ebene auf dieselbe senkrecht gestellt werden, die Fläche entweder in zweyen Punkten oder gar nicht schneiden; denn es hat dann z allemal zwey Werthe, die entweder beyde reell oder beyde imaginär sind. Auf ähnliche Art ist z, wenn P, Q und R einförmige Funktionen von x und y bedeuten, und

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$$

ist, eine dreyförmige Funktion, und jede gerade Linie QM schneidet die Fläche entweder in dreyen Punkten, wenn alle Wurzeln dieser Gleichung reell sind, oder nur in einem, wenn zwey von diesen Wurzeln imaginär sind. Auf ähnliche Art hat man zu urtheilen, wenn z durch eine Gleichung von mehrern Dimensionen bestimmt wird. Wie vielförmig also die Funktion z sey, erkennt man leicht, so bald man die Gleichung zwischen x, y und z rational gemacht hat.

§. 10.

So wie wir bey den Gleichungen der Curven gesehen haben, daß die beyden Coordinaten derselben verwechselt werden

werden können, so lassen sich auch in jeder Gleichung für eine Fläche die drey Coordinaten x, y und z mit einander verwechseln. Denn nimmt man zuvörderst in der Ebene APQ eine gerade auf AP senkrechte Linie Ap zur Axe an, so wird nun $Ap = y$ und $pQ = x$, und dadurch sind die beyden Coordinaten x und y mit einander vertauscht. Die übrigen Verwechselungen lernt man kennen, wenn man das rechtwinklige Parallelepipedum ApQMξπqPA ergänzt; bey welchem zuvörderst die drey beständigen und auf einander senkrechten Ebenen in Betrachtung kommen, APQp, APqπ, und Apξπ; denn die Art, wie die Fläche, worin der Punkt M liegt, auf diese Ebenen bezogen werden kann, wird durch eben dieselben Gleichung zwischen x, y und z angezeigt. In jeder Ebene aber giebt es eine doppelte Axe, die beyde in dem Punkte A anfangen, und daher entspringen also sechs verschiedene Beziehungen zwischen den drey Coordinaten.

Die Coordinaten sind

für die Ebene APQp entweder $\begin{cases} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{cases}$

oder $\begin{cases} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$

für die Ebene APqπ entweder $\begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$

oder $\begin{cases} A\pi = z \\ \pi q = x \\ qM = y \end{cases}$

entfür die Ebene $Ap\xi\pi$ entweder $\begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases}$

oder $\begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$

Wenn aber von dem beständigen Punkte A nach dem Punkte M der Fläche die gerade Linie AM gezogen wird, so ist

$$AM = \sqrt{(xx + yy + zz)}.$$

§. 11.

Eine und dieselbe Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und z giebt uns also die Lage aller Punkte einer Fläche in Beziehung auf drey Ebenen zu erkennen, die auf einander senkrecht sind, und sich in dem Punkte A schneiden. So wie nemlich die veränderliche Größe z die Entfernung eines jeden Punktes der Fläche M von der Ebene APQ giebt, so giebt die veränderliche Größe y die Entfernung eben dieses Punktes M von der Ebene APq, und die veränderliche Größe x von der Ebene $Ap\xi$. Wissen wir aber, wie weit der Punkt M von jeder dieser drey Ebenen entfernt ist, so kennen wir auch seine wahre Lage. Es sind daher diese drey Ebenen, auf welche jede Fläche vermittelst einer Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y und z bezogen werden kann, vorzüglich zu merken, und ist eine davon horizontal, so sind die beyden übrigen vertical, und zwar die eine nach der Richtung AP, und die andere nach der Richtung Ap.

§. 12.

Hat man nun diese drey auf einander senkrechte Ebenen festgesetzt, um darauf die gegebene Fläche zu beziehen; so fälle

fälle man aus jedem Punkte dieser Fläche M auf jene Ebenen APQ, APq und $A\pi\xi$ die senkrechten Linien MQ, Mq und $M\xi$, und mache $MQ = z$, $Mq = y$ und $M\xi = x$. Dann ergänze man das Parallelepipedum, wodurch man drey gerade Linien bekömmt, welche jenen gleich sind, und aus dem Punkte A ausgehen, nemlich $AP = x$, $Ap = y$ und $A\pi = z$, und sobald man diese kennt, so ist auch die Lage des Punktes M bekommt. Läßt man aber die veränderlichen Größen x, y und z, wenn sie nach den Ebenen, welche die Figur anzeigt, gerichtet sind, positiv seyn, so muß man sie, wenn sie nach den entgegenstehenden Gegenden laufen, als negativ ansehen.

§. 13.

Hat in der Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z diejenige, welche auf der Ebene APQ senkrecht ist, oder z, allenthalben gerade Dimensionen, so kommt ihr ein doppelter Werth zu, ein positiver und ein negativer, und beyde sind einander gleich. Alsdann ist also die Fläche von der Art, daß sie sich auf beyden Seiten der Ebene ähnlich und gleich bleibt, und daß der Körper, der durch dieselbe begrenzt ist, durch sie in zwey gleiche Theile getheilt wird. So wie nun bey den ebenen Figuren diejenige gerade Linie, welche die Figur in zwey gleiche und ähnliche Theile theilte, Durchmesser genannt wurde, so wollen wir bey den Körpern diejenige Ebene, welche den Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, die Diametral-Ebene nennen. Wenn daher die veränderliche Größe z in der Gleichung allenthalben gerade Dimensionen hat, so ist die Ebene APQ eine Diametral-Ebene.

§. 14.

§. 14.

Auf ähnliche Art erhellet, daß die Ebene APq worauf y senkrecht ist, eine Diametral-Ebene seyn werde, wenn y in der Gleichung für die Fläche allenthalben gerade Dimensionen hat; und eben so ist die Ebene Apz eine Diametral-Ebene, wenn x allenthalben gleiche Dimensionen hat. So bald daher eine Gleichung für eine Fläche zwischen den veränderlichen Größen x, y und z gegeben ist, so läßt sich sogleich beurtheilen, ob unter den drey Ebenen Diametral-Ebenen seyn werden, oder nicht. Es können aber auch zwey, ja alle drey Ebenen Diametral-Ebenen seyn. Bey der Kugel z. B., deren Mittelpunkt in A liegt, ist, weil der Halbmesser $AM = \sqrt{(xx + yy + zz)}$ a ist, $xx + yy + zz = aa$, und es wird folglich die Kugel von jeder der gedachten Ebenen in zwey ähnliche und gleiche Theile getheilt.

§. 15.

Um die Gestalt der Oberfläche, die in der gegebenen Gleichung enthalten ist, zu erkennen, muß man sein Augenmerk auf die drey auf einander senkrechte Ebenen richten, welche in der 120sten Figur durch $QQ^1Q^2Q^3$, $TT^1T^2T^3$ und $VV^1V^2V^3$ bezeichnet sind, und sich in dem Punkte A schneiden. Wenn man sich diese drey Ebenen nach allen Seiten ohne Ende erweitert gedenkt, so theilen sie den Raum in acht Gegenden ein, welche in der Figur durch AX, AX^1, AX^2, AX^3, AX^4, AX^5, AX^6 und AX^7 angezeigt werden. Sind in der ersten AX die veränderlichen Größen x, y und z positiv, so sind in den übrigen ein oder zwey von ihnen oder auch alle drey negative. Die genauere Beschaffenheit dieser Werthe aber läßt sich am besten aus folgendem Schema erkennen.

Die

Die Gegend AX	Die Gegend AX^4
$AP = + x$	$AP = + x$
$AR = + y$	$AR' = - y$
$AS = + z$	$AS = + z$
Die Gegend AX^1	Die Gegend AX^5
$AP' = - x$	$AP' = - x$
$AR = + y$	$AR' = - y$
$AS = + z$	$AS = + z$
Die Gegend AX^2	Die Gegend AX^6
$AP = + x$	$AP = + x$
$AR = + y$	$AR' = - y$
$AS' = - z$	$AS' = - z$
Die Gegend AX^3	Die Gegend AX^7
$AP' = - x$	$AP' = - x$
$AR = + y$	$AR' = - y$
$AS' = - z$	$AS' = - z$

§. 16.

Bequemer ist es indeß, diese acht Gegenden durch Zahlen zu bezeichnen, um jedesmal auf die leichteste Art anzeigen zu können, von welcher die Rede sey. Da nun alle acht Gegenden in dem Punkte A zusammenkommen, und durch drey senkrecht sich schneidende Ebenen von einander abgesondert, diese drey Ebenen aber durch die geraden Linien Pp, Qq, Rr, die sich in dem Punkte A senkrecht schneiden, bestimmt werden: so läßt sich jede Gegend durch drey von den Buchstaben P, Q und R, und p, q und r angeben. Die Hauptgegend oder die erste PQR ist nemlich der Raum, welcher das Parallelepipedum zwischen den ohne Ende verlängerten geraden Linien AP, AQ, AR, und die Gegend Pqr, der Raum, welcher das Parallelepipedum zwischen den drey ohne Ende verlängerten geraden Linien AP, Aq und Ar enthält. Setzt man daher $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$, so ist $Ap = -x$, $Aq = -y$, und $Ar = -z$. Wir wollen also die gedachten acht Gegenden auf die Art durch Zahlen von einander unterscheiden, daß sey:

	die 1ste	die 2te
zwischen	$AP = + x$	$AP = + x$
den Coordinaten	$AQ = + y$	$AQ = + y$
	$AR = + z$	$Ar = - z$
	die 3te	die 4te
zwischen	$AP = + x$	$Ap = - x$
den Coordinaten	$Aq = - y$	$AQ = + y$
	$AR = + z$	$AR = + z$
	die 5te	die 6te
zwischen	$AP = + x$	$Ap = - x$
den Coordinaten	$Aq = - y$	$AQ = + y$
	$Ar = - z$	$Ar = - z$
	die 7te	die 8te
zwischen	$Ap = - x$	$Ap = - x$
den Coordinaten	$Aq = - y$	$Aq = - y$
	$AR = + z$	$Ar = - z$

§. 17.

Diese Gegenden unterscheiden sich bald mehr, bald weniger von einander. Zuvörderst giebt es zwey Gegenden, die zwey Coordinaten gemein und eine verschieden haben; diese berühren sich in einer Ebene, und wir wollen sie daher verbundene nennen. Dann sind zwey Coordinaten verschieden, und eine gemein; diese Gegenden berühren sich bloß in einer geraden Linie, und wir wollen sie deswegen getrennte nennen. Endlich sind alle Coordinaten von einander verschieden, und die Gegenden haben bloß den

Punkt A mit einander gemein; diesen wollen wir den Namen der entgegengesetzten Gegenden geben. Was für Gegenden mit einer jeden verbunden, oder von ihr getrennt, oder ihr entgegengesetzt seyn, zeigt folgende Tabelle.

	Verbunden			Getrennt			Entgegengesetzt
PQR I	PQr II	PqR III	pQR IV	Pqr V	pQr VI	pqR VII	pqr VIII
PQr II	PQR I	Pqr V	pQr VI	PqR III	pQR IV	pqr VIII	pqR VII
PqR III	Pqr V	PQR I	pqR VII	PQr II	pqr VIII	pQR IV	pQr VI
pQR IV	pQr VI	pqR VII	PQR I	pqr VIII	PQr II	PqR III	Pqr V
Pqr V	PqR III	PQr II	pqr VIII	PQR I	pqR VII	pQr VI	pQR IV
pQr VI	pQR IV	pqr VIII	PQr II	pqR VII	PQR I	Pqr V	PqR III
pqR VII	pqr VIII	pQR IV	PqR III	pQr VI	Pqr V	PQR I	PQr II
pqr VIII	pqR VII	pQr VI	Pqr V	pQR IV	PqR III	PQr II	PQR I

§. 18.

Es hat also jede Gegend drey mit ihr verbundene, zwey getrennte und eine entgegengesetzte, und es erhellet aus der vorstehenden Tabelle sogleich, wie eine jede gegen jede andere beschaffen ist. Die Ordnung, welche die Zahlen in dieser Tabelle beobachten, ist bemerkenswerth, und um sie dem Ueberblicke auf eine leichtere Art darzustellen, wollen wir eben dieselben Zahlen in eben der Ordnung in folgendes Quadrat einschließen.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	6
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

Die Art, wie hier die Zahlen auf einander folgen, fällt bey einiger Aufmerksamkeit von selbst in die Augen, der Gebrauch dieser Tabelle aber wird in der Folge ausführlich gezeigt werden.

§. 19.

Wir haben schon vorhin bemerkt, daß einer Fläche, in deren Gleichung die veränderliche Größe z allenthalben gerade Dimensionen hat, zwey einander gleiche und ähnliche Theile zukommen; es ist nemlich alsdann der Theil in der ersten Gegend gleich und ähnlich dem in der zweyten, und auf ähnliche Art sind auch die Theile in der dritten und fünften, desgleichen die in der vierten und sechsten, und endlich in der siebenten und achten mit einander übereinstimmend. Wenn hingegen die veränderliche Größe y allenthalben gerade Dimensionen hat, so stimmen die erste und dritte, die zweyte und fünfte, die vierte und siebente, und die sechste und achte mit einander überein. Hat x in der Gleichung allenthalben gerade Dimensionen, so findet diese Uebereinstimmung in der ersten und vierten, in der zweyten und sechsten, in der dritten und siebenten, und in der fünften und achten Gegend statt. Wenn nemlich

in der Gleichung allenthalben gerade Dimensionen hat
die veränderliche Größe

z	y	x
	so stimmen überein	
die Gegenden	die Gegenden	die Gegenden
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7	3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6	4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

§. 20.

Wenn die Theile der Fläche in den getrennten Gegenden, der ersten und fünften, einander gleich seyn sollen, so muß die Gleichung so beschaffen seyn, daß sie unverändert bleibt, wenn man die beyden veränderlichen Größen y und z negativ nimmt. Es wird dies also statt finden, wenn die beyden Größen y und z zusammengenommen in allen Gliedern der Gleichung allenthalben entweder gerade oder ungerade Dimensionen haben. Wenn aber die erste und fünfte Gegend mit einander übereinstimmen, so thun solches auch die zweyte und dritte, die vierte und achte, und die sechste und siebente. Auf ähnliche Art stimmen, wenn in der Gleichung für die Fläche die beyden veränderlichen Größen x und z allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen ausmachen, die erste Gegend mit der sechsten, die zweyte mit der vierten, die dritte mit der achten, und die fünfte mit der siebenten überein.

Wenn nemlich in der Gleichung für die Fläche allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl
von Dimensionen haben
die veränderlichen Größen

y und z	x und z	x und y

 so

so stimmen überein

die Gegenden	die Gegenden	die Gegenden
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4,	6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3	7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Wenn aber alle drey veränderliche Größen x, y und z zusammengenommen, entweder allenthalben eine gerade oder allenthalben eine ungerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen die entgegengesetzten Gegenden mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1

§. 21.

Wenn sich von diesen Bedingungen zwey oder alle drey zugleich bey der Gleichung finden, so stimmen entweder je vier oder alle acht Gegenden mit einander überein.

Wenn sowohl x als y, jede für sich betrachtet, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Wenn sowohl x als z, jede für sich, eine gerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander überein.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7
4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5
6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3

Wenn die veränderlichen Größen y und z, jede für sich betrachtet, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4

§. 22.

Wenn eine von den veränderlichen Größen allenthalben gerade Dimensionen hat, die beyden übrigen aber zusammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen geben, so stimmen auch je vier und vier Gegenden mit einander überein, und zwar auf folgende Art.

Wenn z allenthalben gerade Dimensionen hat, x und y aber allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen ausmachen, so stimmen folgende Gegenden mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

Wenn y allenthalben gerade Dimensionen hat, und x und z zusammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen geben, so stimmen folgende Gegenden zu vier und vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6

6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

Wenn x allenthalben gerade Dimensionen hat, und y und z zusammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen geben, so stimmen folgende Gegenden zu vier und vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
4,	6,	7,	1,	8,	2,	3,	5
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

In diesen drey Fällen haben also alle drey veränderliche Größen x, y und z zusammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen.

§. 23.

Es sind noch folgende Fälle von vier gleichen Gegenden übrig. Wenn

x und y } allenthalben entweder eine gerade oder eine
und y und z } ungerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen folgende Gegenden zu vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3

Eben diese Aehnlichkeiten müssen sich ergeben, wenn außerdem die beyden übrigen veränderlichen Größen x und z allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl

zahl von Dimensionen ausmachen, so daß diese Bedingung bereits in der angeführten enthalten ist. Es werden daher die Theile einer Oberfläche in je vier getrennten Gegenden unter einander gleich seyn, wenn in der Gleichung je zwey veränderliche Größen zusammengenommen, allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen haben. Da es aber drey Combinationen giebt, so ist zu bemerken, daß wenn zwey die erklärte Eigenschaft haben, dieselbe der dritten ebenfalls zukomme.

§. 24.

Wenn zu den Bedingungen, wobey je vier Gegenden gleich und ähnlich werden, noch eine neue in ihnen nicht enthaltene hinzukommt, die je zwey Gegenden einander gleich und ähnlich macht, so werden alle Gegenden einander gleich, und die Fläche besteht, aus acht einander gleichen und ähnlichen Theilen. Die Gleichung für diese Art der Flächen faßt alle bisher betrachteten Eigenschaften zusammen in sich; es haben nemlich die veränderlichen Größen x, y und z jede für sich betrachtet, allenthalben gerade Dimensionen, und es müssen daher auch je zwey oder alle drey zusammengenommen eine gerade Anzahl von Dimensionen geben.

§. 25.

Ob aber eine gegebene Gleichung zwischen dreyen veränderlichen Größen zwey oder alle drey von den betrachteten Eigenschaften an sich habe oder nicht, erkennt man, in Ansehung der geraden Dimensionen jeder veränderlichen Größe, leicht. Auch macht es keine Schwierigkeit zu bestimmen, ob alle veränderliche Größen allenthalben eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen geben.

Nicht so leicht ist es, zu untersuchen, ob je zwey von dieser Art sind. Man setze in der Gleichung entweder $x = nz$, oder $y = nz$, oder $x = ny$, und sehe, ob in dem einen oder dem andern Falle eine Gleichung sich ergebe, in welcher für die beyden ersten Annahmen z, und für die letzte y allenthalben gerade Dimensionen bekomme. Ist dieses, so haben je zwey veränderliche Größen zusammengenommen allenthalben entweder gerade oder ungerade Dimensionen, und es muß daher die Fläche zum wenigsten zwey einander gleiche und ähnliche Theile haben.

Zweytes Capitel.

Von den Schnitten der Flächen, wenn Ebenen durch sie gelegt werden.

§. 26.

So wie sich Linien in Punkten schneiden, so thun die Flächen solches in Linien, geraden entweder oder krummen. Eine Ebene schneidet eine Ebene in einer geraden Linie, wie aus der Elementar-Geometrie bekannt ist; wenn aber eine Kugel von einer Ebene geschnitten wird, so ist der Schnitt ein Kreis. Kennt man die Linien, in welchen Flächen von gegebenen Ebenen geschnitten werden, so hat man daran ein Hülfsmittel zur Kenntniß der Flächen selbst; denn man lernt dadurch auf einmal unzählige Punkte der Fläche kennen, da hingegen nach der im vorhergehenden Capitel beschriebenen Methode die einzelnen Werthe der veränderlichen Größe z nur einzelne Punkte derselben zu erkennen geben.

§. 27.

Da wir die Flächen auf drey auf einander senkrechte Ebenen beziehen, so müssen wir vor allen Dingen die Durchschnittslinien der Flächen mit diesen Ebenen betrachten. Nimmt man also zuvörderst die Ebene APQ, Fig. 121, welche durch die veränderlichen Größen $AP = x$, und $AQ = y$ bestimmt wird, (indem die dritte veränderliche Größe z die Entfernung der Fläche von dieser Ebene an-

zeigt)

zeigt) so fällt in die Augen, daß man, wenn man $z = o$ setzt, die Punkte der Fläche finden werde, welche in der Ebene APQ selbst liegen; und es giebt daher die übrigbleibende Gleichung zwischen x und y die Linie, in welcher die Fläche von der Ebene APQ geschnitten wird. Auf ähnliche Art druckt, wenn man $y = o$ setzt, die Gleichung zwischen x und z die Durchschnittslinie der Fläche und der Ebene APR, und wenn man $x = o$ setzt, die zwischen y und z die Durchschnittslinie der Fläche und der Ebene AQR aus.

§. 28.

Ich habe schon vorhin berührt, daß die Oberfläche einer Kugel, die den Mittelpunkt in A hat, und deren Halbmesser $= a$ ist, durch die Gleichung $xx + yy + zz = aa$ ausgedruckt werde; und ich will daher dieses Beyspiel zur Erläuterung gebrauchen. Es sey also $z = o$, so druckt die Gleichung $xx + yy = aa$ den Kugelschnitt, der von der Ebene APQ erzeugt wird, aus, und man sieht, daß derselbe ein Kreis ist, der den Mittelpunkt in A, und den Halbmesser $= a$ hat. Auf ähnliche Art ist, wenn man $y = o$ setzt, der Kugelschnitt, welchen die Ebene APR macht, ein Kreis, der durch die Gleichung $xx + zz = aa$ ausgedruckt wird; und wenn man $x = o$ setzt, so giebt die Gleichung $yy + zz = aa$ einen gleichen Kreis für den durch die Ebene AQR hervorgebrachten Kugelschnitt. Dies sind bekannte Dinge, da, wenn eine Kugel von einer Ebene geschnitten wird, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, der Schnitt allemal ein größter Kreis ist, der mit der Kugel gleichen Halbmesser hat.

§. 29.

Nicht schwerer ist es, die Durchschnittslinien zu bestimmen, welche durch Ebenen gemacht werden, die einer von

jenen

jenen Haupt-Ebenen parallel sind. Man denke sich eine Ebene, die der Ebene APQ parallel sey, und von ihr um die Weite = h abstehe; so werden alle Punkte der Fläche, deren Entfernung von eben der Ebene APQ, welche Entfernung durch die veränderliche Größe z ausgedruckt wird, = h ist, in dieser parallelen Ebene liegen, und also eine Durchschnittslinie bilden. Für diese Durchschnittslinie hat man daher eine Gleichung, wenn man in der Gleichung für die Fläche z = h setzt; denn man bekommt dadurch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y, welche die Natur der Durchschnittslinie ausdruckt. Auf ähnliche Art lassen sich die Schnitte bestimmen, welche durch Ebenen, welche der APR oder AQR parallel sind, erzeugt werden, und es würde überflüssig seyn, das Gesagte bey ihnen zu wiederholen.

§. 30.

Wenn also in der Gleichung für eine Fläche zwischen den drey Coordinaten x, y und z eine dieser Coordinaten z einer beständigen Größe h gleich gesetzt wird, so entsteht ein Durchschnitt der Fläche und einer Ebene, welche der Ebene APQ parallel ist, und von ihr um die Entfernung = h absteht. Legt man demnach dem Buchstaben h nach und nach alle mögliche Werthe, die positiven nicht nur, sondern auch die negativen, bey, so erhält man alle Durchschnittslinien der Fläche und der Ebenen, welche der Ebene APQ parallel sind; und da die ganze Fläche durch dergleichen parallele Ebenen in unendliche viele Theile getheilt wird, und man auf die gedachte Art alle Durchschnittslinien kennen lernt: so wird man auch durch alle diese Durchschnittslinien mit der Fläche selbst bekannt. Alle diese Durchschnittslinien sind nemlich in einer einzigen Glei-

chung

chung zwischen den Coordinaten x und y, die eine unbestimmte beständige Größe in sich faßt, enthalten, und es sind daher alle diese Durchschnittslinien entweder ähnliche oder verwandte in einer Gleichung enthaltene Linien.

§. 31.

Es werden also alle Schnitte der Fläche, die der Ebene APQ parallel sind, einander gleich seyn, und von den Ebenen APR und AQR auf gleiche Art geschnitten werden, wenn die Gleichung zwischen x und y so beschaffen ist, daß sie unverändert bleibt, h mag einen Werth bekommen, was für einen man will. Dies kann aber nicht geschehen, wofern nicht die veränderliche Größe z, statt welcher h gesetzt worden, in der Gleichung für die Fläche gänzlich fehlt. Wenn also die dritte veränderliche Größe z ganz aus der Gleichung für die Fläche wegfällt, so sind alle der Ebene APQ parallele Schritte einander gleich, und ihre Natur wird durch die Gleichnng für die Fläche selbst ausgedruckt, indem dieselbe bloß die beyden veränderlichen Größen x und y enthält. Auf ähnliche Art stimmen, wenn in der Gleichung für die Fläche entweder x oder y fehlt, alle der Ebene AQR oder APR parallele Schritte mit einander überein.

§. 32.

Eine solche Fläche läßt sich daher nicht nur sehr leicht denken, sondern selbst construiren und körperlich darstellen. Denn angenommen, daß in der Gleichung die veränderliche Größe z fehle, und man also bloß eine Gleichung zwischen den beyden Coordinaten AP = x, und AQ = PM = y habe, so beschreibe man darnach in der Ebene APQ eine Curve BMD, Fig. 122. Dann stelle man sich vor, daß eine

eine unbegrenzte, auf dieser Ebene selbst senkrecht bleibende gerade Linie nach der Curve BMD sich bewege, so wird dieselbe bey ihrer Bewegung die Fläche beschreiben, welche durch die Gleichung ausgedruckt wird. Wenn also die Linie BMD ein Kreis ist, so wird die auf diese Art entstandene Fläche die Oberfläche eines geraden, wenn aber BMD eine Ellipse ist, die eines schiefen Cylinders. Wenn die Linie BMD keine continuirliche, sondern eine aus mehrern geraden und eine geradlinige Figur bildenden Linie zusammengesetzte Linie ist, so wird die gedachte Fläche eine prismatische.

§. 33.

Da diese Gattung der Flächen alle cylindrische und prismatische Flächen unter sich begreift, so pflegt man sich auch die cylindrische oder prismatische zu nennen; die Arten derselben aber werden durch die ebene Figur BMD bestimmt, aus welcher sie auf die beschriebene Art entstanden sind; so wie daher auch die Figur BMD die Basis heißt. So oft daher in der Gleichung für eine Fläche eine von den drey veränderlichen Größen x, y und z fehlt, so oft ist die Fläche, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird, entweder eine cylindrische, oder eine prismatische. Wenn aber zwey veränderliche Größen y und z zugleich fehlen, so wird x eine beständige Größe, und die Linie BMD verwandelt sich in eine gerade Linie, welche auf der Axe AD senkrecht ist; woher denn die Fläche eine Ebene wird, die auf der Ebene APQ senkrecht steht.

§ 34.

Nach dieser Gattung der Flächen verdient vorzüglich diejenige bemerkt zu werden, welche man aus den homogenen

nen Gleichungen zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z, oder alsdann erhält, wenn diese drey veränderliche Größen allenthalben eine und dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, wie z. B. wenn $zz = mxz + xx + yy$ ist. Aus diesen Gleichungen werden nemlich alle Schnitte, wenn die schneidende Ebene einer von den Hauptebenen parallel ist, einander ähnliche Figuren. Denn legt man der veränderlichen Größe z einen beständigen Werth h bey, so ist offenbar, daß die Gleichung

$$hh = mhx + xx + yy$$

wenn man für h nach und nach andere Werthe annimmt, unzählige einander ähnliche Figuren unter sich begreife, deren Parameter der h gleich oder proportional sind. Da also diese Schnitte nicht bloß einander ähnlich sind, sondern auch in dem Verhältnisse der Entfernungen von der Ebene APQ wachsen, so sind die Linien, welche aus dem Punkte A durch die homogenen Punkte der Schnitte gezogen werden, gerade Linien.

§. 35.

Ist also eine solche homogene Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z gegeben, so ertheile man der z den Werth $AR = h$, und TSsMm, Fig. 123, sey in einer Ebene, welche der APQ durch den Punkt R parallel gelegt worden, so daß sie durch die Gleichung zwischen x und y ausgedruckt werde, und $RV = x$ und $VM = y$ sey. Ist nun dieser eine Schnitt TSsMm beschrieben, so stelle man sich vor, daß sich durch den Umfang desselben eine unbegrenzte gerade Linie bewege, die stets durch den Punkt A gehe, so wird diese gerade Linie die Fläche beschreiben, welche in der Gleichung enthalten ist. Dabey fällt in die Augen, daß, wenn TSsMm ein Kreis ist,

ist, welcher den Mittelpunkt in R hat, ein gerader, wenn aber R nicht der Mittelpunkt ist, ein schiefer Kegel entstehen werde; ist aber jene Figur geradlinig, so ergeben sich Pyramiden von allerley Art. Aus diesem Grunde wollen wir die Flächen, welche in dieser Art der Gleichungen enthalten sind, conische oder pyramidalische nennen.

§. 36.

Wenn also die Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z homogen, und also die dadurch ausgedruckte Fläche conisch oder pyramidalisch ist, so erhellet nicht nur hieraus, daß alle Schnitte, die einer Hauptebene APQ parallel gemacht worden, einander ähnlich sind, und daß ihre Parameter sich wie die Entfernungen der Schnitte von dem Scheitel A verhalten, sondern es werden auch aus gleichem Grunde alle Schnitte, welche entweder der Ebene APR, oder der Ebene AQR parallel sind, eben diese Eigenschaft haben, daß sie ähnliche Figuren sind, und daß sich ihre homologen Seiten wie ihre Entfernungen von A verhalten. Unten wird aber gezeigt werden, daß alle dergleichen Körperschnitte, die entweder einander, oder irgend einer Ebene durch den Scheitel A parallel liegen, auch einander ähnlich, und ihre Parameter den Entfernungen vom Scheitel A proportional sind.

§. 37.

Von einem weitern Umfange ist die Gattung der Flächen, welche wir jetzt betrachten wollen. Es sey Z irgend eine Funktion von z, und eine Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und Z gegeben. Es werde Z = H, wenn man z = h setzt. Da man in diesem Falle eine homogene Gleichung zwischen x, y und H erhält, so werden alle Schnitte, die der Ebene APQ parallel sind, einander ähnlich seyn, ihre Parameter aber werden sich nicht wie die Entfernungen h, sondern wie die Funktionen davon, H, verhalten. Es sind daher auch die Linien, welche durch die homologen Punkte dieser Schnitte gezogen werden, keine gerade Linien, sondern Curven, die von der Funktion Z abhangen. Auch folgt hier nicht, daß die Schnitte, die einer andern Ebene parallel sind, einander ähnlich seyen.

§. 38.

In dieser Gattung sind die beyden vorhergehenden Arten enthalten. Denn wird $Z = z$ oder $Z = \alpha z$, so entstehen, weil die Gleichung zwischen x, y und z homogen ist, conische Flächen. Eben dieses geschiehet, wenn $Z = \alpha + \beta z$ ist, nur mit dem Unterschiede, daß die Spitze des Kegels nicht in den Punkt A selbst fällt; ist nemlich $Z = \frac{b - z}{b}$, so steht die Spitze des Kegels von A um die Weite b ab. Setzt man $b = \infty$, so geht die conische Figur in eine cylindrische über, und es wird $Z = 1$. Es haben daher die Gleichungen für die cylindrischen Flächen die Beschaffenheit, daß die veränderlichen Größen x, und y mit der beständigen 1 allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen geben. Es mag aber die Gleichung zwischen x und y beschaffen seyn, wie sie will, so kann man allemal, wenn z nicht darin vorkommt, durch die Einheit die Homogeneität herstellen, und es druckt daher, wie wir bereits oben gezeigt haben, jede Gleichung, worin eine veränderliche Größe fehlt, eine cylindrische Fläche aus.

§. 39.

Unter den Körpern, bey welchen alle Schnitte, die einer von den Hauptebenen APQ parallel sind, einander ähnlich werden, sind vorzüglich diejenigen zu merken, bey welchen diese Schnitte Kreise sind, welche den Mittelpunkt in eben der geraden und auf APQ senkrechten Linie AR haben. Dergleichen Körper lassen sich drechseln, und man nennt sie daher gedrehte Körper. Die allgemeine Gleichung für dieselben ist $ZZ = xx + yy$; denn man mag der veränderlichen Größe z, um $Z = H$ zu erhalten, einen Werth beylegen, was für einen man will, so bekommt man allemal für den Schnitt, welcher der Ebene APQ parallel ist, die Gleichung $HH = xx + yy$, und dies ist eine Gleichung für einen Kreis, der den Halbmesser $= H$, und den Mittelpunkt in der geraden Linie AR hat. Wenn $ZZ = zz$ ist, so entsteht ein gerader Kegel; ist $ZZ = aa$, ein Cylinder; und ist $ZZ = aa - zz$, eine Kugel, und dies sind die vornehmsten Arten der Körper, die sich durchs Drehen erzeugen lassen.

§. 40.

Nun wollen wir die Körper betrachten, deren auf der Axe AP senkrechte Schnitte PTV, Fig. 124, insgesammt Dreyecke sind, deren Spitzen T in der der Axe AP parallelen geraden Linie DT liegen. Es sey AVB die Basis dieses Körpers, oder ein Schnitt von ihm, der in der Ebene APQ gemacht worden, und irgend eine Curve. Läßt man die Entfernung der geraden Linie DT von der Axe AB, oder $AD = C$ seyn, und setzt man, wie bisher, die drey veränderlichen Größen $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$; so wird PV eine Funktion von x: setzt man aber $PV = P$, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke VQM und VPT

$$P : c = P - y : z$$

oder

$$z = c - \frac{cy}{P}$$

Für diese Körper ist daher $\frac{c - z}{y}$ gleich einer Funktion von x; und es unterscheiden sich dieselben von den conischen, daß sie sich in eine geradlinige Spitze DT endigen, da solches die conischen in einen Punkt thun. Ist AVB ein Kreis, so entsteht der Körper, den Wallis ausführlich untersucht, und den kegelförmigen Keil genannt hat.

§. 41.

Es seyen, wie vorhin, alle auf der Axe AB senkrechte Schnitte PTV, Fig. 125, Dreyecke, welche bey P einen rechten Winkel haben, deren Scheitel T aber irgend eine Curve AT bilden, und die Basis sey die Figur AVB. Setzt man die drey veränderlichen Größen $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$, so ist in der Curve AVB die gerade Linie PV eine Funktion von x, die wir $= P$ annehmen wollen; und PT ebenfalls eine Funktion von x, die $= Q$ seyn mag. Dies vorausgesetzt, ist

$$P : Q = P - y : z$$

und also

$$z = Q - \frac{Qy}{P}, \text{ oder } Pz + Qy = PQ$$

oder

$$\frac{z}{Q} + \frac{y}{P} = 1, \text{ oder eine beständige Größe.}$$

Wenn also die beyden veränderlichen Größen y und z nirgends mehr als eine Dimension ausmachen, so gehört der Körper zu der Gattung, welche wir hier beschrieben haben.

§. 42.

Da wir also diejenigen Körper betrachtet haben, wobey die Schnitte, die der einen Hauptebene parallel gemacht werden, insgesammt einander ähnlich sind: so wollen wir uns nun zu solchen wenden, wobey diese Schnitte wenigstens mit einander verwandte Figuren, oder solche werden, deren Applicaten proportional sind, wenn man die Absciſſen homolog nimmt. Es seyen die drey Hauptschnitte eines solchen Körpers ABC, ACD und ABD, Fig. 126, so daß alle der ACD parallele Schnitte verwandte Figuren werden. Man setze die Grundlinie AC $= a$ und die Höhe AD $= b$, und dabey sey, nachdem man die Coordinaten Aq $= p$ und qm $= q$ gemacht hat, q irgend eine Funktion von p. Nun denke man sich einen parallelen Schnitt PTV, und setze die Entfernung AP $= x$, so ist die Basis PV eine Funktion von x, die wir $= P$, und die Höhe PT eine Funktion von x, die wir $= Q$ annehmen wollen. Setzt man daher PQ $= y$ und QM $= z$, so ist wegen der Verwandtschaft

$$a : p = P : y; \text{ und } b : q = Q : z$$

oder

$$y = \frac{Pp}{a}; \text{ und } z = \frac{Qq}{b}.$$

§. 43.

Wenn also alle drey Hauptschnitte eines Körpers ABC, ACD und ABD gegeben sind, so läßt sich daraus die Natur des Körpers bestimmen, wenn alle dem ACD parallele Schnitte auch demselben verwandt sind. Denn man hat dadurch zuvörderst P und Q, welches Funktionen von x sind; und dann ist q eine Funktion von p, so daß durch die beyden veränderlichen Größen x und p die veränderlichen

Größen y und z bestimmt werden. Will man aber eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten x, y und z haben, so setze man, da q eine Funktion von p, oder eine Gleichung zwischen p und q gegeben ist, in dieser Gleichung

$$p = \frac{ay}{P}, \text{ und } q = \frac{bz}{Q}$$

denn dadurch erhält man, da P und Q Funktionen von x sind, eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten x, y und z, wodurch die Natur der zu dieser Classe gehörigen Körper bestimmt wird. Es fällt aber in die Augen, daß, wenn man $x = 0$ setzt, $P = a$ und $Q = b$ werden muß.

§. 44.

Wenn in der Gleichung für die Oberfläche die beyden veränderlichen Größen y und z allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, so sind alle auf der Axe AP senkrechte Schnitte geradlinige Figuren. Denn setzt man für x irgend eine beständige Größe, so erhält man eine homogene Gleichung zwischen y und z, welche eine oder mehrere gerade Linien anzeigt. Da nun die Anzahl der Dimensionen, welche die beyden veränderlichen Größen y und z haben, allenthalben dieselbe, und entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl ist: so haben dieserwegen die gedachten Körper nach §. 20. auch je zwey und zwey Theile einander gleich. Es sind nemlich die Theile in der ersten und fünften, ferner in der zweyten und dritten Gegend einander gleich, und in Ansehung der übrigen braucht man nur den angeführten § zu Rathe zu ziehen.

§. 45.

Wir haben bereits mehrere Gattungen von Körpern betrachtet, wobey es unzählige geradlinige Schnitte giebt,

denn

denn es gehören dahin die so eben untersuchten, und dann auch die cylindrischen und conischen Körper. Bey diesen sind die Schnitte geradlinig, welche durch die Axe gehen, jene aber erstrecken sich weiter. Es sey nemlich AKMP, Fig. 127, ein Schnitt, der auf der Axe unter dem Winkel MPV $= \phi$ stehe. Setzt man AP $= x$; PQ $= y$ und QM $= z$, so ist $\frac{z}{y} =$ tang. ϕ, und PM $= \frac{z}{\sin. \phi}$. Soll nun KM eine gerade Linie seyn, so muß

$$\frac{z}{\sin. \phi} = \alpha x + \beta$$

werden, wo α und β beständige Größen, die von dem Winkel ϕ abhängen, und also Funktionen von keiner Dimension von y und z sind. Es seyen R und S dergleichen Funktionen, so wird

$$x = Rz + S, \text{ oder } x = Ry + S$$

Oder wenn T eine Funktion von einer Dimension, und S eine Funktion von keiner Dimension von y und z bedeutet, so sind alle Körper von dieser Gattung in dieser allgemeinen Gleichung $x = T + S$ enthalten.

§. 46.

Es sey die Fläche, deren Natur durch eine Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z bestimmt worden, beschaffen, wie sie wolle, so ist es allemal leicht, einen jeden nach der Axe AP gemachten Schnitt zu bestimmen. Es sey der Winkel VPM, welchen dieser Schnitt AKMP mit der Ebene ACVP macht $= \phi$, und die gerade Linie PM $= v$, welches die Applicate des gesuchten Schnitts seyn wird; so ist

$$QM = z = v . \sin. \phi; \text{ und } PQ = y = v . \cos. \phi.$$

Braucht man daher in der Gleichung für die Fläche die

Werthe v. sin. ϕ, und v. cos. φ für y und z, so erhält man eine Gleichung zwischen den beyden veränderlichen Größen x und v, wodurch die Natur des Schnitts AKMP bestimmt wird. Auf ähnliche Art findet man alle Schnitte, welche nach einer von den beyden übrigen Hauptaxen AQ und AR Fig. 121. gemacht werden. Denn es lassen sich diese drey Axen AP, AQ und AR, von welchen die drey veränderlichen Größen x, y und z abhangen, so mit einander verwechseln, daß alles, was von der einen erwiesen worden, auch auf die übrigen angewandt werden kann.

§. 47.

Nimmt man also die Ebene APQ zur Hauptebene an, um darauf alle Schnitte der Fläche zu beziehen, so ist jeder durch eine Ebene gemachter Schnitt entweder dieser Ebene parallel oder gegen sie geneigt, und in diesem Falle wird die erweiterte Ebene des Schnittes die Ebene APQ irgendwo schneiden, und der Durchschnitt dieser Ebenen wird eine gerade Linie seyn. Im ersten Falle, wenn die Ebene des Schnittes der Ebene APQ parallel ist, lernt man die Natur dieses Schnittes kennen, wenn man der veränderlichen Größe z einen beständigen Werth ertheilt. Im letzten Falle, wenn die Ebene des Schnittes gegen die Ebene APQ geneigt ist, kann man die Natur des Schnittes bis jetzt nur dann bestimmen, wenn entweder die gerade Linie AP, oder die gerade Linie AQ die Durchschnittslinie der schneidenden Ebene und der Ebene APQ ist. Um also alle Schnitte zu finden, muß man auch jeden andern Schnitt jener zwey Ebenen betrachten.

§. 48.

Es sey die gerade Linie ES, Fig. 128, welche der Axe AP parallel ist, die Durchschnittslinie der schneidenden

Ebene

Ebene und der Ebene APQ, und der Neigungswinkel QSM, den die schneidende Ebene ESM mit der Ebene APQ macht, $= \varphi$, so wie die Entfernung $AE = f$. Da

$$AP = x;\ PQ = y;\ \text{und}\ QM = z$$

ist, so wird

$$ES = x,\ \text{und}\ QS = y + f.$$

Bezieht man demnach den Schnitt auf die gerade Linie ES als auf seine Axe, so wird die Abscisse $ES = x$; und setzt man die Applicate $SM = v$, so wird, weil der Winkel $QSM = \varphi$ ist,

$$QM = z = v.\sin.\ \varphi;\ \text{und}\ SQ = y + f = v.\cos.\ \varphi$$

und folglich

$$y = v.\cos.\ \varphi - f.$$

Substituirt man daher in der Gleichung zwischen x, y und z, welche für die Fläche gegeben ist,

$$y = v.\cos.\ \varphi - f;\ \text{und}\ z = v.\sin.\ \varphi$$

so bekömmt man eine Gleichung zwischen den Coordinaten x und v für den gesuchten Schnitt ESM. Wäre ES senkrecht auf der Axe AP, so fände man, weil dann ES der andern Hauptaxe in der Ebene APQ parallel wäre, den Schnitt durch Verwechselung der veränderlichen Größen x und y auf eben die Art.

§. 49.

Nun habe der Schnitt ES, Fig. 129, in der Ebene APQ jede willkührlich angenommene Lage, und es begegne ihr die gerade Linie AE, die auf der Axe AP senkrecht ist, in dem Punkte E. Man ziehe ETX der Axe AP parallel, und setze $AE = f$, und den Winkel $TES = \vartheta$; desgleichen, nachdem man die drey veränderlichen Größen $AP = x$; $PQ = y$ und $QM = z$ angenommen hat, aus Q auf ES die senkrechte Linie QS, und endlich MS: so ist der Winkel QSM die Neigung der schneidenden Ebene gegen die Ebene APQ. Es sey QSM $= \phi$ und die Coordinaten des gesuchten Schnittes ES $= t$, und SM $= v$. Aus S ziehe man nach EX und QP die senkrechten Linien ST und SV; so ist

$$QM = z = v.\sin.\phi;\ QS = v.\cos.\phi$$

$$SV = v.\cos.\phi.\sin.\vartheta;\ QV = v.\cos.\phi.\cos.\vartheta$$

und dann auch

$$ST = VX = t.\sin.\vartheta;\ \text{und } ET = t.\cos.\vartheta.$$

Hieraus fließt

$$AP = x = t.\cos.\vartheta + v.\cos.\phi.\sin.\vartheta$$

und

$$PQ = y = v.\cos.\phi.\cos.\vartheta - t.\sin.\vartheta - f.$$

Substituirt man diese Werthe für x, y und z, so findet man die Gleichung für den gesuchten Schnitt.

§. 50.

Ist also eine Gleichung für einen Körper gegeben, so kann man daraus eine Gleichung für jeden ebenen Schnitt desselben erhalten. Es ist aber dabey klar, einmal, daß alle Schnitte eines Körpers algebraische Curven seyn werden, wenn die Gleichung für denselben zwischen den drey Coordinaten x, y und z eine algebraische Gleichung ist. Ferner können t und v in der Gleichung für den Schnitt, da diese Gleichung aus der für den Körper entsteht, wenn man darin

$$z = v.\sin.\phi;\ x = t.\cos.\vartheta + v.\cos.\phi.\sin.\vartheta,\ \text{und}$$

$$y = v.\cos.\phi.\cos.\vartheta - t.\sin.\vartheta. - f$$

setzt, nicht mehr Dimensionen bekommen, als die drey Coordinaten x, y und z in jener Gleichung haben. Aber zu einem niedrigern Grade kann die Gleichung für den

Schnitt

Schnitt bisweilen gehören, wenn sich nemlich die höchsten Glieder nach der Substitution einander aufheben.

§. 51.

Haben also die drey veränderlichen Größen x, y und z in der Gleichung für die Fläche nicht mehr als eine Dimension, so daß die Gleichung folgende ist

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = a$$

so sind alle Schnitte dieser Fläche gerade Linien. In diesem Falle ist aber die Fläche eine Ebene, welches bey einiger Aufmerksamkeit in die Augen fällt, und unten deutlicher gezeigt werden wird; aus den Elementen aber ist bekannt, daß jede zwey Ebenen sich in einer geraden Linie schneiden. Auf ähnliche Art sieht man ein, daß alle Schnitte der Körper, deren Natur durch folgende allgemeine Gleichung ausgedruckt wird

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \zeta yz + ax + by + cz + ee = 0$$

wofern sie nicht gerade Linien sind, Linien der zweyten Ordnung seyn werden, und daß es dabey keinen Schnitt gebe, der nicht in der Gleichung vom zweyten Grade enthalten sey.

Drittes Capitel.

Von den Cylinder- Kegel- und Kugel-Schnitten.

§. 52.

Da diese Körper in den Elementen der Stereometrie betrachtet werden, so müssen wir auch ihre Schnitte vor der Erwägung der weniger bekannten Körper untersuchen. Was nun zuvörderst die Cylinder betrift, so giebt es davon zwey Arten, gerade und schiefe. Ein Cylinder heißt ein gerader, wenn alle seine auf der Axe senkrechte Schnitte einander gleiche Kreise sind, welche ihre Mittelpunkte in eben der geraden Linie haben. Bey einem schiefen Cylinder hingegen sind nicht die Schnitte, welche auf der Axe senkrecht, sondern diejenigen, welche gegen dieselbe unter einem gegebenen Winkel geneigt sind, Kreise; man druckt aber diese Beschaffenheit bequemer auf diese Art aus: Ein schiefer Cylinder ist ein solcher, dessen auf der Axe senkrechte Schnitte einander gleiche Ellipsen sind, deren Mittelpunkte insgesammt in der geraden Linie liegen, welche man die Axe des Cylinders nennt.

§. 53.

Es sey also ein gerader oder schiefer Cylinder gegeben, dessen Axe CD, Fig. 130, auf der Ebene der Tafel senkrecht stehe; und seine Grundfläche AEBF, oder sein Schnitt, welcher von der Ebene der Tafel gemacht wird, sey ein Kreis oder eine Ellipse. Ich will annehmen, daß diese

Grund-

Grundfläche eine Ellipse sey, die den Mittelpunkt in C, und die zugehörigen Axen AB und EF habe, weil alles das, was von einem schiefen Cylinder behauptet wird, sehr leicht auf den geraden Cylinder angewandt werden kann. Es sey also die eine Halbaxe AC = BC = a, und die andere CD = CF = c. Setzt man die drey Coordinaten CP = x; PQ = y; und QM = z, so ist wegen der Natur der Ellipse

$$aacc = aayy + ccxx$$

und diese Gleichung druckt zugleich die Natur des Cylinders aus, da die dritte veränderliche Größe z, weil alle der Ebene CPQ parallele Schnitte einander gleich sind, nicht mit in die Gleichung kommt.

§. 54.

Bey diesem Cylinder sind also alle der Grundfläche parallele Schnitte der Grundfläche gleich und ähnlich; und Kreise bey dem geraden, so wie Ellipsen bey dem schiefen Cylinder. Ferner sind die Schnitte, welche durch Ebenen, auf APQ senkrecht sind, gemacht werden, gerade Linien, und je zwey und zwey einander parallel; die aber da, wo die Ebene den Cylinder berührt, in eine zusammenfallen, und wenn die Ebene den Cylinder nicht trift, imaginär werden. Dieses erhellet auch aus der Gleichung. Denn wenn man entweder x, oder y, oder $x \mp \alpha y$ beständig annimmt, um den Schnitt der schneidenden Ebene und der Grundfläche anzuzeigen, so hat die Grundfläche zwey einfache Wurzeln. Und auf diese Art haben wir schon alle Schnitte bestimmt, welche durch Ebenen, die einer von den drey Hauptebenen parallel sind, gemacht werden.

§. 55.

Um die Natur der übrigen Schnitte zu erforschen, wol-len wir annehmen, daß die schneidende Ebene und die Ebene der Grundfläche die gerade Durchschnittslinie GT erzeugen, die zuvörderst der einen zugehörigen Axe EF pa-rallel, oder auf der andern verlängerten Axe AB in G senk-recht seyn mag. Dies vorausgesetzt, so sey die Entfernung CS = f, und die Neigung der schneidenden Ebene GT gegen die Grundfläche = ϕ. Es begegne die schneidende Ebene GTM der Axe des Cylinders in D, so wird, wenn man DG zieht, DGC = φ, und folglich

$$DG = \frac{f}{\text{cos}.\ \varphi};\ \text{und}\ CD = \frac{f.\ \text{sin}.\ \phi}{\text{cos}.\ \varphi}.$$

Zieht man aus einem Punkte des gesuchten Schnittes M die Linie MT der DG parallel, so wird, weil TQ = f − x und QTM = φ ist

$$TM = \frac{f - x}{\text{cos}.\ \varphi};\ QM = \frac{(f - x)\ \text{sin}.\ \phi}{\text{cos}.\ \phi} = z$$

Man ziehe MS der TG parallel und also senkrecht auf DG, so wird

$$MS = TG = PQ = y;\ \text{und}\ DS = \frac{x}{\text{cos}.\ \phi}.$$

§. 56.

Nun nehme man die geraden Linien DS und SM zu den Coordinaten des gesuchten Schnittes an, und setze DS = t und SM = u; so wird

$$y = u;\ x = t.\ \text{cos}.\ \phi$$

$$\text{und weil}\ z = \frac{(f - x).\ \text{sin}.\ \phi}{\text{cos}.\ \varphi}\ \text{ist}$$

$$z = f.\ \text{tang}.\ \varphi - t.\ \text{sin}.\ \phi.$$

Man

Man bringe diese Werthe in die Gleichung für den Cylinder

$$aacc = ayy + ccxx$$

so erhält man für den gesuchten Schnitt folgende Gleichung

$$aacc = aauu + cctt\ (\cos.\ \varphi)^2$$

welche anzeigt, daß der Schnitt eine Ellipse seyn wird, welche den Mittelpunkt in D hat, und deren eine Hauptaxe in die gerade Linie DG fällt, die andere aber auf ihr senkrecht stehet. Es ist aber die Hauptaxe, welche in die gerade Linie DG fällt, (indem $u = o$ gesetzt wird) $= \frac{a}{\cos.\ \varphi}$.

Oder man ziehe BH der GD parallel, so wird $BH = \frac{a}{\cos.\ \varphi}$, die eine Halbaxe des gesuchten Schnittes, und die andere $= c = CE$.

§. 57.

Es ist also der auf diese Art entstandene Cylinderschnitt eine Ellipse, deren zugehörige Halbaxen $\frac{a}{\cos.\ \varphi}$ und c sind. Wenn daher in der Grundfläche AEBF, $AC = a$, die größere Halbaxe ist, so sind, weil $\frac{a}{\cos.\ \varphi}$ größer als a ist, die Schnitte länglichere Ellipsen als die Grundfläche. Ist aber c kleiner als a, oder ist der Schnitt GT der größern Axe der Basis parallel, so können in dem Cylinderschnitte beyde Axen einander gleich seyn, und also der Schnitt ein Kreis werden. Dieses ereignet sich, wenn $\frac{a}{\cos.\ \varphi} = c$, oder $\cos.\ \varphi = \frac{a}{c}$ ist. Da also in dem Dreyecke BCH, welches bey C rechtwinklig ist, $CBH = \varphi$ ist, so ist $\cos.\ \varphi = \frac{BC}{BH} = \frac{a}{BH}$. Wenn daher $BH = CE$ genommen wird,

so

so sind die Schnitte Kreise; und da dieses auf eine zwiefache Weise geschehen kann, indem BH = CE theils oberhalb, theils unterhalb genommen werden kann, so entstehen zwey Reihen kreisförmiger Schnitte, welche auf der Axe CD schief stehen, und daher werden dergleichen Cylinder schiefe Cylinder genannt.

§. 58.

Nun sey die gerade Linie GT, Fig. 131, beliebig schief gelegt, der Schnitt der schneidenden Ebene und der Grundfläche, und auf sie aus dem Mittelpunkte der Grundfläche C die senkrechte Linie GC = f herabgefällt. Man setze den Winkel BCG = ϑ; und den Neigungswinkel CGD = φ, welchem der Winkel QTM gleich seyn wird, wenn man QT auf GT senkrecht zieht. Es ist daher

$$DG = \frac{f}{\cos.\varphi}; \text{ und } CD = \frac{f.\sin.\varphi}{\cos.\varphi}$$

Es sey M ein Punkt in dem gesuchten Schnitte, und aus ihm senkrecht MQ auf die Grundfläche, und von hier QP auf die Axe gefällt, so daß, wenn man CP = x, QP = y und QM = z setzt,

$$aacc = aayy + ccxx$$

werde. Ferner ziehe man auf die Durchschnittslinie GT die geraden Linien PV und QT senkrecht, so ist

$$GV = x.\sin.\vartheta; \; PV = f - x.\cos.\vartheta$$

und da der Winkel QPW = ϑ ist, so wird

$$QW = y.\sin.\vartheta; \; PW = VT = y.\cos.\vartheta; \text{ und}$$

$$QT = f - x.\cos.\vartheta + y.\sin.\vartheta.$$

Zieht man endlich MT, so wird, weil MTQ = φ ist

$$TM = \frac{z}{\sin.\varphi}; \text{ und } QT = \frac{z.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$$

§. 59.

Nun ergänze man das Rechteck GSMT, und setze $DS = t$; $SM = GT = u$: so wird

$$u = GV + VT = x.\sin.\vartheta + y.\cos.\vartheta.$$

und da $QT = f - x.\cos.\vartheta + y.\sin.\vartheta$ ist, so wird ferner

$$QT - CG = y.\sin.\vartheta - x.\cos.\vartheta,$$

und folglich

$$DS = TM - DG = \frac{y.\sin.\vartheta - x.\cos.\vartheta}{\cos.\varphi} = t$$

Da also $x.\sin\vartheta. + y.\cos.\vartheta = u$; und $y.\sin.\vartheta - x.\cos.\vartheta = t.\cos.\varphi$ ist, so hat man

$$y = u.\cos.\vartheta + t.\sin.\vartheta.\cos.\varphi; \text{ und}$$
$$x = u.\sin.\vartheta - t.\cos.\vartheta.\cos.\varphi.$$

Bringt man diese Werthe in die Gleichung $aacc = aayy + ccyy$, so bekommt man

$$aacc =$$
$$aauu(\cos.\vartheta)^2 + 2aaut.\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\varphi + aatt(\sin.\vartheta)^2 (\cos.\varphi)^2$$
$$ccuu(\sin.\vartheta)^2 - 2ccut.\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\varphi + cctt(\cos.\vartheta)^2 (\cos.\varphi)^2$$

und diese Gleichung ist eine Gleichung für eine Ellipse, welche den Mittelpunkt in D hat, und deren Coordinaten DS und SM auf den Hauptaxen nicht senkrecht sind, wofern nicht $a = c$, oder der Cylinder ein gerader Cylinder ist.

§. 60.

Um diesen Schnitt genauer kennen zu lernen, lasse man aMebf, Fig. 132, die Curve bedeuten, deren Gleichung zwischen den Coordinaten $DS = t$ und $MS = u$ gefunden worden; der Kürze wegen wollen wir dafür $aacc = \alpha uu + 2\beta tu + \gamma tt$ annehmen, so daß für den gegenwärtigen Fall

$$\alpha = aa(\text{cos.}\,\vartheta)^2 + cc(\text{sin.}\,\vartheta)^2$$
$$\beta = (aa - cc)\,\text{sin.}\,\vartheta.\,\text{cos.}\,\vartheta.\,\text{cos.}\,\phi$$
und
$$\gamma = aa(\text{sin.}\,\vartheta)^2\,(\text{cos.}\,\phi)^2 + cc(\text{cos.}\,\vartheta)^2\,(\text{cos.}\,\phi)^2$$

ist. Die zugehörigen Hauptaxen dieses Schnittes seyen ab und ef, und nachdem man auf die eine davon die Applicate Mp gezogen, setze man $Dp = p$, und $Mp = q$, desgleichen den Winkel $aDH = \zeta$: so wird

$$u = p.\,\text{sin.}\,\zeta + q\,\text{cos.}\,\zeta; \text{ und}$$
$$t = p.\,\text{cos.}\,\zeta - q.\,\text{sin.}\,\zeta$$

und durch die Substitution dieser Werthe bekommt man

$$aacc =$$
$$\begin{array}{lll} + \alpha(\text{sin.}\,\zeta)^2 & + 2\alpha.\,\text{sin.}\,\zeta.\,\text{cos.}\,\zeta & + \alpha(\text{cos.}\,\zeta)^2 \\ + 2\beta\,\text{sin.}\,\zeta.\,\text{cos.}\,\zeta\; pp & \begin{array}{l} + 2\beta(\text{cos.}\,\zeta)^2 \\ - 2\beta(\text{cos.}\,\zeta)^2 \end{array} pq & - 2\beta\,\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,\zeta\; qq \\ + \gamma.(\text{cos.}\,\zeta)^2 & - 2\beta\,\text{sin.}\,\zeta.\,\text{cos.}\,\zeta. & + \gamma(\text{sin.}\,\zeta)^2 \end{array}$$

§. 61.

Da diese Gleichung auf einen rechtwinkligen Durchmesser bezogen wird, so muß der Coefficient von $pq = 0$ seyn; daher denn, weil $2.\,\text{sin.}\,\zeta.\,\text{cos.}\,\zeta = \text{sin.}\,2\zeta$; und $(\text{cos.}\,\zeta)^2 - (\text{sin.}\,\zeta)^2 = \text{cos.}\,2\zeta$ ist

$$(\alpha - \gamma)\,\text{sin.}\,2\zeta + 2\beta.\,\text{cos.}\,2\zeta = 0$$
und folglich
$$\text{tang.}\,2\zeta = \frac{2\beta}{\gamma - \alpha}$$

wird. Hierdurch lernt man den Winkel aDH, und folglich auch die Lage der Hauptdurchmesser kennen. Was die Halbaxen selbst betrifft, so kann man dieselben auf folgende Art bestimmen.

$$aD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\text{sin.}\,\zeta)^2 + 2\beta.\,\text{sin.}\,\zeta.\,\text{cos.}\,\zeta + \gamma(\text{cos.}\,\zeta)^2)}}$$

und

und

$$eD = \frac{ac}{\sqrt{(\alpha(\cos.\zeta)^2 - 2\beta.\sin.\zeta.\cos.\zeta + \gamma(\sin.\zeta)^2)}}$$

§. 62.

Da $2\beta = \frac{2(\gamma - \alpha).\sin.\zeta.\cos.\zeta}{\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2}$ ist, so wird, wenn man diesen Werth in die gefundenen Ausdrücke bringt,

$$aD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\gamma.\cos.\zeta^2 - \alpha.\sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha + \gamma.).\cos.2\zeta - \alpha + \gamma)}}$$

und

$$eD = \frac{ac\sqrt{(\cos.\zeta^2 - \sin.\zeta^2)}}{\sqrt{(\alpha.\cos.\zeta^2 - \gamma.\sin.\zeta^2)}} = \frac{ac\sqrt{2.\cos.2\zeta}}{\sqrt{((\alpha + \gamma.\cos.2\zeta + \alpha - \gamma)}}$$

Das Produkt dieser beyden Halbaxen ist demnach

$$aD.eD = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{\sqrt{(2\alpha\gamma(1 + (\cos.2\zeta)^2) - \alpha\alpha + \gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2)}}$$

Da nun

$$(\gamma - \alpha.).\sin.2\zeta = 2\beta.\cos.2\zeta$$

ist, so wird

$$(\alpha\alpha + \gamma\gamma)(\sin.2\zeta)^2 = 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2 + 2\alpha\gamma(\sin.2\zeta)^2$$

und folglich

$$aD.eD = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{\sqrt{(4\alpha\gamma(\cos.2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\cos.2\zeta)^2)}} = $$

$$\frac{aacc}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta\beta)}} = \frac{ac}{\cos.\phi}.$$

§. 63.

Da

$$aD^2 = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{(\alpha + \gamma).\cos.2\zeta - \alpha + \gamma}$$

und

$$eD^2 = \frac{2aacc.\cos.2\zeta}{(\alpha + \gamma).\cos.2\zeta + \alpha - \gamma}$$

 ist,

ist, so wird

$$aD^2 + eD^2 = \frac{4aacc.(\alpha+\gamma)(\cos. 2\zeta)^2}{4\alpha\gamma(\cos. 2\zeta)^2 - 4\beta\beta(\cos. 2\zeta)^2} = \frac{(\alpha+\gamma)aacc}{\alpha\gamma-\beta\beta}$$

und hieraus fließt

$$aD + eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha+\gamma+2\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)}}$$

und

$$aD - eD = \frac{ac\sqrt{(\alpha+\gamma-2\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)})}}{\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)}}$$

Es sind demnach die Halbaxen aD und eD die Wurzeln dieser Gleichung

$$(\alpha\gamma-\beta\beta)x^4 - (\alpha+\gamma)aaccxx + a^4c^4 = 0$$

und

$$\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)} = ac.\cos.\phi.$$

§. 64.

Da $aD.eD = \frac{ac}{\cos.\phi}$, und ϕ der Winkel ist, welchen die schneidende Ebene mit der Grundfläche macht, so fließt hieraus folgender schöne Lehrsatz:

Lehrsatz.

Wenn ein Cylinder von einer Ebene geschnitten wird, so verhält sich allemal das Rechteck der Axen des Schnittes zu dem Rechtecke der Axen der Grundflächen des Cylinders, wie die Secante des Winkels, welchen die Ebene des Schnittes mit der Ebene der Grundfläche macht, zum Radius.

Da also alle Parallelogramme um den zugehörigen Durchmessern den aus den Axen erzeugten Rechtecken gleich sind, so stehen auch jene Parallelogramme um der Grundfläche und jedem Schnitte des Cylinders in eben demselben Verhältnisse.

§. 65.

§. 65.

Es kann aber die Natur dieser schiefen Cylinderschnitte bequemer auf folgende Art bestimmt werden. Wenn die Grundfläche des Cylinders die Ellipse AEBF, Fig. 133, die Halbaxen derselben AC = BC = a; EC = CF = c; und die gerade in C auf der Grundfläche senkrechte Linie CD die Axe des Cylinders ist: so schneide den Cylinder eine Ebene, deren Durchschnittslinie mit der Ebene der Grundfläche, TH, mit der verlängerten Axe AB irgend einen schiefen Winkel mache, und auf dieselbe sey CH aus C senkrecht herabgefällt, und der Winkel GCH = ϑ. Geht also die schneidende Ebene durch den Punkt der Axe des Cylinders D, so ist, wenn man DH zieht, der Winkel CHD der Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Ebene der Grundfläche, welchen wir = φ setzen wollen. Macht man daher CG = f, so ist

$$GH = f.\sin.\vartheta;\ CH = f.\cos.\vartheta;$$

$$DH = \frac{f.\cos.\vartheta}{\cos.\varphi};\ \text{und}\ CD = \frac{f.\cos.\vartheta.\sin.\varphi}{\cos.\varphi}.$$

Da also das Dreyeck DCG bey C rechtwinklig ist, so wird

$$DG = \frac{f.\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}}{\cos.\varphi};\ \sin DGH = \frac{\cos.\vartheta}{\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}}$$

$$\cos.DGH = \frac{\sin.\vartheta.\cos.\varphi}{\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin\varphi^2)}}\ \text{u.}\ \mathrm{tang}.DGH = \frac{\cos.\vartheta}{\sin.\vartheta.\cos.\varphi}.$$

§. 66.

Nun fälle man aus einem Punkte des gesuchten Schnittes M auf die Grundfläche die senkrechte Linie MQ herab, ziehe die Applicate QP, und setze CP = x, und PQ = y; so ist

$$aacc = aayy + ccxx$$

Ferner ziehe man QT der CG parallel, und auf ihr sey aus G die GR senkrecht, so ist

$$GR = y; \text{ und } QR f - x.$$

Da also der Winkel $TGR = GCH = \vartheta$ ist, so wird

$$GT = \frac{y}{\text{cos}.\,\vartheta}; \text{ und } TR = \frac{y.\,\text{sin}.\,\vartheta}{\text{cos}.\,\vartheta}$$

und folglich

$$QT = f - x + \frac{y.\,\text{sin}.\,\vartheta}{\text{cos}.\,\vartheta}$$

Ferner sind die Dreyecke CDG und QMT einander ähnlich, und also

$$CG : DG = QT : TM$$

und

$$CG : CG - QT = DG : DS$$

wenn man MS der GT parallel zieht. Hieraus ergiebt sich

$$DS = \frac{(x.\,\text{cos}.\,\vartheta - y.\,\text{sin}.\,\vartheta)\sqrt{(1 + \text{sin}.\,\vartheta^2.\,\text{sin}.\,\varphi^2)}}{\text{cos}.\,\vartheta.\,\text{cos}.\,\varphi.}$$

Setzt man daher $DS = t$ und $MS = u$, so wird

$$x.\,\text{cos}.\,\vartheta - y.\,\text{sin}.\,\vartheta = \frac{t.\,\text{cos}.\,\vartheta.\,\text{cos}.\,\varphi}{\sqrt{(1 + \text{sin}.\,\vartheta^2.\,\text{sin}.\,\varphi^2)}}$$

$$\text{und } y = u.\,\text{cos}.\,\vartheta$$

woraus sich eine Gleichung zwischen t und u ergiebt, die aber noch sehr verwickelt ist.

§. 67.

Man ziehe aber anstatt der Hauptaxen der Basis den Durchmesser EF, der Durchschnittslinie TH parallel, und den zugehörigen Durchmesser AB, welcher verlängert der TH in G begegne. Setzt man, nachdem dieses geschehen, wie vorhin, $CG = f$; $GCH = \vartheta$; $CHD = \varphi$; $CA = CB = m$; $CE = CF = n$; und ist QP dem Durchmesser EF parallel gezogen, und $CP = x$, und $PQ = y$ angenommen

nommen worden, so daß $m^2n^2 = m^2y + n^2x^2$ ist: so wird

$$GT = MS = y$$

und

$$DS = \frac{DG.x}{CG} = \frac{x\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}}{\cos.\varphi}$$

Setzt man also $DS = t$, und $MS = u$, so wird

$$x = \frac{t.\cos.\varphi}{\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}}$$

und

$$y = u.$$

Da aber $\frac{CG}{DG} = \cos.CGD$, und also, wenn man $CGD = \eta$ setzt, $x = t.\cos.\eta$ ist, so erhält man für den gesuchten Schnitt, nach den zugehörigen Durchmessern bestimmt,

$$mmnn = mmuu + nntt.\cos.\eta^2$$

wobey der Mittelpunkt in D fällt, und der eine Halbmesser in der Richtung $DS = \frac{m}{\cos.\eta}$, und der andere $= n$ ist. Was den Winkel GSM betrifft, unter welchem diese Durchmesser gegen einander geneigt sind, so ist

$$\text{tang.}\,GSM = \frac{\cos.\vartheta}{\sin\,\vartheta.\cos.\varphi};\ \text{und}$$

$$\cos.GSM = \frac{\sin.\vartheta.\cos.\varphi}{\sqrt{(1 + \sin.\vartheta^2.\sin.\varphi^2)}} = \sin.\vartheta.\cos.\eta.$$

Auf diese Art läßt sich die Natur des gesuchten Schnittes sehr leicht erkennen.

§. 68.

Wir wenden uns nach dieser Betrachtung der Cylinderschnitte zu dem Kegel, der ein gerader oder ein schiefer seyn mag; es unterscheidet sich aber der schiefe Kegel vom geraden darin, daß die auf der Axe senkrechten Schnitte bey dem schiefen Kegel Ellipsen sind, welche ihre Mittelpunkte in der Axe des Kegels haben, dagegen eben diese Schnitte bey dem geraden Kegel Kreise sind. Es sey also OaebfO, Fig. 134, irgend ein Kegel, der seine Spitze in O, und zur Axe die gerade Linie Oc habe, die auf der Ebene der Tafel senkrecht seyn soll, so daß die Tafel eine durch die Spitze des Kegels O gelegte, und auf der Axe desselben Oc senkrechte Ebene vorstelle. Man ziehe durch O in der Ebene der Tafel die geraden Linien AB, EF, den Axen ab und ef eines jeden auf der Axe senkrechten Schnittes parallel; und fälle aus einem Punkte M des Schnittes aebf auf die Ebene der Tafel die senkrechte Linie MQ, und aus Q auf AB die senkrechte Linie PQ herab: so ist, wenn man $OP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$ setzt, auch die Abscisse des Abschnittes $cp = x$, und die Applicate $pM = y$; folglich, da die Axen ab, ef zu $Oc = QM = z$ ein beständiges Verhältniß haben,

$$m^2 n^2 zz = mmyy + nnxx$$

wenn man $ac = bc = mz$, und $ec = fc = nz$ setzt. Und dieses ist die Gleichung, welche die Natur der conischen Oberfläche zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z ausdruckt.

§. 69.

Da also alle auf der Axe OC senkrechte Schnitte Ellipsen sind, wie aus der Gleichung $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$ (wenn man z einen beständigen Werth beylegt) erhellet: so lassen sich auf ähnliche Art leicht die Schnitte finden, welche entweder auf der geraden Linie AB, oder auf EF senkrecht stehen. Denn wird der Kegel von einer auf AB senkrechten und durch den Punkt P gelegten Ebene geschnitten,

ten, so hat man, wenn man OP = a setzt, für diesen Schnitt die Gleichung

$$m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2a^2$$

zwischen den Coordinaten Pp = z und pM = y, und es ist folglich dieser Schnitt eine Hyperbel, welche den Mittelpunkt in C hat, und deren halbe Zwergaxe = $\frac{a}{m}$, so wie die zugehörige Halbaxe = $\frac{na}{m}$ ist. Auf eben die Art findet man, daß der Schnitt, welcher auf EF senkrecht ist, eine Hyperbel ist, welche den Mittelpunkt in der geraden Linie EF hat.

§. 70.

Wenn die Ebene, von welcher der Kegel geschnitten wird, zwar auf der Ebene AEBF, Fig. 135, aber auf keiner von den Linien AB, EF senkrecht ist, so fällt es auch hier nicht schwer, den Schnitt zu bestimmen. Es schneide nemlich diese Ebene die Grundfläche AEBF in der geraden Linie BE, und zugleich sey OB = a, und OE = b. Man fälle aus einem Punkte M des Schnittes die senkrechte Linie MQ, und aus Q die Applicate QP, so daß OP = x; PQ = y, und QM = z sey: so ist wegen der Natur des Kegels

$$m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2x^2.$$

Es ist also

$$a : b = a - x : y; \text{ oder } y = b - \frac{bx}{a}.$$

Man setze die Coordinaten des Schnittes BQ = t, und QM = z so ist

$$b : \sqrt{(aa + bb)} = y : t$$

und folglich

 y =

$$y = \frac{bt}{\sqrt{(aa + bb)}} \text{ und } a - x = \frac{at}{\sqrt{(aa + bb)}}$$

Es sey $\sqrt{(aa + bb)} = c$, so ist

$$y = \frac{bt}{c} \text{ und } x = a - \frac{at}{c}$$

und man erhält folgende Gleichung zwischen t und z

$$m^2n^2c^2z^2 = m^2b^2tt + n^2a^2cc - 2nnaact + nnaatt.$$

Man setze $t - \frac{nnaac}{m^2b^2 + n^2a^2} = GQ = u$, indem BG $= \frac{nnaac}{m^2b^2 + n^2a^2}$; so wird

$$m^2n^2c^2z^2 = (m^2b^2 + n^2a^2)uu + \frac{m^2n^2a^2b^2c^2}{m^2b^2 + n^2a^2}$$

§. 71.

Es ist also dieser Kegelschnitt eine Hyperbel, welche den Mittelpunkt in G hat, und deren halbe Zwergaxe Ga $= \frac{ab}{\sqrt{(m^2b^2 + n^2a^2)}}$, so wie die halbe zugehörige Axe $= \frac{mnabc}{m^2b^2 + n^2a^2}$ ist. Die Asymptoten dieser Hyperbel aber, welche die Axe Ga in dem Punkte G schneiden werden, machen mit der Axe Ga einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{mnc}{\sqrt{(n^2b^2 + n^2a^2)}}$ ist. Soll also die Hyperbel eine gleichseitige werden, so muß

$$m^2n^2a^2 + m^2n^2b^2 = m^2b + n^2a^2$$

oder

$$\frac{b}{a} = \text{tang. OBE} = \frac{n\sqrt{(mm - 1)}}{m\sqrt{(1 - nn)}}$$

seyn. Wofern also nicht $\frac{mm - 1}{1 - nn}$ größer als o ist, so kann

auf

auf diese Art keine gleichseitige Hyperbel entstehen. Bey einem geraden Kegel, wo $m = n$ ist, ist die Tangente des Winkels, welchen die Asymptoten mit der Axe des Schnittes einschließen, $= m$, und der Winkel = dem Winkel aOc.

§. 72.

Nun sey der Schnitt schief, doch so, daß sein Schnitt BT, Fig. 136, mit der Ebene AEBF auf der geraden Linie AB senkrecht stehe. Man setze $OB = f$, und den Neigungswinkel der Ebene gegen die Ebene der Grundfläche, oder den Winkel $OBC = \varphi$, daß also diese schneidende Ebene in dem Punkte C durch die Axe des Kegels OC gehe. Hiedurch erhält man

$$BC = \frac{f}{\text{cos}.\varphi};\ \text{und}\ OC = \frac{f.\,\text{sin}.\varphi}{\text{cos}.\varphi}$$

Ferner ziehe man aus einem Punkte M des gesuchten Schnittes die Linie MT auf BT, und auf die Grundfläche die Linie MQ, so wie aus Q die Linie QP auf OB senkrecht, und setze $QP = x$; $PQ = y$, und $QM = z$, um

$$m^2n^2z^2 = m^2y^2 + n^2z^2$$

zu bekommen. Endlich mache man die Coordinaten für den Schnitt $BT = t$, und $TM = u$, so ist, weil $QTM = \varphi$

$$QM = z = u.\,\text{sin}.\varphi;\ \text{und}\ TQ = u.\,\text{cos}.\varphi = f = x$$

woher denn

$$y = t : z = u.\,\text{sin}.\varphi;\ \text{und}\ x = f - u.\,\text{cos}.\varphi$$

und also

$$m^2n^2u^2.\,\text{sin}.\varphi^2 = m^2t^2 + n^2(f - u.\,\text{cos}.\varphi)^2$$

wird.

§. 73.

Setzt man $BC = \frac{f}{\text{cos}.\varphi} = g$, so daß $f = g.\,\text{cos}.\varphi$ wird, so ist $x = (g - u)\,\text{cos}.\varphi$, und man erhält für den Kegelschnitt

m²

$$m^2n^2u^2 . \sin . \phi^2 = m^2t^2 + n^2g^2 . \cos . \phi^2 - 2n^2gu . \cos . \phi^2 + n^2u^2 . \cos . \phi^2$$

Man setze

$$u - \frac{g . \cos . \phi^2}{\cos . \phi^2 - m^2 . \sin . \phi^2} = SG = s$$

ziehe MS der BT parallel, und nehme

$$BG = \frac{g . \cos . \phi^2}{\cos \phi^2 - m^2 \sin . \phi^2} = \frac{f . \cos . \phi}{\cos . \phi^2 - m^2 . \sin . \phi^2} = \frac{f . \cos . \phi}{1 - (1 + m^2) . \sin . \phi^2}$$

so daß die Coordinaten $GS = s$ und $SM = t$ werden. Alsdann bekommt man folgende Gleichung:

$$m^2tt + nn(\cos \phi^2 - m^2 . \sin . \phi^2)ss - \frac{mmnnff \sin . \phi^2}{(\cos . \phi^2 - m^2 . \sin . \phi^2)} = 0$$

und es ist daher die Curve ein Kegelschnitt, welcher den Mittelpunkt in G hat, und zwar eine Parabel, wenn der Punkt G unendlich weit fortrückt, welches geschiehet, wenn $\tang . \phi = \frac{1}{m}$, oder die gerade Linie BC der Seite des Kegels Oa parallel wird. In diesem Falle wird

$$mmtt + nnff - 2nnfu . \cos . \phi = 0$$

und der Scheitel der Parabel fällt in G, wenn man $BG = \frac{f}{2 \cos . \phi}$ nimmt, und der Parameter ist $\frac{2nnff . \cos . \phi}{mm}$.

§. 74.

Da der Schnitt eine Parabel wird, wenn $\cos . \phi^2 - m^2 . \sin . \phi^2 = 0$ ist: so ist offenbar, daß derselbe eine Ellipse seyn wird, wenn $\cos . \phi^2$ größer als $m^2 \sin . \phi^2$, oder $\tang . \phi$ größer als $\frac{1}{m}$ ist; und in diesem Falle kommt die

gerade

gerade Linie BC oben mit der entgegengesetzten Seite des Kegels Oa zusammen. Da also $BG = \frac{g}{1 - m^2 \tan g.\,\phi^2}$ ist, so ist BG größer als BC, indem G der Mittelpunkt des gesuchten Schnitts ist. Es ist also die Halbaxe dieses Schnitts in der Richtung $BC = \frac{mf.\,\sin.\,\phi}{\cos.\,\phi^2 - m^2.\,\sin.\,\phi^2}$, und die zugehörige Halbaxe $= \frac{nf.\,\sin.\,\phi}{\sqrt{(\cos.\,\phi^2 - m^2 \sin.\,\phi^2)}}$ und der halbe Parameter $= \frac{nn}{m} f.\,\sin.\,\phi$. Es wird daher der Schnitt ein Kreis seyn, wenn $m = n\sqrt{(\cos.\,\phi^2 - m^2.\,\sin\,\phi^2)}$ oder $mm = nn - nn\,(1 + mm)\sin.\,\phi$ ist; und daher wird

$$\sin.\,\phi = \frac{\sqrt{(nn - mm)}}{n\sqrt{(1 + mm)}} = \sin.\,OBC$$

und

$$\cos.\,\phi = \frac{m\sqrt{(1 + nn)}}{n\sqrt{(1 + mm)}}$$

Wofern also n nicht größer ist als m, so kann keiner von diesen Schnitten ein Kreis seyn.

§. 75.

Wenn $m^2 \sin.\,\phi^2$ größer als $\cos.\,\phi^2$, oder $\tan g.\,\phi$ größer als $\frac{1}{m}$ ist, so daß die gerade Linie BC und die gegenüberstehende Seite des Kegels Oa oben aus einander fahrende Linien sind: so ist der Schnitt eine Hyperbel, deren halbe Zwergaxe $= \frac{mf.\,\sin.\,\phi}{-\cos.\,\phi^2 + m^2 \sin.\,\phi^2}$ die halbe zugehörige Axe $= \frac{nf.\,\sin.\,\phi}{\sqrt{(m^2 \sin.\,\phi^2 - \cos.\,\phi^2)}}$, der halbe Parameter $= \frac{nn}{m} f.\,\sin.\,\phi$, und die Tangente des Winkels, unter

wel-

welchem die Asymptoten die Axe in dem Mittelpunkte G schneiden $= \frac{n}{m} \sqrt{(m^2 \sin. \phi^2 - \cos. \phi^2)}$ ist. Es wird folglich die Hyperbel gleichseitig seyn, wenn

$$m^2 n^2 . \sin. \phi^2 - n^2 \cos. \phi^2 = m^2 = (mm + 1)$$

$$nn \sin. \phi^2 - nn = mm$$

oder

$$\sin. \phi = \frac{\sqrt{(mm + nn)}}{n \sqrt{(1 + mm)}} \text{ und } \cos. \phi = \frac{m \sqrt{(nn - 1)}}{n \sqrt{(1 + mm)}}$$

ist. Wofern also n nicht größer als 1 ist, so kann durch diesen Schnitt keine gleichseitige Hyperbel entstehen.

§. 76.

Wenn der Kegel ein gerader Kegel, oder $m = n$ ist, so lassen sich alle Schnitte auf die von uns untersuchten beziehen, weil die Lage der geraden Linie AB von unserer Willkühr abhängt. Was aber den schiefen Kegel betrift, so müssen wir noch die Schnitte untersuchen, welche von einer Ebene, die gegen die gerade Linie AB irgend eine schiefe Neigung hat, gemacht worden. Es sey daher BR, Fig. 137, ein Durchschnitt der schneidenden Ebene mit der Ebene der Grundfläche. Man setze $OB = f$, den Winkel $OBR = \vartheta$, und den Neigungswinkel der schneidenden Ebene gegen die Grundfläche $= \phi$: so ist, wenn man aus O nach BR die OR senkrecht zieht,

$$OR = f . \sin. \vartheta; \text{ und } BR = f . \cos. \vartheta$$

Zieht man ferner in der schneidenden Ebene die gerade Linie RC, so ist, da der Winkel $ORC = \phi$,

$$RC = \frac{f . \sin. \vartheta}{\cos. \phi}; \text{ und } OC = \frac{f . \sin. \vartheta . \sin. \phi}{\cos. \phi}$$

Wird nun der auf der Axe des Kegels OC senkrechte Schnitt auf der Ebene der Grundfläche entworfen, so fallen seine beyden

den Hauptaxen nach AB und EF, und verhalten sich gegen einander wie m : n.

§. 77.

In dieser Projection des Schnittes ziehe man den Durchmesser ef der BR parallel, so ist der Winkel BOe = ϑ, und dabey sey aOb die Lage des zugehörigen Durchmessers. Man setze den Halbmesser Oa = μ, und Oe = ν, so ist

$$\mu = \frac{\sqrt{(m^4 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^4 \,.\, \cos.\, \vartheta^2)}}{\sqrt{(m^2 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^2 \,.\, \cos.\, \vartheta^2)}}$$

$$\nu = \frac{m\,n}{\sqrt{(m^2 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^2 \,.\, \cos.\, \vartheta^2)}}$$

und

$$\text{tang. } BOb = \frac{m\,n \,.\, \cos.\, \vartheta}{m\,m \,.\, \sin.\, \vartheta}$$

Es ist folglich von diesem Winkel

$$\text{der Sinus} = \frac{n\,n \,.\, \cos.\, \vartheta}{\sqrt{(m^4 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^4 \,.\, \cos.\, \vartheta^2)}}$$

und

$$\text{der Cosinus} = \frac{m\,m \,.\, \sin.\, \vartheta}{\sqrt{(m^4 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^4 \,.\, \cos.\, \vartheta^2)}}$$

Da nun der Winkel ObR = ϑ + BOb ist, so wird

$$\sin.\, ObR = \frac{m^2 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^2 \,.\, \cos.\, \vartheta^2}{\sqrt{(m^4 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^4 \,.\, \cos.\, \vartheta^2)}}$$

und

$$\cos.\, ObR = \frac{(m\,m - n\,n) \,.\, \sin.\, \vartheta \,.\, \cos.\, \vartheta^2}{\sqrt{(m^4 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^4 \,.\, \cos.\, \vartheta^2)}}$$

und dabey ist

$$\mu\nu = \frac{m\,n\sqrt{(m^4 \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n^4 \,.\, \cos.\, \vartheta^2)}}{m\,m \,.\, \sin.\, \vartheta^2 + n\,n \,.\, \vartheta^2}$$

§. 78.

Da also $OR = f.\sin.\vartheta$ ist, so wird

$$Ob = \frac{OR}{\sin.\,ObR} = \frac{f.\sin.\vartheta\sqrt{(m^4.\sin.\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2)}}{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}$$

und

$$Rb = \frac{(mm - nn)\,f.\sin.\vartheta.\cos.\vartheta}{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}$$

und da das Dreyeck CbR bey R rechtwinklig ist, so ist

$$\text{tang.}\,CbR = \frac{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}{(m^2 - n^2)\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\varphi}$$

wodurch der Winkel CbR bekannt wird. Nun fälle man aus einem Punkte des Schnittes M auf die gerade Linie RT die MT der Cb parallel, und aus M nach Cb die MS der RT parallel, setze $bT = MS = t$, und $bS = TM = u$, und betrachte diese Linien als schiefwinklige Coordinaten des gesuchten Schnittes, indem tang. bSM $= \dfrac{m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2.\cos.\vartheta^2}{(m^2 - n^2)\sin.\vartheta.\cos.\vartheta.\cos.\varphi}$ ist. Es erhellet also, daß diese Cordinaten bey einem geraden Kegel rechtwinklig werden, weil dabey $m = n$ ist.

§. 79.

Aus dem Punkte M des Schnittes fälle man auf die Ebene $AEBF$ die senkrechte Linie MQ herab, so wird TQ dem Durchmesser ab parallel; auch ziehe man aus Q die Ordinate QP dem andern Durchmesser ef parallel. Setzt man nunmehr $OP = x$; $PQ = y$; und $QM = z$, so ist wegen der Natur des Kegels

$$m^2\nu^2z^2 = \mu^2y^2 + \nu^2x^2.$$

Denn wenn man sich durch M einen der Grundfläche parallelen Schnitt des Kegels gedenkt, so sind die Durchmesser desselben die den geraden Linien ab und ef parallel sind,

μ^2

μz und νz. Da man aber die Catheten des rechtwinkligen Dreyecks COb, oder OC und Ob kennt, so ist die Hypothenuse Cb =

$$\frac{f.\sin.\vartheta\sqrt{(m^4.\sin\vartheta^2 + n^4.\cos.\vartheta^2 - (m^2-n^2)^2\sin\vartheta^2.\cos.\vartheta^2\sin.\varphi^2)}}{(m^2.\sin.\vartheta^2 + n^2\cos.\vartheta^2)\cos.\varphi}$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke TMQ und bCO ist

$$TM(u) : TQ(Ob - x) : QM(z) = bC : Ob : OC$$

folglich

$$x = Ob - \frac{Ob.u}{Cb};\ z = \frac{OC.u}{Cb};\ \text{und } y = t$$

also

$$\mu^2\nu^2.OC^2.u^2 = \mu^2.Cb^2.t^2 + \nu^2.Ob^2(Cb - u)^2$$

§. 80.

Entwickelt man diese Gleichung, so bekommt man

$$o = \mu^2.Cb^2.tt + \nu^2(Ob^2 - \mu^2.OC^2)uu - 2\nu^2.Ob^2.Cb.u + \nu^2.Ob^2.Cb^2$$

und wenn man darin $u - \frac{Ob^2.Cb}{Ob^2 - \mu^2.OC^2} = s$ setzt, oder

$$bG = \frac{Ob^2.Cb}{Ob^2 - \mu^2.OC^2} = \frac{Cb}{1 - (\mu^2.\sin.\vartheta^2 + n.\cos.\vartheta^2)\tang\varphi^2}$$

und GS = s annimmt: so ist G der Mittelpunkt des Kegelschnitts, der durch folgende Gleichung zwischen den Coordinaten t und s ausgedruckt wird,

$$\mu^2.Cb^2.tt + \nu^2(Ob^2 - \mu^2.OC^2)ss = \frac{\mu^2\nu^2.Ob^2.OC^2.Cb^2}{Ob^2 - \mu^2.OC^2}$$

und dessen halbe Axe $= \frac{\mu.Ob.OC.Cb}{Ob^2 - \mu^2 OC^2}$, die zugehörige halbe Axe $= \frac{\nu.Ob.OC}{\sqrt{(Ob^2 - \mu^2.OC^2)}}$, und der halbe Parameter $= \frac{\nu\nu.Ob.OC}{\mu.Cb}$ ist. Uebrigens erhellet, daß die

Curve, wenn tang. φ kleiner als $\frac{1}{\sqrt{(m^2 . \sin \vartheta^2 + n^2 . \cos \vartheta^2)}}$ oder tang. φ kleiner als $\frac{\nu}{mn}$ ist, eine Ellipse, wenn tang. $\varphi = \frac{\nu}{mn}$, eine Parabel, und wenn tang. φ größer als $\frac{\nu}{mn}$ ist, eine Hyperbel seyn wird.

§. 81.

Der dritte Körper, dessen von einer Ebene gemachte Schnitte wir hier untersuchen wollen, ist die Kugel, von welcher aus der Elementar-Geometrie bekannt ist, daß alle ebene Schnitte derselben Kreise sind. Damit indessen die Methode, aus jeder für einen Körper gegebenen Gleichung jeden Schnitt desselben zu finden, deutlicher werde, so will ich hier eben das analytisch vortragen, was man sonst synthetisch zu lehren pflegt. Es sey also, Fig. 138, C der Mittelpunkt der Kugel, und durch denselben gehe die Ebene der Tafel, so daß der durch diese Ebene gemachte Schnitt ein größter Kreis sey, der den Halbmesser CA = CB = r habe, welcher zugleich der Halbmesser der Kugel seyn wird. Ferner sey die gerade Linie DT der Durchschnitt der schneidenden Ebene mit jener Ebene der Tafel, und auf ihr aus dem Mittelpunkte C die gerade Linie CD = f senkrecht, der Neigungswinkel aber = φ.

§. 82.

Es sey M irgend ein Punkt in dem gesuchten Schnitte, und aus demselben auf die Ebene der Tafel MQ, so wie von hier auf die zur Axe angenommene CD die QP senkrecht

recht. Setzt man nun die Coordinaten $CP = x$, $PQ = y$, und $QM = z$, so ist wegen der Natur der Kugel

$$xx + yy + zz = aa.$$

Man ziehe aus M auch auf DT eine senkrechte Linie MT, so wird der Winkel MTQ der Neigungswinkel der schneidenden Ebene und der Ebene der Grundfläche seyn, welchen wir $= \varphi$ gesetzt haben. Betrachtet man daher DT und MT als die Coordinaten des gesuchten Schnittes, und setzt $DT = t$, und $TM = u$, so wird

$$MQ = u.\sin.\varphi, \text{ und } TQ = u.\cos.\varphi$$

und folglich

$$CP = x = f - u.\cos.\varphi; \; PQ = y = t; \text{ und}$$
$$QM = z = u.\sin.\varphi.$$

Substituirt man diese Werthe, so erhält man folgende Gleichung für den gesuchten Kugelschnitt:

$$ff - 2fu.\cos.\varphi + uu + tt = aa.$$

§. 83.

Es erhellet, daß dies eine Gleichung für einen Kreis ist. Denn setzt man $u - f.\cos.\varphi = s$, so wird

$$ff.\sin.\varphi^2 + ss + tt = aa$$

und es ist folglich der Halbmesser des Schnittes $= \surd(aa - ff.\sin.\varphi^2)$. Wenn also aus D, der Applicate TM parallel, die Linie Dc gezogen, und auf sie die senkrechte Linie Cc aus dem Mittelpunkte herabgefällt wird: so ist, wegen $CD = f$, und $CDc = \varphi$

$$Dc = f.\cos.\varphi; \text{ und } Cc = f.\sin.\varphi.$$

Da daher die Coordinaten s und t auf den Mittelpunkt bezogen werden, so ist c der Mittelpunkt des Schnitts, und $\surd(CB^2 - Cc^2)$ der Radius desselben, wie aus den Elementen bekannt ist. Auf ähnliche Art aber lassen sich auch alle durch Ebenen gemachte Schnitte aller Körper, deren Natur durch eine Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen ausgedruckt ist, erforschen.

§. 84.

Damit indeß diese Operation noch deutlicher werde, so sey ein Körper gegeben, dessen Natur durch eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten $AP = x$; $PQ = y$ und $QM = z$, Fig. 139, ausgedruckt werde; wovon die beyden ersten in der Ebene der Tafel liegen, die dritte z aber darauf senkrecht stehen mag. Ferner werde dieser Körper durch eine Ebene geschnitten, die mit der Ebene der Tafel die Linie DT gemein habe, und deren Neigungswinkel $= \phi$ sey. Man setze $AD = f$, und den Winkel $ADE = \vartheta$ so ist, wenn man aus A nach DE die senkrechte Linie AE zieht,

$$AE = f. \sin. \vartheta, \text{ und } DE = f. \cos. \vartheta.$$

Hierauf ziehe man aus einem Punkte des gesuchten Schnittes M auf DT die MT senkrecht, und verbinde Q und T durch QT: so ist der Winkel $MTQ = \phi$. Nimmt man daher $DT = TM$ zu den Coordinaten des gesuchten Schnittes und setzt man $DT = t$, und $TM = u$, so wird

$$QM = u. \sin. \phi; \text{ und } TQ = u. \cos. \phi$$

§. 85.

Aus T fälle man auf die Axe AD die Linie TV senkrecht, so ist wegen $TDV = \vartheta$,

$$TV = t. \sin. \vartheta; \text{ und } DV = t. \cos. \vartheta$$

Da ferner der Winkel $TQP = \vartheta$ ist, so wird

$$PV = u. \sin. \vartheta. \cos. \phi; \text{ und } PQ - TV = u \cos. \vartheta. \cos. \phi$$

Hier-

Hieraus lassen sich die Coordinaten x, y und z durch t und u auf folgende Art bestimmen:

$$AP = x = f + t.\cos\vartheta - u.\sin.\vartheta.\cos.\varphi$$

$$PQ = y = \quad t.\sin.\vartheta. + u.\cos.\vartheta.\cos.\varphi$$

und

$$QM = z = u.\sin.\varphi$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung zwischen x, y und z, welche für den Körper gegeben ist, so bekommt man eine Gleichung zwischen t und u, oder den Coordinaten des gesuchten Schnittes, dessen Natur also dadurch bekannt wird. Es stimmt aber diese Methode mit der fast überein, welche wir oben §. 50 gebraucht haben.

Viertes Capitel.

Von der Verwechselung der Coordinaten.

§. 86.

So wie die Gleichungen für die krummen Linien, die in einer Ebene liegen, durch Veränderung entweder des Anfangspunkts der Abscissen, oder der Lage der Axen, oder beyder Dinge, unzählige Formen bekommen können, so findet diese Verschiedenheit bey den gegenwärtigen Gleichungen in einem noch weit höhern Grade statt. Denn einmal können in der Ebene, in welcher zwey Coordinaten liegen, diese Coordinaten auf unzählige Arten verändert worden; und dann läßt sich auch die Ebene, welche zwey Coordinaten enthält, verändern, und auf diese Weise die vorhergehende Verschiedenheit unendlich vermehren. Ist nemlich eine Gleichung zwischen drey auf einander senkrechten Coordinaten gegeben, so läßt sich allemal eine andere Gleichung zwischen drey andern ebenfalls auf einander senkrechten Coordinaten finden, deren Lage in Ansehung der vorigen unendlich mehrmal verändert werden kann, als wenn nur zwey Coordinaten da wären, wie bey den Gleichungen für die krummen Linien.

§. 87.

Angenommen, daß zuvörderst bloß der Anfangspunkt der Abscissen x in der Axe verändert werde, und die bey-

den

den übrigen Coordinaten dieselben bleiben; so wird die neue Abscisse von der vorigen um eine beständige Größe unterschieden seyn. Es sey also die neue Abscisse $= t$, so ist $x = t \pm a$; und bringt man diesen Werth in die für die Fläche gegebene Gleichung, so bekommt man eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten t, y und z, die zwar von der vorigen verschieden ist, aber gleichwohl eben der Fläche zugehört. Auf ähnliche Art können auch die übrigen Coordinaten y und z um beständige Größen vermehrt oder vermindert werden: und setzt man $x = t \pm a$; $y = u \pm b$; und $z = v \pm c$, so bekommt man eine Gleichung für eben die Fläche zwischen den Coordinaten t, u und v, welche selbst den vorigen parallel sind. Ob indeß diese Gleichung gleich allgemeiner ist, so ist sie doch von der gegebenen eben nicht sehr verschieden.

§. 88.

Da die drey rechtwinkligen Coordinaten, deren Gleichung die Natur der Fläche ausdruckt, auf drey auf einander senkrechte Ebenen bezogen werden, so wollen wir annehmen, daß die neue Ebene, in welcher die beyden Coordinaten x und y genommen werden, unverändert bleibe, daß aber darin eine andere gerade Linie CT, Fig. 140, zur Axe angenommen werde. Da nun die vorigen Coordinaten bey der Axe AP folgende waren, $AP = x$, $PM = y$, $QM = z$, so bleibt für die neue Axe CQ die Coordinate $QM = z$ dieselbe, die beyden übrigen aber werden $CT = t$, und $TQ = u$, wenn man QT auf die neue Axe CT senkrecht gezogen hat. Um daher die Gleichung zwischen diesen neuen Coordinaten t, u und z zu finden, ziehe man CR der vorigen Axe AP parallel, und aus C auf sie CB senkrecht, und setze $AB = a$, $BC = b$, und den Winkel

RCT $= \zeta$. Endlich ziehe man TR auf CR, und aus T auf PQ die TS senkrecht.

§. 89.

Ist dieses geschehen, so ist in dem Dreyeck TCR

$$TR = t.\sin.\zeta; \text{ und } CR = t \cos.\zeta$$

in dem Dreyecke QTS aber, dessen Winkel bey Q ebenfalls $= \zeta$ ist,

$$TS = u \sin.\zeta; \text{ und } QS = u.\cos.\zeta$$

Hieraus findet man

$$AP = x = CR + TS - AB = t.\cos.\zeta + u.\sin.\zeta - a;$$

und

$$QP = y = QS - TR - BC = u.\cos.\zeta - t.\sin.\zeta - b$$

Bringt man daher diese Werthe für x und y in die für die Fläche gegebene Gleichung, so bekommt man eine andere Gleichung zwischen den neuen Coordinaten t, u und z, welche ebenfalls die Natur der gegebenen Fläche ausdruckt. Diese neue Gleichung hat einen viel weitern Umfang, da in ihr drey neue willkührliche beständige Größen a, b, und der Winkel ζ befindlich sind, die in der vorigen Gleichung nicht anzutreffen waren. Auch ist sie die allgemeinste Gleichung, wenn die Ebene, worin x und y liegen, beybehalten wird.

§. 90.

Es ändere sich nunmehr auch die Ebene, in welcher x und y angenommen worden, und zwar zuvörderst so, daß die Durchschnittslinie der neuen Ebene mit der vorigen APQ, Fig. 141, in die gerade Linie AP falle, die zugleich als die Axe der neuen Coordinaten angesehen werden soll. Es sey also APT diese neue Ebene, deren Neigungswinkel gegen die vorige der Winkel QPT ist, den wir $= \theta$ setzen wollen, und aus M nach PT senkrecht MT gezogen, welche

welche auch auf der neuen Ebene senkrecht seyn wird, und die Stelle der dritten Coordinate vertreten kann. Man setze also $AP = x$, $PT = u$; und $TM = v$, so ist, wenn wenn man TR auf PQ und TS auf QM senkrecht gezogen hat,

$$TR = u.\sin.\eta;\ PR = u.\cos.\eta;\ Ts = v.\sin.\eta;$$
$$MS = v.\cos.\eta$$

und folglich

$$PQ = y = u.\cos.\eta - v.\sin.\eta;\ \text{und}$$
$$QM = z = v.\cos.\eta - u.\sin.\eta.$$

Bringt man diese Werthe für y und z in die gegebene Gleichung, so erhält man eine zwischen den drey neuen Coordinaten x, u, und v, welche die Natur eben der Fläche ausdruckt.

§. 91.

Es falle nun der Schnitt der neuen schneidenden Ebene und der Ebene APQ in irgend eine Linie CT, und η sey der Neigungswinkel dieser Ebenen, und CT die Axe in dieser Ebene. Man suche zuvörderst eine Gleichung zwischen den Coordinaten in der Ebene APQ auf die Axe CT bezogen, welche man aus der vorhergehenden auf die Art finden wird, daß bey

$$AB = a;\ BC = b;\ TCR = \zeta;\ CT = p;\ TQ = q;$$
$$\text{und } QM = r$$
$$x = p.\cos.\zeta + q.\sin.\zeta - a;$$
$$y = q.\cos.\zeta - p.\sin.\zeta - b;\ \text{und } z = r$$

ist. Es wird aber aus dem vorhergehenden §, wenn man die neuen Coordinaten t, u und v nennt

$$p = t;\ q = u.\cos.\eta - v.\sin.\eta;\ \text{und } r = v.\cos.\eta + u.\sin.\eta,$$

und folglich

$$x = t \cdot \cos\zeta + u \cdot \sin\zeta \cdot \cos\eta - v \cdot \sin\zeta \cdot \sin\eta - g$$
$$y = -t \cdot \sin\zeta + u \cdot \cos\zeta \cdot \cos\eta - v \cdot \cos\zeta \cdot \sin\eta - h$$

und

$$z = u \cdot \sin\eta + v \cdot \cos\eta.$$

§. 92.

Nun nehme man in der neuen Ebene, in welcher die Coordinaten t und u liegen, irgend eine andere Linie zur Axe an, um die allgemeinste Gleichung für die gegebene Fläche zu bekommen. Es seyen zu dem Ende AP, PQ, QM, Fig. 140, die Coordinaten t, u und v, welche wir so eben gefunden haben, so daß AP der Durchschnitt der erwähnten Ebene mit derjenigen sey, in welcher man sich die Hauptcoordinaten x und y denkt. Es sey CT die neue Axe, auf welche die neuen allgemeinsten Coordinaten, welche wir suchen, bezogen werden, und CT = p; TQ = q; und QM = r. Außerdem sind die Linien AB und BC beständige Linien, der Winkel CTR aber sey = ϑ. Dies vorausgesetzt, so ist nach § 89.

$$t = p \cdot \cos\vartheta + q \cdot \sin\vartheta - AB$$
$$u = -p \cdot \sin\vartheta + q \cdot \cos\vartheta - BC$$

und

$$v = r.$$

Bringt man diese Werthe in die Ausdrücke des vorhergehenden §, so findet man

$$x = p(\cos\zeta \cdot \cos\vartheta - \sin\zeta \cdot \cos\eta \cdot \sin\vartheta) + q \cdot (\cos\zeta \cdot \sin\vartheta + \sin\zeta \cdot \cos\eta \cdot \cos\vartheta) - r \cdot \sin\zeta \cdot \sin\eta + f$$
$$y = -p(\sin\zeta \cdot \cos\vartheta + \cos\zeta \cdot \cos\eta \cdot \sin\vartheta) - q \cdot (\sin\zeta \cdot \sin\vartheta - \cos\zeta \cdot \cos\eta \cdot \cos\vartheta) - r \cdot \cos\zeta \cdot \sin\eta + q$$

und

$$z = -p \cdot \sin\eta \cdot \sin\vartheta + q \cdot \sin\eta \cdot \cos\vartheta + r \cdot \cos\eta \cdot + h$$

wo

wo f, g und h beständige, und aus den in die Rechnung eingeführten entstandene Linien sind.

§. 93.

Es enthält also die allgemeinste Gleichung für jede Fläche sechs beständige willkührliche Größen, die man annehmen kann wie man will, ohne daß deswegen durch die Gleichung eine andere Fläche ausgedruckt werde. So einfach aber eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und z für eine Fläche seyn mag, so wird sie, wenn man daraus die allgemeinste Gleichung zwischen p, q und r macht, wegen der großen Menge der beständigen willkührlichen Größen nothwendig sehr verwickelt, insbesondere, wenn höhere Potestäten von x, y und z vorkommen. Es sind daher die Fälle selten, wo es rathsam wäre, zu der allgemeinsten Gleichung aufzusteigen. Denn wenn man gleich daraus den Vortheil ziehen könnte, daß man durch eine geschickte Bestimmung der beständigen Größe die Gleichung auf die einfachste Form zurückführte, so wird doch diese Arbeit wegen der Weitläuftigkeit des Calculs meistens sehr beschwerlich. Zur Erforschung mehrerer merkwürdigen Eigenschaften aber leistet die Verwandlung der Gleichung in die allgemeinste allerdings Nutzen.

§. 94.

So verwickelt indeß die allgemeinste Gleichung meistens ist, so ist doch die Anzahl der Dimensionen der Coordinaten in derselben der Anzahl der Dimensionen der ersten Coordinaten x, y und z gleich. Die Gleichung für die Kugel z. B. $xx + yy + zz = aa$ ist eine Gleichung von zwey Dimensionen, und die allgemeinste Gleichung enthält ebenfalls nicht mehr Dimensionen der Coordinaten p, q

und

und r. Aus diesem Grunde giebt die Anzahl der Dimensionen, welche die Coordinaten in einer Gleichung für eine Fläche haben, ein wesentliches Kennzeichen der Natur dieser Fläche, weil diese Anzahl immer dieselbe bleibt, man mag die Lage der Coordinaten verändern, wie man will. Es findet sich hier nemlich bey den Flächen eine ähnliche Beschaffenheit wie bey den Curven, wornach wir dieselben in Ordnungen getheilt haben; und es lassen sich daher die Flächen ebenfalls nach den Dimensionen ihrer Coordinaten in Ordnungen theilen. Eine Fläche der ersten Ordnung ist demnach die, deren Gleichung nur eine, eine Fläche der zweyten Ordnung die, deren Gleichung zwey Dimensionen enthalten, u. s. f.

§. 95.

Wenn man dieses mit dem vergleicht, was von der Erfindung der ebenen Schnitte jeder Fläche gelehret worden ist, so nimmt man wahr, daß die Ordnung dieser Schnitte allemal mit der Ordnung der Fläche übereinstimmt. Es sey nemlich eine Gleichung für irgend eine Fläche zwischen den Coordinaten x, y und z gegeben, die zur nten Ordnung gehöre, und die senkrechten Coordinaten eines jeden Schnittes seyen t und u. Nun haben wir oben, § 85, gesehen, daß man die Gleichung zwischen t und u findet, wenn man in der gegebenen Gleichung für die Fläche

$$x = f + t.\mathrm{cos}.\vartheta - u.\mathrm{sin}.\vartheta.\mathrm{cos}.\varphi$$

$$y = t.\mathrm{sin}.\vartheta + u.\mathrm{cos}.\vartheta.\mathrm{cos}.\varphi$$

und

$$z = u.\mathrm{sin}.\varphi$$

setzt, und es ist daher offenbar, daß die Gleichung für den Schnitt nicht mehr Dimensionen bekommen kann, als die Gleichung zwischen x, y und z hat, sondern daß allemal eben so viel Dimensionen wieder entstehen werden.

§. 96.

Es kann also die Fläche der ersten Ordnung von einer Ebene nicht anders als in einer Linie der ersten Ordnung, oder in einer geraden Linie geschnitten werden. Ferner giebt die Durchschneidung einer Fläche der zweyten Ordnung keine andere Linien als Linien der zweyten Ordnung oder Kegelschnitte, denn es gehören auch die conischen Flächen zu der zweyten Ordnung, indem ihre Gleichung

$$zz = \alpha xx + \beta yy$$

ist. Auf ähnliche Art entstehen aus der Durchschneidung einer Fläche der dritten Ordnung durch Ebenen Linien der dritten Ordnung, rc. Es kann indeß geschehen, daß eine Gleichung für einen Schnitt Divisoren zuläßt, und in diesem Falle ist der Schnitt aus zwey oder mehrern Linien von den niedrigern Ordnungen zusammengesetzt. So besteht der durch den Scheitel gehende Schnitt des Kegels aus zwey geraden Linien, die aber zusammengenommen als zu der zweyten Ordnung gehörig sich darstellen.

§. 97.

Nach dieser Bestimmung der Ordnungen der Flächen wollen wir vor allen übrigen die Flächen betrachten, welche zu der ersten Ordnung gehören. Die Gleichung, welche die Natur derselben ausdruckt, ist

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \alpha$$

und da alle ebene Schnitte derselben gerade Linien sind, so fällt in die Augen, daß diese Fläche keine andere als eine Ebene seyn kann; denn sollte sie erhaben oder hohl seyn, so müßte sie auch krummlinige Schnitte haben. Nun giebt es zwar unter den übrigen Ordnungen ebenfalls Flächen, bey welchen gewisse Schnitte gerade Linien sind, wie z. B.

bey

bey den Cylinder dem Kegel und andern dergleichen statt finden, aber es sind doch dabey die krummlinigen Schnitte nicht ganz ausgeschlossen. Es verhält sich nemlich hier auf eine ähnliche Art, wie bey den Linien. So wie eine Linie, die von einer geraden Linie nie in mehr als in einem Punkte geschnitten werden kann, nothwendig eine gerade Linie ist, so ist auch die Fläche, welche, von einer Ebene geschnitten, jedesmal eine gerade Linie giebt, nothwendiger Weise auch selbst eine Ebene.

§. 98.

Aus der allgemeinsten Gleichung läßt sich diese Beschaffenheit aufs klärste darthun. Man mache nemlich aus der Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z + a$ die allgemeinste Gleichung zwischen den Coordinaten p, q und r nach dem 92sten §. Da darin sechs neue willkührliche beständige Größen vorkommen, so ist es allemal möglich und erlaubt, dieselben so zu bestimmen, daß die Coefficienten der beyden Coordinaten p und q verschwinden, und also eine Gleichung von der Form $r = f$ übrig bleibe, welche die Natur eben der Fläche ausdruckt. Es zeigt aber diese Gleichung an, daß die gegebene Fläche der Ebene, in welcher die beyden Coordinaten p und q sind, parallel, und also selbst eine Ebene ist. Man kann es auch so einrichten, daß $r = o$ wird, und auf diese Art fällt es in die Augen, daß die Ebene, wie p und q angenommen worden, selbst die gesuchte Ebene ist.

§. 99.

Da also ausgemacht ist, daß die durch die Gleichung $\alpha x + \beta y + \gamma z = a$ ausgedruckte Fläche eine Ebene ist, so müssen wir die Lage derselben gegen die Ebene, worin die Coordinaten x und y angenommen werden, untersuchen.

Es

Es sey also Fig. 142, M irgend ein Punkt dieser Fläche, und die drey Coordinaten $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$. Man setze zuvörderst $z = 0$, so bekommt man die Gleichung $\alpha x + \beta y = a$, welche den Schnitt der gesuchten Fläche und der Ebene APQ ausdruckt, und es ist klar, daß derselbe eine gerade Linie BCR ist, deren Lage in Rücksicht auf die Axe so beschaffen seyn wird, daß die auf der Axe AP in der Ebene senkrechte Linie $AB = \frac{\alpha}{\beta}$, und $AC = \frac{a}{\alpha}$, und folglich

$$\text{tang. } ACB = \frac{\alpha}{\beta}\text{; sin. } ACB = \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} \text{ und cos. } ACB = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} \text{ ist.}$$

Nun verlängere man die QP bis sie der geraden Linie BC in R begegne, so ist wegen $CP = x - \frac{a}{\alpha}$

$$CR = \frac{x\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\beta} - \frac{a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\alpha\beta}, \text{ und}$$

$$PQ = \frac{\alpha x}{\beta} - \frac{a}{\beta}.$$

§. 100.

Man fälle aus Q auf BC die senkrechte Linie QS herab, und ziehe MS, so mißt der Winkel MSQ die Neigung der gegebenen Fläche gegen die Ebene APQ. Da also $PR = \frac{\alpha x - a}{\beta}$ ist, so ist

$$QR = \frac{\alpha x + \beta y - a}{\beta} = \frac{-\gamma z}{\beta}$$

und da der Winkel RQS den Winkel ACB gleich ist, so wird

QS

$$QS = \frac{-\gamma z}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}$$

und folglich

$$\text{tang. } QSM = \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}, \text{ und cos. } QSM = \frac{\gamma}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

Es neigt sich also die gesuchte Fläche gegen die Ebene, in welcher x und y sind, unter einen Winkel, dessen tang. $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{\gamma}$ ist, und auf ähnliche Art ist eben diese Fläche gegen die Ebene der Coordinaten x und z unter einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{-\sqrt{(\alpha^2 + \gamma^2)}}{\beta}$ und gegen die Ebene der Coordinaten y und z unter einen Winkel, dessen Tangente $= \frac{-\sqrt{(\beta^2 + \gamma^2)}}{\alpha}$ ist, geneigt.

Fünftes Capitel.

Von den Flächen der zweyten Ordnung.

§. 101.

Da wir also die Ordnungen der Flächen nach der Zahl der Dimensionen festgesetzt haben, welche den höchsten Potestäten der drey Coordinaten x, y und z in der Gleichung zukommen: so ist es, wenn eine algebraische Gleichung für eine Fläche gegeben wird, leicht, sogleich die Ordnung anzugeben, zu welcher diese Fläche gehört. Da nun alle Flächen der ersten Ordnung Ebenen sind, so wollen wir in dem gegenwärtigen Capitel die Flächen der zweyten Ordnung betrachten. Bey denselben findet eine weit größere Verschiedenheit statt, als bey den Linien des zweyten Grades, woron sich jeder bey einiger Aufmerksamkeit von selbst überzeugen kann. Ich werde suchen, die verschiedenen Geschlechter dieser Ordnung deutlich vorzustellen; was aber die Flächen der höhern Ordnungen betrifft, so ist die Menge der Geschlechter und Arten bey denselben so groß, daß wir uns der Auseinandersetzung derselben gänzlich enthalten müssen.

§. 102.

Da die Natur der Flächen der zweyten Ordnung durch eine Gleichung ausgedruckt wird, in welcher die veränderlichen Größen x, y und z zu zwey Dimensionen aufsteigen, so gehören der Cylinder und Kegel, die geraden sowohl als die schie-

schiefen, deren Eigenschaften wir schon beschrieben haben, zu dieser Ordnung. Alle Flächen aber, welche dieselbe unter sich begreift, sind in folgender allgemeinen Gleichung enthalten:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$$

Denn man mag die drey Coordinaten annehmen, wie man will, so ist die Gleichung allemal in dieser enthalten. Die verschiedenen Arten der Flächen werden also von den verschiedenen Verhältnissen abhangen, welches die Coefficienten gegen einander haben, die, obgleich eben dieselbe Fläche durch unzählige Gleichungen ausgedruckt wird, dennoch eine unendliche Menge von verschiedenen Flächen erzeugen.

§. 103.

So wie wir bey den Curven die Haupteintheilung daher genommen haben, ob dieselben sich ohne Ende fort erstrecken, oder in einem endlichen Raume enthalten waren: so lassen sich auch alle Flächen, sie mögen zu einer Ordnung gehören, zu was für einer sie wollen, ebenfalls in zwey Classen eintheilen, davon die eine diejenigen Flächen enthält, welche sich ohne Ende fort erstrecken, die andere aber diejenigen, welche in einem endlichen Raume enthalten sind. So gehören der Cylinder und Kegel zu der ersten, und die Kugel zu der zweyten Classe. Von der zweyten Classe aber giebt es keine Art, die zu einer ungeraden Ordnung gehörte. Denn da jede Fläche einer ungeraden Ordnung ebene Schnitte von eben der Ordnung hat, und die Curven der ungeraden Ordnungen sich ohne Ende fort erstrecken, so müssen sich auch die Flächen dieser Ordnungen ohne Ende ausbreiten.

§. 104.

So oft sich aber eine Fläche ohne Ende fort erstrecken soll, so muß zum wenigsten eine von den drey veränderlichen Größen x, y und z unendlich groß werden. Da es nun gleich viel ist, welche dazu angenommen wird, so wollen wir setzen, daß z unendlich wird, wenn die Fläche ohne Ende fortläuft. Bey der Untersuchung dieses ohne Ende sich verbreitenden Theils nehmen wir also $z = \infty$ an, und nun kommt es vorzüglich auf die Betrachtung des ersten Gliedes αzz an, ob dasselbe in der Gleichung vorkommt oder nicht. Ist also dieses Glied da, so verschwinden dagegen die Glieder ηz und κ, und es entsteht für diesen ohne Ende fortlaufenden Theil die Gleichung:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \vartheta y + \iota x = 0$$

in welcher ferner alle Glieder, die nicht unendlich groß, oder solches doch von einer niedrigern Stufe als αzz sind, verschwinden.

§. 105.

Wir wollen annehmen, daß alle Glieder, in welchen die veränderlichen Größen zwey Dimensionen haben, da seyen; denn wie auch die Fläche beschaffen seyn mag, so enthält gleichwohl ihre allgemeinste Gleichung allemal alle Glieder von den höchsten Dimensionen, und es thut daher diese Annahme der Allgemeinheit unserer jetzigen Untersuchung keinen Eintrag. Wenn aber die Glieder yz und xz da sind, so verschwinden dagegen die Glieder ϑy und ιx, und es bleibt folgende Gleichung übrig:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

aus welcher fließt:

$$z = \frac{-\beta y - \gamma x \pm \surd((\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + (2\beta y + 4\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx)}{\alpha}$$

 und

und diese Gleichung druckt die Natur des Theils der Fläche im Unendlichen aus.

§. 106.

Wenn also eine Fläche einen Theil im Unendlichen hat, so stimmt derselbe mit dem Theile der Fläche im Unendlichen überein, welcher durch folgende Gleichung ausgedruckt wird:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

so daß diese Fläche gleichsam die Asymptote jener durch die allgemeine Gleichung ausgedruckten Fläche ist. Da aber in dieser Gleichung die drey veränderlichen Größen allenthalben zwey Dimensionen haben, so ist diese Gleichung eine Gleichung für eine conische Fläche, welche den Scheitel im Anfangspunkte der Coordinaten hat, wo zugleich alle verschwinden; und es läßt sich daher, so oft sich eine Fläche ohne Ende fort erstreckt, allemal eine conische Fläche finden, welche als ihre Asymptote betrachtet werden kann. So wie wir daher die Schenkel der Curven, die sich ohne Ende fort erstreckten, nach geradlinigen Asymptoten eingetheilt haben, so kann man die Theile der Flächen, welche sich ohne Ende verbreiten, nach conischen Asymptoten-Flächen von einander unterscheiden.

§. 107.

So oft daher die conische Asymptoten-Fläche reell ist, so oft erstreckt sich die Fläche selbst ohne Ende fort, und zwar auf die Art, daß die Theile von beyden im Unendlichen zusammenfallen; und man kann daher aus der Natur der Asymptoten-Fläche die Natur der gegebenen Fläche erkennen. Wird aber die Asymptoten-Fläche imaginär, so hat die gegebene Fläche keinen Theil im Unendlichen, sondern

ist

ist ganz in einem endlichen Raume eingeschlossen. Um also die Flächen der zweyten Ordnung, die in einem endlichen Raume eingeschlossen sind, zu erforschen, darf man nur die Fälle aufsuchen, in welchen die Gleichung für die Asymptoten-Fläche imaginär wird, und dieses geschiehet, wenn die ganze Fläche in einen Punkt verschwindet. Denn wenn sie irgend eine Ausdehnung, oder irgend einen Punkt außer dem Scheitel hätte, so müßte sie sich auch ohne Ende fort erstrecken, weil wir oben gezeigt haben, daß die ganze gerade Linie, welche durch den Scheitel und einen Punkt der Fläche gezogen wird, in der Fläche selbst liege.

§. 108.

Wenn also die conische Asymptoten-Fläche, welche durch die Gleichung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

ausgedruckt wird, in einen Punkt übergeht, so müssen alle durch den Scheitel gehende Schnitte derselben gleichfalls in diesen Punkt verschwinden. Es muß daher einmal, wenn man $z = 0$ setzt, die Gleichung $\delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx$ unmöglich seyn, wenn nicht $x = 0$, und $y = 0$ ist, und dieses geschiehet, wenn $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$ ist. Eben dieses muß ferner geschehen, wenn man entweder $x = 0$ oder $y = 0$ setzt, und es wird also $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$, und $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$. Wofern also in einer Gleichung für eine Fläche der zweyten Ordnung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \vartheta y + \iota x + \varkappa = 0$$

nicht $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$; $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$; $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$ ist, so hat die Fläche allemal Theile, die sich ohne Ende fort verbreiten.

§. 109.

Es reichen aber diese drey Bedingungen noch nicht hin, um eine Fläche in einen endlichen Raum einzuschließen, sondern es wird noch außerdem erfordert, daß der aus der Gleichung für die Asymptote hergeleitete Werth von z imaginär werde. Dies geschieht, wenn der Ausdruck

$$(\beta\beta - 4\alpha\delta)yy + 2(\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon)xy + (\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)xx$$

beständig einen negativen Werth bekommt, wenn für jede der veränderlichen Größen x und y irgend ein Werth außer 0 gesetzt wird. Da $\beta\beta - 4\alpha\delta$, und $\gamma\gamma - 4\alpha\zeta$ negative Größen sind, so findet dieses statt, wenn $(\beta\gamma + 2\alpha\varepsilon)^2$ kleiner als $(\beta\beta - 4\alpha\delta)(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)$, oder wenn $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ kleiner als $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ ist, vorausgesetzt, daß α einen positiven Werth habe, weil wir die Gleichung durch α dividirt haben. Hat aber α einen positiven Werth, so sind, weil $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$, und $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$, und $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$ ist, die Coefficienten δ und ζ positiv.

§. 110.

Es wird also eine Fläche der zweyten Ordnung in einem endlichen Raume eingeschlossen seyn, wenn bey ihrer Gleichung folgende vier Bedingungen statt finden, daß nemlich

$4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$

und

$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2$ kleiner als $\beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$

ist. Hiernach bestimmen wir das erste Geschlecht der Flächen der zweyten Ordnung auf die Art, daß wir dazu alle Flächen rechnen, die sich nicht ohne Ende fort verbreiten, sondern in einem endlichen Raume enthalten sind. Zu diesem Geschlechte gehört daher die Kugel, deren Gleichung

$$zz + yy + xx + aa$$

ist. Denn da hier $\alpha = 1$; $\delta = 1$; $\zeta = 1$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $\varepsilon = 0$ ist; so geschieht dadurch allen vier gefundenen Bedingungen ein Genüge. Allgemeiner aber kann man hieher die Gleichung

$$\alpha zz + \delta yy + \zeta xx = aa$$

rechnen, welche, wenn α, δ und ζ positive Größen sind, allemal einer begrenzten Fläche zugehört, wofern nicht ein oder zwey Coefficienten verschwinden.

§. 111.

Hat man sich von der Richtigkeit dieser vier Bedingungen, wodurch eine Fläche zu einer begrenzten wird, überzeugt, so ist es, wenn eine Gleichung für eine Fläche gegeben ist, leicht zu bestimmen, ob diese Fläche ohne Ende sich erstreckende Theile haben werde oder nicht. Fehlt nemlich eine von diesen Bedingungen, so hat sie gewiß dergleichen. In diesem Falle werden aber einige Unterabtheilungen nothwendig, um die ohne Ende sich erstreckenden Theile von einander zu unterscheiden. Die erste Unterabtheilung wird also seyn, wenn

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 \text{ größer als } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

ist, in welchem Falle die Fläche sich ohne Ende fort verbreiten, und eine conische Fläche zur Asymptote haben wird, wie bereits gezeigt worden ist. Dieser Fall steht dem vorhergehenden gerade entgegen, in welchem die Fläche in einem endlichen Raume enthalten war.

§. 112.

Außerdem aber giebt es gewisse Zwischenfälle, wo die Fläche, ob sie sich gleich ohne Ende verbreitet, zwischen jenen auf ähnliche Art enthalten ist, wie die Parabel zwischen der Ellipse und Hyperbel. Dieser Fall entsteht, wenn

$$\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

und also

$$\alpha z = -\beta y - \gamma x + y\sqrt{(\beta\beta - 4\alpha\delta)} + x\sqrt{(\gamma\gamma - 4\alpha\zeta)}$$

ist. Es hat also die Gleichung für die Asymptote

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx = 0$$

zwey einfache Faktoren, die entweder reell, oder imaginär, oder einander gleich seyn werden. Diese dreyfache Verschiedenheit giebt drey Geschlechter der Flächen, die sich ohne Ende verbreiten, und so haben wir überhaupt fünf Geschlechter der Flächen der zweyten Ordnung erhalten, welche wir nun genauer untersuchen wollen.

§. 113.

Da die allgemeine Gleichung durch die Veränderung der drey Axen, welchen die Coordinaten parallel sind, auf eine einfachere Form gebracht wird, so wollen wir uns dieser Reduktion auf die Art bedienen, daß wir die Gleichung auf eine einfachere Form bringen, ohne ihren Umfang einzuschränken. Da also die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung folgende ist:

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + \varkappa = 0$$

so wollen wir eine Gleichung zwischen drey andern Coordinaten p, q und r suchen, welche sich in eben dem Punkte schneiden, in welchen die drey vorigen es thaten. Zu dieser Absicht setze man aus § 92.

$$x = p(\cos.k.\cos.m - \sin.k.\sin.m.\cos.n) + q(\cos.k.\sin.m + \sin.k.\cos.m.\cos.n) - r.\sin.k.\sin.n$$

$$y = -p.(\cos.k.\cos.m + \cos.k.\sin.m.\cos.n) - q(\sin.k.\sin.m - \cos.k.\cos.m.\cos.n) - r.\cos.k.\sin.n$$

und

$$z = -p\sin.m.\sin n + q.\cos.m.\sin.n + r.\cos.n$$

wo-

wodurch man die Gleichung erhält

$$App + Bqq + Crr + Dpq + Epr + Fqr + Gp + Hq + Ir + K = o.$$

§. 114.

Nun lassen sich die willkührlichen Größen k, m und n so bestimmen, daß die drey Coefficienten D, C und F verschwinden. Denn obgleich die Rechnung zu weitläuftig ist, als daß diese Bestimmung jener Winkel hier wirklich gezeigt werden könnte, so muß doch der, der daran zweifeln wollte, daß die Elimination jener Coefficienten allemal zu reellen Werthen der Winkel führe, zugeben, daß wenigstens zwey Coefficienten D und C Null gleich gemacht werden können. Ist aber dieses geschehen, so kann die Lage der dritten Axe, welcher die Ordinaten r parallel sind, in der der Ordinate p parallelen Ebene leicht so verändert werden, daß auch der Coefficient F verschwindet. Denn man setze

$$q = t.\text{sin. } i + u.\text{cos. } i; \text{ und } r = t.\text{cos. } i - u.\text{sin. } i$$

so daß statt des Gliedes qr das neue Glied tu eingeführt werde: so kann dessen Coefficient vermöge des Winkels i gleich Null gemacht werden. Auf diese Art erhält die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung folgende Form:

$$App + Bqq + Crr + Gp + Hq + Ir + K = o$$

§. 115.

Ferner lassen sich die Coordinaten durch beständige Größen so vermehren oder vermindern, daß die Coefficienten G, H und I verschwinden, und zwar wird dazu bloß die Veränderung des Anfangspunktes aller Coordinaten erfordert.

Auf diese Art lassen sich alle Flächen der zweyten Ordnung in folgende Gleichung zusammenfassen:

$$App + Bqq + Crr + K = 0$$

woraus erhellet, daß jede der drey durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Hauptebenen die Fläche in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt. Es hat daher jede Fläche der zweyten Ordnung nicht nur eine, sondern selbst drey Diametral-Ebenen, welche sich in demselben Punkte durchkreutzen, so daß daher auch dieser Punkt ein Mittelpunkt der Fläche wird, ob er gleich in einigen Fällen unendlich weit entfernt ist. Man legt nemlich der Fläche auf ähnliche Art einen Mittelpunkt bey, als man solches bey den Kegelschnitten thut, ob derselbe gleich bey der Parabel unendlich weit entfernt ist.

§. 116.

Hat man also die allgemeine Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung auf die einfachste Form gebracht, so bietet die Gleichung

$$App + Bqq + Crr = aa$$

das erste Geschlecht dieser Flächen dar, wenn alle drey Coefficienten A, B und C positiv sind; und die Flächen, welche zu diesem Geschlechte gehören, sind daher nicht nur ganz in einem endlichen Raume enthalten, sondern sie haben auch insgesammt einen Mittelpunkt, in welchem sich die drey Diametral-Ebnen unter rechten Winkeln schneiden. Es sey, Fig. 143, C der Mittelpunkt dieser Figur, und CA, CB, CD die auf einander senkrechten Hauptaxen, welchen die Coordinaten p, q und r parallel sind: so sind die drey Diametral-Ebenen ABab, ADa und BDb und durch dieselben wird dieser Körper in je zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt.

§. 117.

Man setze $r = o$, so druckt die Gleichung $App + Bqq = aa$ die Natur des Hauptschnittes $ABab$ aus, der also eine Ellipse seyn wird, welche den Mittelpunkt in C, und die Halbaxen $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, und $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$ hat. Setzt man $q = o$, so gehört die Gleichung $App + Crr = aa$ dem Hauptschnitte ADa zu, der aso ebenfalls eine Ellipse ist, welche den Mittelpunkt in C hat, und deren Halbaxen $CA = Ca = \frac{a}{\sqrt{A}}$, und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$ sind. Setzt man endlich $p = o$, so bekommt man für den dritten Hauptschnitt BDb die Gleichung $Bqq + Crr = aa$, der daher auch eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt in C liegt, und deren Halbaxen $CB = Cb = \frac{a}{\sqrt{B}}$ und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$ sind. Kennt man aber diese drey Hauptschnitte, oder bloß ihre Hauptaxen $CA = \frac{a}{\sqrt{A}}$; $CB = \frac{a}{\sqrt{B}}$, und $CD = \frac{a}{\sqrt{C}}$: so ist dadurch auch die Natur dieses Körpers bekannt. Da die drey Hauptschnitte dieses ersten Geschlechts der Flächen der zweyten Ordnung Ellipsen sind, so kann man diese Flächen Elliptoiden nennen.

§. 118.

Zu diesem Geschlechte gehören drey Arten, die vor andern zu merken sind. Die erste ist, wenn alle drey Hauptaxen CA, CB und CD einander gleich sind. In diesem Falle gehen die gedachten Hauptschnitte in Kreise, und der Körper in eine Kugel über, deren Gleichung, wie wir oben gesehen haben, $pp + qq + rr = aa$ ist. Die zweyte Art begreift die Fälle unter sich, wo zwey Hauptaxen einander

ander gleich sind. Es sey nemlich CD = CB, oder C = B, so wird der Schnitt BDb ein Kreis, und aus der Gleichung $App + B(qq + rr) = aa$ erhellet, daß alle diesem parallele Schnitte ebenfalls Kreise seyn werden. Es wird daher dieser Körper ein längliches Sphäroid, wenn AC größer als BC, und ein zusammengedrucktes, wenn AC kleiner als BC. Die dritte Art begreift endlich die Körper unter sich, wo die drey Coefficienten A, B und C ungleich sind, und diese behalten den allgemeinen Namen der Ellipsoiden.

§. 119.

Die folgenden Geschlechter der Flächen der zweyten Ordnung sind in dieser Gleichung enthalten:

$$App + Bqq + Crr = aa,$$

und zwar zuvörderst, wenn von den Coefficienten A, B und C gar keiner fehlt, und entweder einer oder zwey negativ sind. Es sey bloß der eine von ihnen negativ, wobey wir folgende Gleichung

$$App + Bqq - Crr = aa$$

betrachten wollen, bey welcher wir annehmen, daß A, B und C positive Größen bedeuten. Was den Mittelpunkt dieses Körpers, und seine Diametral-Ebenen betrift, so verhält es sich damit eben so wie vorhin. Es erhellet also, daß der erste Hauptschnitt dieses Körpers ABab, Fig. 144, eine Ellipse ist, deren Halbaxen $AC = \frac{a}{\surd A}$, und $BC = \frac{a}{\surd B}$ sind. Die beyden übrigen Hauptschnitte Aq und BS aber sind Hyperbeln, welche den Mittelpunkt in C, und die halbe zugehörige Axe $= \frac{a}{\surd C}$ haben.

§. 120.

Es stellt also diese Fläche einen Trichter vor, der oben und unten nach Hyperbeln abweicht, und es hat daher dieselbe einen Kegel zur Asymptote, welcher durch die Gleichung App + Bqq — Crr = o ausgedruckt wird, den Scheitel in dem Mittelpunkte C hat, und dessen Seiten die Asymptoten der Hyperbeln sind. Es steht aber dieser Asymptoten-Kegel zwischen der Fläche, und ist ein gerader, wenn A = B, und ein schiefer, wenn A nicht = B ist. Die Axe desselben ist die gerade auf der Ebene ABa senkrechte Linie CD. Uebrigens sind alle der Axe CD senkrechte Schnitte Ellipsen, welche der Ellipse ABab ähnlich sind, so wie hingegen die, welche auf der Ebene ABab senkrecht sind, Hyperbeln; daher man auch diese Flächen elliptisch-hyperbolische nennen kann, welche ihren Asymptoten-Kegel umgeben. Diese Flächen machen also unser zweytes Geschlecht aus.

§. 121.

Bey diesem Geschlechte können wieder drey Arten von einander unterschieden werden. Die erste ist diejenige, welche entsteht, wenn a = o ist, in welchem Falle die Ellipse ABab in einen Punkt verschwindet, die Hyperbeln in gerade Linien übergehen, und die Fläche selbst ganz mit ihrer Asymptote zusammenfällt. Es faßt daher diese erste Art alle gerade sowohl als schiefe Kegel unter sich, worauf man eine neue Abtheilung gründen könnte. Die zweyte Art ergiebt sich, wenn A = B wird, in welchem Falle die Ellipse ABab in einen Kreis übergeht, und die Fläche selbst eine runde oder gedrehete Fläche wird. Es entsteht nemlich diese Fläche, wenn sich eine Hyperbel um ihre zugehörige

hörige Axe dreht. Die dritte Art kommt mit dem Geschlechte selbst überein.

§. 122.

Das dritte Geschlecht wollen wir auf die Art bestimmen, daß dabey zwey Coefficienten der Glieder pp, qq und rr negativ werden, und es ist daher die Gleichung für dieses Geschlecht

$$App - Bqq - Crr = aa$$

Setzt man also $r = o$, so ist erste der Hauptschnitt EAFeaf, Fig. 145, eine Hyperbel, welche den Mittelpunkt in C hat, und deren Halbaxen $\frac{a}{\sqrt{A}}$ und $\frac{a}{\sqrt{B}}$ sind. Der andere Hauptschnitt, welchen man erhält, wenn man $q = o$ setzt, ist gleichfalls eine Hyperbel AQ, aq, welche eben dieselbe halbe Zwergaxe hat, deren zugehörige Halbaxe aber $= \frac{a}{\sqrt{C}}$ ist. Der dritte Hauptschnitt wird imaginär. Endlich liegt diese ganze Fläche zwischen der conischen Asymptoten-Fläche, und man kann sie daher die hyperbolisch-hyperbolische nenneu, welche in einen Asymptoten Kegel beschrieben ist. Wenn $B = C$ wird, so ist die Fläche rund, denn sie entsteht alsdenn durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Zwergaxe, woraus man eine besondere Art machen könnte. Wenn aber $a = o$ gesetzt wird, so ergiebt sich eine conische Fläche, welche wir bereits als eine Art des vorhergehenden Geschlecht betrachtet haben.

§. 123.

Um die folgenden Glieder kennen zu lernen, wollen wir annehmen, daß einer von den Coefficienten A, B und C verschwinde. Es sey also $C = o$, so ist die § 114 gefundene allgemeine Gleichung

$$App + Bqq + Gp + Hq + Ir + K = o$$

aus welcher man durch Vergrößerung oder Verkleinerung der Ordinaten p und q zwar die Glieder Gp und Hq, aber nicht Ir wegschaffen kann. Es bleibt also das Glied Ir in der Gleichung zurück; allein man kann vermittelst desselben das letzte Glied K wegbringen, und wir haben daher die Gleichung

$$App + Bqq = rr$$

wobey zwey Fälle zu erwägen sind. Der erste findet statt, wenn beyde Coefficienten A und B positiv sind; der andere, wenn der eine davon negativ ist. In beyden Fällen ist der Mittelpunkt der Fläche in der Axe CD befindlich, aber unendlich weit entfernt.

§. 124.

Es seyen zuvörderst beyde Coefficienten A und B positiv, so bekommt man das vierte Geschlecht, welches durch diese Gleichung:

$$App + Bqq = ar$$

ausgedruckt wird. Der erste Hauptschnitt, welcher entsteht, wenn man $r = o$ setzt, verschwindet demnach in einen Punkt, der andere und dritte, wovon jener entsteht, wenn man $q = o$, und dieser, wenn man $p = o$ setzt, sind beyde Parabeln, nemlich MAm und NAn, Fig. 146. Da also bey dieser Fläche alle auf der Axe AD senkrechte Schnitte Ellipsen, die Schnitte aber, welche durch die Axe gehen, Parabeln sind, so wollen wir die Körper dieses Geschlechtes elliptisch parabolische Körper nennen. Es giebt davon zwey Arten; die eine findet statt, wenn $A = B$ ist, in welchem Falle der Körper ein runder Körper wird, und kegelförmig

förmig parabolisch heißt; die andere entsteht, wenn $a = 0$ ist, und $App + Bqq = bb$ wird. Diese Art giebt Cylinder, sowohl gerade, wenn $A = B$, als schiefe, wenn A nicht $= B$ ist.

§. 125.

Das fünfte Geschlecht ist in der Gleichung

$$App - Bqq = ar$$

enthalten, und sein erster Hauptschnitt, wenn $r = 0$ wird, sind zwey gerade Linien Ee und Ff, welche sich in dem Punkte A schneiden. Alle Schnitte, welche diesem parallel sind, sind Hyperbeln, welche ihre Mittelpunkte in der Axe AD haben, und zwischen den Asymptoten Ee und Ff liegen. Die beyden Ebenen, welche auf der Ebene ABC in den Linien Ee und Ff senkrecht stehen, fallen im Unendlichen mit der gegebenen Fläche zusammen, und es hat daher diese Fläche zwey sich schneidende Ebenen zu Asymptoten. Die übrigen Hauptschnitte sind Parabeln, und man kann daher die zu diesem Geschlechte gehörigen Flächen parabolisch hyperbolische nennen, die zwey Ebenen zu Asympoten haben. Eine Art davon, (wenn $a = 0$ wird, so daß $App - Bqq = bb$ ist), ist der hyperbolische Cylinder, dessen auf der Axe AD senkrechte Schnitte insgesammt unter einander gleiche Hyperbeln sind. Ist überdem $b = 0$ so entstehen die beyden Asymptoten-Ebenen.

§. 126.

Das sechste Geschlecht der Flächen der zweyten Ordnung endlich ist in der Gleichung enthalten:

$$App = aq$$

und diese giebt einen parabolischen Cylinder, dessen auf der Axe AB senkrechte Schnitte insgesammt einander ähnliche und gleiche Parabeln sind, so daß die Scheitel derselben in die gerade Linie AD fallen, und die Axen einander parallel sind. Auf diese sechs Geschlechter lassen sich also alle Flächen der zweyten Ordnung zurückführen, so daß keine angegeben werden kann, die nicht darunter begriffen wäre. Wenn übrigens in dem letzten Geschlechte $a = 0$, und also $App = bb$ ist, so giebt diese Gleichung zwey einander parallele Ebenen, die gleichsam eine Art dieses Geschlechts ausmachen. Es findet hier etwas ähnliches statt, wie bey den Linien der zweyten Ordnung, wo zwey sich schneidende gerade Linien als eine Art der Hyperbel, zwey parallele Linien aber als eine Art von Parabel betrachtet werden können.

§. 127.

Ob wir gleich diese sechs Arten aus der einfachsten Gleichung abgeleitet haben, auf welche sich die Gleichung für die Flächen der zweyten Ordnung zurückführen läßt: so ist es nunmehr dennoch leicht, bey jeder gegebenen Gleichung des zweyten Grades das Geschlecht anzuzeigen, zu welchem die Fläche gehört. Ist nemlich die Gleichung

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx + \eta z + \theta y + \iota x + k = 0:$$

so muß man nach den höchsten Gliedern, worin zwey Dimensionen der veränderlichen Größen vorkommen, urtheilen, und also folgende Glieder betrachten

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx.$$

Ist darin $4\alpha\zeta$ größer als $\gamma\gamma$; $4\alpha\delta$ größer als $\beta\beta$; $4\delta\zeta$ größer als $\varepsilon\varepsilon$, und

$$\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta \text{ kleiner als } \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$$

so ist die Fläche in einem endlichen Raume enthalten, und gehört zu dem ersten Geschlechte der Ellipsoiden.

§. 128.

Wenn eine oder mehrere von diesen Bedingungen fehlen, und gleichwohl nicht $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ ist, so gehört die Fläche entweder zum zweyten oder zum dritten Geschlechte, und ist eine hyperbolische Oberfläche, die einen Kegel zur Asymptote hat, und entweder um denselben, wie beym zweyten, oder in demselben beschrieben ist, wie beym dritten Geschlechte. Wenn aber $\alpha\varepsilon\varepsilon + \delta\gamma\gamma + \zeta\beta\beta = \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$ ist, so kann der Ausdruck

$$\alpha zz + \beta yz + \gamma xz + \delta yy + \varepsilon xy + \zeta xx$$

in zwey einfache, reelle oder imaginäre Faktoren aufgelöset werden. Im ersten Falle gehört die Fläche zu dem vierten, im andern zu dem fünften Geschlechte. Hat endlich der gedachte Ausdruck zwey gleiche Faktoren, oder ist derselbe ein Quadrat, so gehört die Fläche zu dem sechsten Geschlechte. Auf diese Art kann man sogleich beurtheilen, zu was für einem Geschlechte eine Fläche gehöre, und es findet sich bloß bey dem zweyten und dritten einige Schwierigkeit, daher man auch beyde in eins zusammenfassen könnte.

§. 129.

Auf ähnliche Art lassen sich die Flächen der dritten und der folgenden Ordnungen behandeln und in Geschlechter eintheilen. Man braucht nemlich bloß die höchsten Glieder der Gleichungen in Erwägung zu ziehen, d. h. bey den Flächen der dritten Ordnung diejenigen, worin die Coordinaten drey Dimensionen haben, und welche also sind:

$$\alpha z^3 + \beta yz^2 + \gamma y^2z + \delta x^2z + \varepsilon xz^2 + \zeta xyz + \text{ꝛc.}$$

Zuvörderst muß man also überlegen, ob diese Glieder zusammengenommen, oder das höchste Glied der Gleichung in einfache Faktoren aufgelöset werden kann oder nicht. Wenn diese Auflösung nicht statt findet, so hat die Fläche

einen

einen Kegel der dritten Ordnung zur Asymptote. Da aber die Natur dieses Kegels durch das höchste Glied ausgedruckt wird, wenn man dasselbe $= 0$ setzt, so giebt es mehrere dergleichen Kegel der dritten Ordnung, nach deren Verschiedenheit mehrere Geschlechter von Flächen entstehen. Denn obgleich alle Kegel der zweyten Ordnung zu einem Geschlechte gerechnet werden, indem sie entweder gerade oder schief sind, so findet doch bey der dritten Ordnung eine weit größere Mannigfaltigkeit statt.

§. 130.

Nachdem diese Geschlechter aus einander gesetzt sind, muß man die Fälle betrachten, wo das höchste Glied in einfache Faktoren, und zwar entweder in reelle oder in imaginäre aufgelöset werden kann. Es habe dasselbe zuvörderst einen und zwar reellen Faktor, so hat die Fläche eine ebene Asymptote. Der andere Faktor giebt, wenn man ihn $= 0$ setzt, entweder eine mögliche oder eine unmögliche Gleichung, und es giebt daher entweder eine einzige ebene Asymptote, oder die Fläche hat zwey Asymptoten, eine ebene, und einen Kegel der zweyten Ordnung. Sind drey Faktoren einfach, so sind, weil darunter allemal ein reeller ist, die beyden übrigen entweder ebenfalls reell oder imaginär, und daher entspringen wieder zwey neue Geschlechter. Endlich ergeben sich, wenn alle drey einfache Faktoren reell sind, noch daher zwey Geschlechter, ob davon zwey, oder ob alle drey einander gleich sind. Zu dieser Ordnung gehört übrigens keine Fläche, die sich nicht ohne Ende fort verbreitete.

Sechstes Capitel.

Von den Durchschnitten zweyer Flächen.

§. 131.

In dem Vorhergehenden ist bereits die Methode beschrieben worden, die Natur des Durchschnitts zu erforschen, der aus der Durchschneidung einer Fläche von einer Ebene entsteht. Da nemlich die Curve, welche der Durchschnitt bildet, ganz in der schneidenden Ebene liegt, so haben wir in dieser Ebene zwey Coordinaten angenommen, dadurch die Natur des Durchschnitts bestimmt, und so die ganze Untersuchung aufs Bekannte zurückgeführt. Wenn aber die schneidende Fläche keine Ebene ist, so kann man auch, da alsdann der Durchschnitt nicht in eine Ebene fällt, die Natur desselben nicht durch zwey Coordinaten ausdrucken, sondern es ist eine andere Methode nöthig, um diese Durchschnitte auf die Art durch Gleichungen zu bestimmen, daß ein jeder Punkt derselben bekannt sey.

§. 132.

Es kann aber die Lage der Punkte, die nicht in einer Ebene liegen, bestimmt werden, wenn man drey auf einander senkrechte Ebenen zu Hülfe nimmt, und die Entfernungen eines jeden Punktes von diesen drey Ebenen angiebt. Es sind daher drey veränderliche Größen nöthig, um die Natur einer Curve, die nicht in einer Ebene liegt,

aus-

auszudrucken, so daß bey willkührlicher Annahme der einen die beyden übrigen bestimmte Werthe bekommen. Hierzu reicht also eine Gleichung zwischen jenen drey Coordinaten nicht hin, indem diese die Natur der ganzen Fläche ausdrucken würde; sondern man hat zwey Gleichungen nöthig, durch welche, wenn die eine veränderliche Größe einen bestimmten Werth bekommt, zugleich die Werthe der beyden übrigen bestimmt werden.

§. 133.

Man druckt daher die Natur einer Curve, die nicht in einer Ebene liegt, am bequemsten durch zwey Gleichungen zwischen drey veränderlichen Größen x, y und z aus, welche drey auf einander senkrechte Coordinaten vorstellen. Vermittelst solcher zwey Gleichungen können zwey veränderliche Größen durch die dritte bestimmt werden, indem sowohl y als z einer Funktion von x gleich seyn wird. Auch kann man nach Gefallen eine von den veränderlichen Größen eliminiren, und also drey Gleichungen machen, deren jede nur zwey veränderliche Größen enthält, eine nemlich zwischen x und y, die andere zwischen x und z, und die dritte zwischen y und z. Von diesen drey Gleichungen ergiebt sich die dritte aus den beyden übrigen von selbst, so daß man, wenn man die Gleichungen zwischen x und y, und zwischen x und z hat, die dritte zwischen y und z durch die Elimination von x findet.

§. 134.

Es sey also eine krumme Linie, die nicht in eine Ebene falle, gegeben, und M, Fig. 148, sey ein Punkt in ihr. Man nehme nach Belieben die drey auf einander senkrechte Axen AB, AC und AD an, so daß dadurch die drey auf ein-

einander senkrechte Ebenen, ABC, BAD und CAD bestimmt werden. Ferner fälle man aus dem Punkte der Curve M auf die Ebene BAC die senkrechte Linie MQ herab, und ziehe aus dem Punkte Q auf die Axe AD die gerade Linie QP senkrecht, so sind AP, QP und QM die drey Coordinaten, durch welche die Curve bestimmt ist, wenn man dazwischen zwey Gleichungen hat. Es sey also $AP = x$, $PQ = y$ und $QM = z$, und aus den beyden zwischen x, y und z gegebenen Gleichungen mache man durch die Elimination eine Gleichung, welche bloß x und y enthalte: so wird diese Gleichung die Lage des Punktes Q in der Ebene BAC bestimmen, und alle auf die beschriebene Art aus dem Punkte M entstandenen Punkte Q werden die Curve EQF geben, deren Natur durch die Gleichung zwischen x und y ausgedruckt wird.

§. 135.

Auf diese Art läßt sich die Natur der Curve EQF aus zwey zwischen den drey Coordinaten gegebenen Gleichungen leicht erkennen; es entsteht aber diese Curve, wenn man aus den Punkten M der gesuchten Curve die senkrechten Linien MQ auf die Ebene BAC herabfällt, und man pflegt dieselbe die Projection der Curve GMH in der Ebene BAC zu nennen. So wie aber die in der Ebene BAC entworfene Projection gefunden wird, wenn man die veränderliche Größe z eliminirt: so kann man auch die Projection eben dieser Curve in der Ebene BAD oder CAD finden, wenn man entweder y oder x wegschafft. Eine Projection reicht indeß nicht hin, die Natur der Curve GMH zu erkennen; wenn man aber für jeden Punkt Q die senkrechten Linien $QM = z$ kennt, so läßt sich die Curve GMH sehr leicht aus der Projection EQF construiren. Hierzu wird erfordert, daß man

außer

außer der Gleichung zwischen x und y, wodurch die Natur der Projection ausgedruckt wird, eine Gleichung zwischen z und x, oder zwischen z und y, oder auch zwischen x, y und z habe, um daraus die Länge des Perpendikels QM = z für einen jeden Punkt Q zu erkennen.

§. 136.

Da die Gleichung zwischen z und x die Projection der Curve GMH in der Ebene BAD, die Gleichung zwischen z und y aber die Projection in der Ebene CAD, und die Gleichung zwischen x, y und z die Fläche ausdruckt, in welcher die Curve GMH liegt: so erhellet einmal, daß durch zwey Projectionen der Curve GMH in zweyen Ebenen diese Curve selbst bekannt werde. Ferner ist klar, daß ein gleiches statt finde, wenn außer der Fläche, in welcher die Curve liegt, noch eine Projection derselben in einer Ebene gegeben ist. Denn errichtet man aus den Punkten der Projection die senkrechten Linien QM, so giebt ihr Durchschnitt mit der Fläche die gesuchte Curve GMH.

§. 137.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über die Erforschung der Natur einer jeden Curve, die nicht in einer Ebene liegt, ist es nicht schwer, den Durchschnitt jeder zwey Flächen zu bestimmen. Denn so wie der Durchschnitt zweyer Ebenen eine gerade Linie ist, so ist der Durchschnitt zweyer Flächen überhaupt, entweder eine gerade oder eine krumme Linie, und diese liegt entweder in einer Ebene oder nicht. Er mag indeß beschaffen seyn, wie er wolle, so gehören alle seine Punkte zu beyden Flächen, und er muß daher in den Gleichungen für beyde Flächen enthalten seyn. Wenn also beyde Flächen durch Gleichungen zwischen drey Coordinaten ausgedruckt werden, die auf eben dieselben drey auf einander senkrechte Hauptebenen, oder auf eben dieselben drey auf einander senkrechte Axen AB, AC, AD bezogen werden: so drucken diese beyden Gleichungen zusammen die Natur des Schnittes aus.

§. 138.

Sind also zwey Flächen gegeben, welche sich schneiden, so muß man die Natur einer jeden durch eine Gleichung zwischen drey Coordinaten ausdrucken, welche auf einerley Hauptaxen bezogen werden, wodurch man zwey Gleichungen zwischen x, y und z von der Art bekommt, daß die Gleichung, welche man daraus durch die Elimination der einen dieser veränderlichen Größe erhält, die Projection des Durchschnitts in der Ebene ausdruckt, welche die beyden übrigen veränderlichen Größen enthält. Auf diese Art läßt sich daher auch der Schnitt einer jeden Fläche von einer Ebene erforschen. Denn da die allgemeine Gleichung für die Ebenen $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ ist, so bekommt man, wenn man den Werth von z, der aus dieser Gleichung entspringt, oder $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ in die Gleichung für die Fläche bringt, eine Gleichung für die Projection des Schnittes in der Ebene der Coordinaten x und y. Es giebt aber auch zugleich die Gleichung $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ die Größe des Perpendikels QM für einen jeden Punkt Q.

§. 149.

Ereignet es sich, daß die Gleichung für die Projection unmöglich wird, wie z. B. wenn man $xx + yy + aa = 0$ fände: so ist dieses ein Kennzeichen, daß die beyden Flächen sich

sich nirgends schneiden. Wenn aber die Gleichung auf einen Punkt führt, oder die Projection in einen Punkt verschwindet: so ist auch der Durchschnitt ein Punkt, und es berühren sich daher beyde Flächen in einem Punkte, welchen man also aus der Gleichung kennen lernen kann. Es giebt aber außerdem auch eine Berührung in einer Linie, wenn sich beyde Flächen in unzähligen Punkten berühren, und diese Berührungslinie ist entweder gerade oder krumm. Jenes findet statt, wenn eine Ebene einen Cylinder oder einen Kegel berührt, da hingegen der gerade Kegel von einer Kugel innerhalb in einem Kreise berührt wird. Diese Berührungslinie erkennt man aus der Gleichung, wenn man daraus für die Projection eine Gleichung erhält, welche zwey gleiche Wurzeln hat, weil die Berührung nichts anders ist, als das Zusammenfallen zweyer Durchschnitte.

§. 140.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir annehmen, daß eine Kugel von einer Ebene geschnitten werde. Ferner sey die Gleichung für die Kugel, nach dem Mittelpunkte eingerichtet,

$$zz + yy + xx = a$$

und die Gleichung für die Ebene in jeder Lage,

$$\alpha z + \beta y + \gamma x = f.$$

Da aus dieser letzten Gleichung $z = \frac{f - \beta y - \gamma x}{\alpha}$ wird, so erhält man folgende Gleichung zwischen x und y für die Projection:

$$0 = ff - \alpha^2 a^2 - 2\beta f y - 2\gamma f x + (\alpha^2 + \beta^2) y^2$$
$$+ 2\beta\gamma xy + (\alpha^2 + \gamma^2) xx$$

wovon erhellet, daß sie eine Gleichung für eine Ellipse ist, wenn sie reell ist. Wird sie imaginär, so wird die Kugel nirgends von der Ebene berührt; und verschwindet die Ellipse in einen Punkt, so berühren sich die Kugel und die Ebene. Um diesen Fall zu finden, suche man

$$y = \frac{bf - b\gamma x \mp \alpha\sqrt{(a^2(\alpha^2 + \beta)^2 - f^2 + 2\gamma f x - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)xx)}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

wo es weder einen Berührungspunkt noch einen Durchschnitt giebt, wenn f einen solchen Werth hat, daß die Wurzel-Größen nicht reell werden können.

§. 141.

Setzt man $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$, so wird

$$y = \frac{\beta f - \beta\gamma x \pm \alpha x\sqrt{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \mp \alpha\gamma a\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2}$$

und diese Gleichung kann nicht reell seyn, wofern nicht

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}} \text{ und } y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

ist. Ist daher $f = a\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$ so berührt die Ebene, welche durch die Gleichung $\alpha z + \beta y + \gamma x = f$ ausgedruckt wird, die Kugel, und man findet den Berührungspunkt, wenn man

$$x = \frac{\gamma a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};\ y = \frac{\beta a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}};\text{ und}$$

$$z = \frac{\alpha a}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}}$$

nimmt.

§. 142.

Hieraus läßt sich eine allgemeine Regel herleiten, durch welche man in den Stand gesetzt wird, zu beurtheilen, ob eine Fläche von einer Ebene, oder einer andern Fläche berührt werde oder nicht. Hat man nemlich aus beyden Gleichungen

chungen eine veränderliche Größe weggeschafft, so muß man untersuchen, ob die dadurch erhaltene Gleichung in einfache Faktoren aufgelöset werden kann oder nicht. Denn hat sie zwey einfache imaginäre Faktoren, so giebt es einen Berührungspunkt, welchen man kennen lernt, wenn man jeden Faktor $= 0$ setzt. Hat sie hingegen zwey reelle und einander gleiche Faktoren, so berühren sich die Flächen in einer geraden Linie. Hat sie endlich zwey nicht einfache gleiche Faktoren, oder ist sie durch ein Quadrat theilbar, so giebt ihre Wurzel, $= 0$ gesetzt, die Projection der Linie, welche durch die Berührung entsteht. Hieraus erhellet auch, daß sich die Flächen, wenn die gedachte Gleichung vier imaginäre Faktoren hat, in zwey Punkten berühren.

§. 143.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir die Berührung eines Kegels und einer Kugel untersuchen, deren Mittelpunkt in der Axe des Kegels liegt. Es ist aber die Gleichung für die Kugel:

$$zz + yy + xx = aa$$

und die für den Kegel, wenn man den Scheitel des Kegels um f von dem Mittelpunkte der Kugel entfernt annimmt:

$$(f - z)^2 = mxx + nyy$$

Schafft man y weg, so wird

$$(f - z)^2 = naa - nzz + (m - n)xx$$

die Gleichung für die Projection des Durchschnitts in der Ebene der Coordinaten x und z. Es sey zuvörderst der Kegel ein gerader, oder $m = n$, so wird

$$z = \frac{f \pm \sqrt{(n(1 + n)aa - nff)}}{1 + n}$$

Wenn also $f = a\sqrt{(1 + n)}$ ist, so ist zwiefach $z = \frac{a}{\sqrt{(1 + n)}}$

und es giebt eine Berührungslinie, nemlich den Kreis, dessen Projection in der Ebene, welche durch die Axe geht, eine gerade auf der Axe senkrechte Linie ist.

§. 144.

Für den schiefen Kegel, wo m und n ungleich sind, scheint die Gleichung allemal einen Durchschnitt zu geben, da doch öfters keiner statt findet. Denn wenn m größer ist als n, so erhält man zwar allezeit eine reelle Gleichung für die Projection, allein die Realität der Projection zieht nicht immer die Realität des Durchschnitts nach sich. Denn soll der Durchschnitt reell seyn, so ist dazu nicht genug, daß bloß die Projection, sondern es müssen auch die von der Projection nach dem Durchschnitte gezogenen Perpendikel reell seyn. Ob also gleich jede reelle Curve reelle Projectionen hat, so darf man doch nicht von der Realität der Projection auf die Realität der gesuchten Curve schließen. Diese Regel muß man stets vor Augen behalten, damit man von der Realität der Gleichungen für die Projectionen keinen falschen Gebrauch mache.

§. 145.

Man vermindert diese Unbequemlichkeit, wenn man die Projection in der Ebene der Ordinaten x und y sucht. Denn da in dieser Ebene kein Punkt ist, dem nicht ein Punkt in der conischen Fläche zugehöre: so wird, wenn die Projection reell ist, auch allemal der Durchschnitt reell. Da also

$$z = \sqrt{(aa - xx - yy)}$$

ist, so wird aus der andern Gleichung

$$f - \sqrt{(aa - xx - yy} = \sqrt{(mxx + nyy)}$$

oder

$$aa + ff - (1+m)xx - (1+n)yy = 2f\sqrt{(aa - xx - yy)}$$

und ferner

$$\left.\begin{array}{l} (aa-ff)^2 \left.\begin{array}{l} -2aa-ff) \\ -2(aa-ff)m \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} -2aa-ff) \\ -2aa-ff)n \end{array}\right\} y^2 + \\ (1+m)^2x^4 + 2(1+m)(1+n)x^2y^2 + (1+n)^2y^4 \end{array}\right\} = 0$$

und daher wird

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{aa - ff + n(aa+ff) - (1+m)(1+n)xx \pm}{(1+n)^2} \\ \dfrac{2f}{(1+n)^2}\sqrt{(n(1+n)aa - nff + (m-n)(1+n)xx} \end{array}\right\} = y^2$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{aa - ff + m(aa+ff) - (1+m)(1+n)yy \pm}{(1+m)^2} \\ \dfrac{2f}{(1+m)^2}\sqrt{(m(1+m)aa - mff + (n-m)(1+m)yy} \end{array}\right\} = x^2$$

§. 146.

Soll also die gefundene Gleichung Faktoren haben, so muß

$$ff = (1+n)aa; \text{ oder } ff = (1+m)aa$$

seyn. Im ersten Falle wird

$$yy = \frac{naa - (1+m)xx}{1+n} \pm \frac{2fx\sqrt{(m-n)}}{(1+n)\sqrt{(1+n)}}$$

wo, wenn m kleiner als n ist, nothwendig

$$x = 0;\ y = \pm a\sqrt{\frac{n}{1+n}},\ \text{und } z = \frac{a}{\sqrt{(1+n)}}$$

seyn

seyn muß. Es giebt also zwey Berührungspunkte, die von der Axe des Kegels auf beyden Seiten gleich weit entfernt sind. Wenn aber m größer als n ist, so muß man die andere Gleichung

$$xx = \frac{maa - (1+n)yy}{1+m} \pm \frac{2fy\sqrt{(n-m)}}{(1+m)\sqrt{(1+m)}}$$

nehmen, die nicht reell seyn kann, wenn nicht $y = 0$ ist, in welchem Falle $x = \pm a\sqrt{\frac{m}{1+m}}$, und $z = \frac{a}{\sqrt{(1+m)}}$ wird. Alsdann giebt es zwey andere Berührungspunkte, indem die Berührung in dem Theile des Kegels geschieht, wo diese Punkte am nächsten zusammenfallen. Auf ähnliche Art läßt sich die Berührung in allen einzelnen Fällen beurtheilen.

§. 147.

Die leichteste Art aber, die berührenden Ebenen jeder Art der Flächen zu finden, läßt sich aus der oben erklärten Methode, die Tangenten der Curven zu finden, herleiten. Es sey die Natur der Fläche, deren Berührungsebenen gesucht werden, durch eine Gleichung zwischen den drey Coordinaten $AP = x$; $PQ = y$; und $QM = z$, Fig. 149, ausgedruckt, und daraus die Lage der Ebene, welche die Fläche in dem Punkte M berührt, zu bestimmen. Wird die Fläche von irgend einer durch M gehenden Ebene geschnitten, so muß die Tangente des dadurch entstandenen Schnittes für den Punkt M in der berührenden Ebene liegen. Wenn man also die Tangenten zweyer solcher Schnitte für den Punkt M gefunden hat, so muß die Ebene, welche durch diese beyden Tangenten bestimmt wird, auch die Fläche in dem Punkte M bezeichnen.

§. 148.

Es werde also zuvörderst die Fläche von einer auf der Ebene APQ senkrechten Ebene geschnitten, und zwar nach der geraden der Axe AP parallen Linie QS. Ferner sey auf ähnliche Art ein Schnitt durch M senkrecht auf die Ebene APQ aber nach der Linie QP, welche auf der Axe AP perpendiculär ist; oder es sey der erste Schnitt auf der Axe AB, und der andere auf der Axe AP senkrecht. Es sey EM der erste Schnitt, dessen Tangente MS, welche der QS in dem Punkte S begegnet, gesucht werde, so daß QS die Subtangente sey. Der andere Schnitt sey die Curve FM, seine Tangente MT, und die Subtangente QT. Hat man diese gefunden, so wird die Ebene SMT die Fläche in dem Punkte M berühren. Zieht man also die ST, so giebt dieselbe den Durchschnit der berührenden Ebene mit der Ebene APQ; und wenn man aus Q auf ST die senkrechte Linie QR zieht, so verhält sich QR zu QS wie der Radius zur Tangente des Winkels MRQ, unter welchem die berührende Ebene gegen die Ebene APQ geneigt ist.

§. 149.

Angenommen, daß die Subtangenten $QS = s$, und $QT = t$ nach der oben erklärten Methode gefunden seyen; so wird

$$PT = t - y;\ PX = s - \frac{sy}{t};\ \text{und also}$$

$$AX = x + \frac{sy}{t} - s.$$

Man lernt also hierdurch den Punkt X kennen, in welchem die gerade Linie ST die Axe AP schneidet, und da AXS = TSQ ist, so ist die Tangente dieses Winkels $= \frac{t}{s}$, und

dadurch

dadurch wird die Lage des Schnitts der berührenden Ebene mit der Ebene APQ bekannt. Da ferner $ST = \sqrt{(ss + tt)}$ ist, so wird $QR = \frac{st}{\sqrt{(ss + tt)}}$, und dividirt man damit die QM, so bekommt man die Tangente des Neigungswinkels $MRQ = \frac{z\sqrt{(ss + tt)}}{st}$. Zieht man außerdem MN senkrecht auf MR, so ist diese Linie sowohl auf der berührenden Ebene als auf der Fläche selbst in dem Punkte M senkrecht, und man erkennt ihre Lage aus $QN = \frac{zz\sqrt{(ss + tt)}}{st}$. Man ziehe aus N auf die Axe AP die NV senkrecht, so wird, weil $QNV = QST$ ist, $PV = \frac{zz}{t} = QW$; und $NW = \frac{zz}{t}$. Wenn daher auf diese Art die Lage des Punktes N in der Ebene APQ bestimmt wird, so steht die gerade Linie NM auf der Fläche senkrecht.

§. 150.

Wie der Durchschnitt zweyer Flächen durch Projectionen erforscht werden müsse, ist bereits oben gezeigt worden; jetzt wollen wir untersuchen, zu was für einer Ordnung die Projection gehöre, wenn solche nach der Ordnung der Fläche bestimmt werden soll. Zuvörderst also geben zwey Flächen der ersten Ordnung oder zwey Ebenen für den Durchschnitt und seine Projection eine Linie der ersten Ordnung. Dann haben wir auch gesehen, daß diese Projection nicht über die zweyte Ordnung aufsteigen kann, wenn die eine Fläche zur zweyten, die andere zur ersten Ordnung gehört. Eben so ist offenbar, daß eine Projection nicht zu einer höhern, als der dritten Ordnung gehören werde, wenn die eine

Fläche

Fläche eine Fläche der dritten, und die andere eine Fläche der ersten Ordnung ist, u. s. w. Wenn aber beyde Flächen zur zweyten Ordnung gehören, so wird die Projection des Durchschnitts entweder zur vierten oder zu einer niedrigern Ordnung gehören, und überhaupt ist die höchste Ordnungszahl der Projection mn, wenn die Ordnungszahl der einen Fläche m, und die der andern n ist.

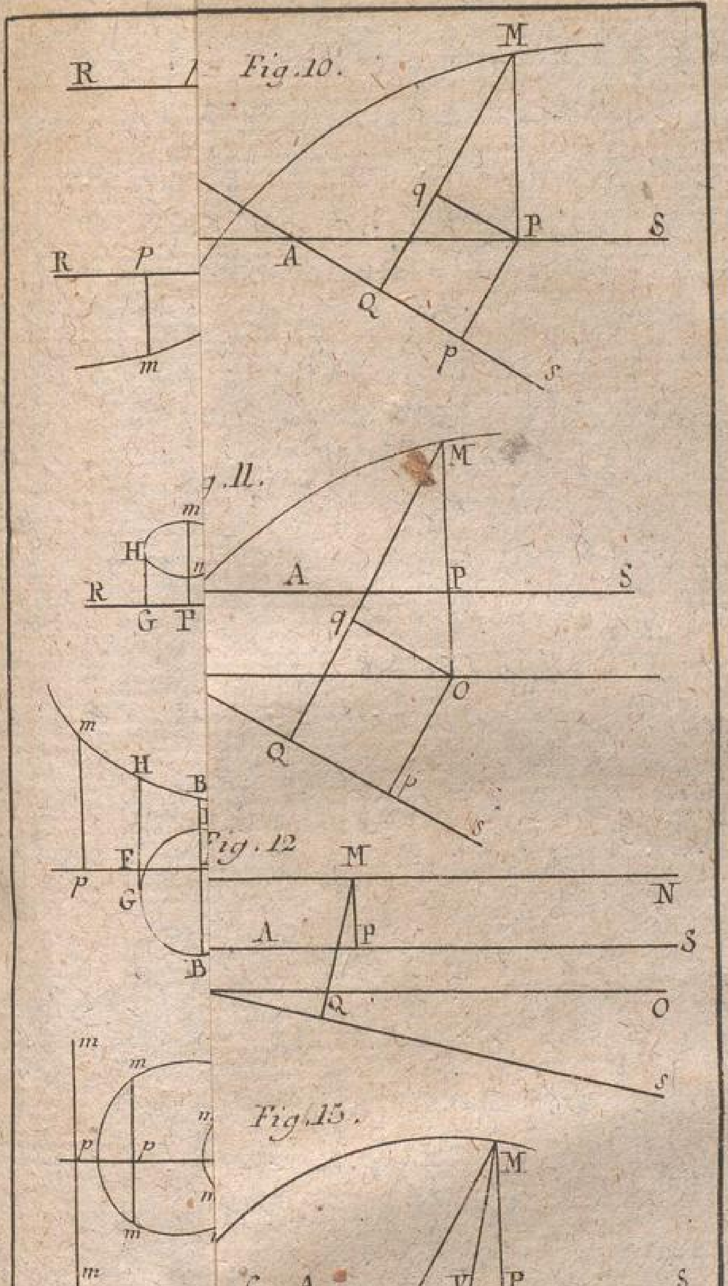
§. 151.

Wenn keine von den sich schneidenden Flächen eine Ebene ist, so ist ihr Durchschnitt meistens eine Curve, die nicht in einer Ebene liegt; doch kann auch der ganze Schnitt in einer Ebene sich befinden, und dieses geschiehet, wenn die Gleichungen beyder Flächen zusammengenommen eine Gleichung, wie $\alpha z + \beta y + \gamma z = f$ in sich enthalten. Um zu beurtheilen, ob dieses seyn werde, bestimme man aus beyden Gleichungen die beyden veränderlichen Größen z und y durch die dritte x, und dabey werde $z = P$, und $y = Q$, wo P und Q Funktionen von x sind. Dann überlege man, ob es eine Zahl n gebe, wobey sich in $P + nQ$ alle Potestäten von x bis auf die erste x und die beständigen Glieder einander aufheben. Ist dieses, und ist $P + nQ = mx + k$ so liegt der Schnitt in einer Ebene, und diese Ebene wird durch die Gleichung $z + ny = mx + k$ ausgedruckt.

§. 152.

Es seyen z. B. zwey Flächen der zweyten Ordnung, ein gerader Kegel, $zz = xx + yy$, und eine elliptisch hyperbolische Fläche des zweyten Geschlechts $zz = xx + 2yy - 2ax - aa$ gegeben. Da hieraus $xx + 2yy - 2ax - aa = xx + yy$ wird, so ist $y = \sqrt{(2ax + aa)}$ und $z = x + a$; und diese letzte Gleichung zeigt schon an, daß der ganze Schnitt in Einer Ebene liegen werde, deren Lage durch die Gleichung $z = x + a$ bestimmt wird. Auf diese Art lassen sich eine Menge von Aufgaben, die Natur der Flächen betreffend, auflösen. Reicht indeß das Bisherige nicht hin, so ist dazu die Analysis des Unendlichen erforderlich, wozu die gegenwärtigen Bücher den Weg bahnen.

Tab. I.



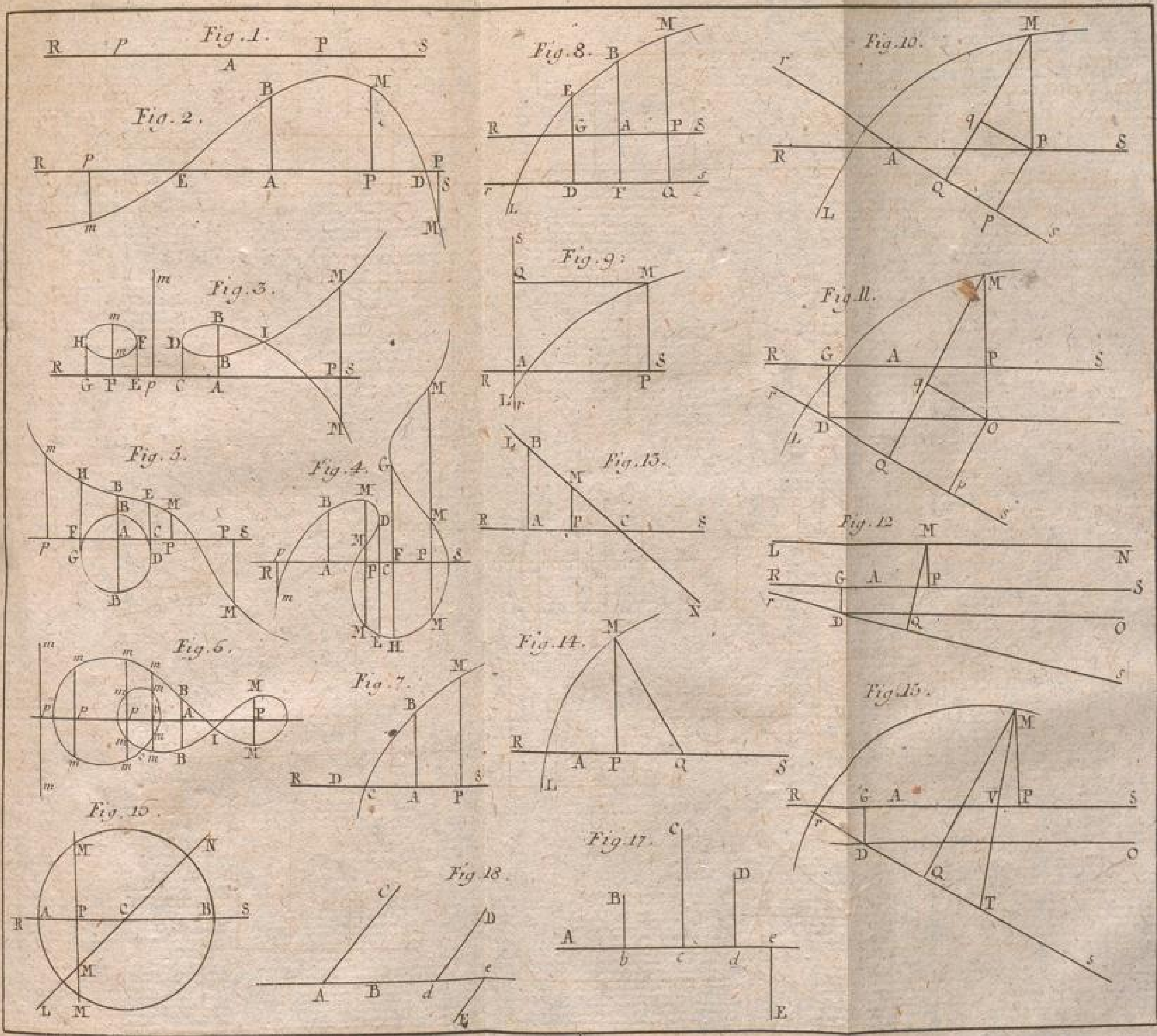


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

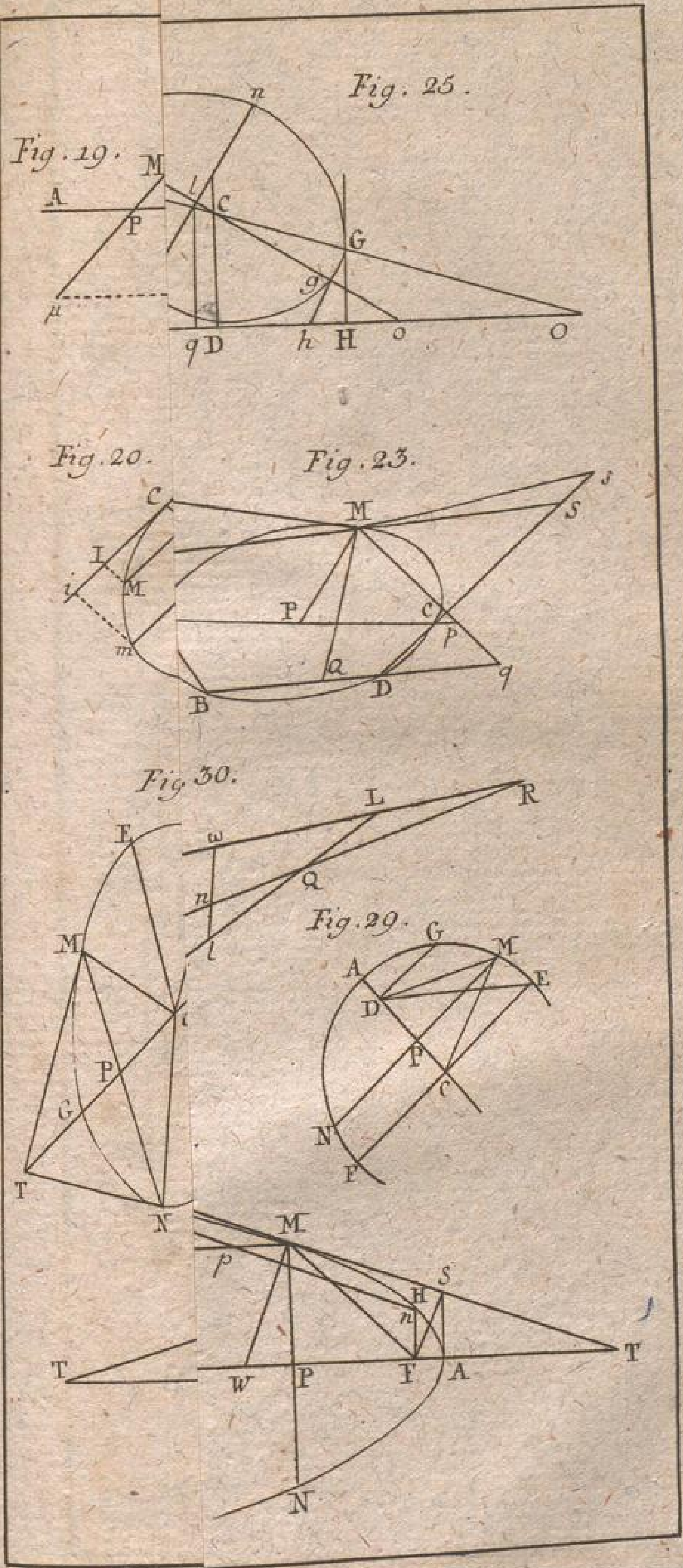


Fig. 25.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 23.
Fig. 30.
Fig. 29.

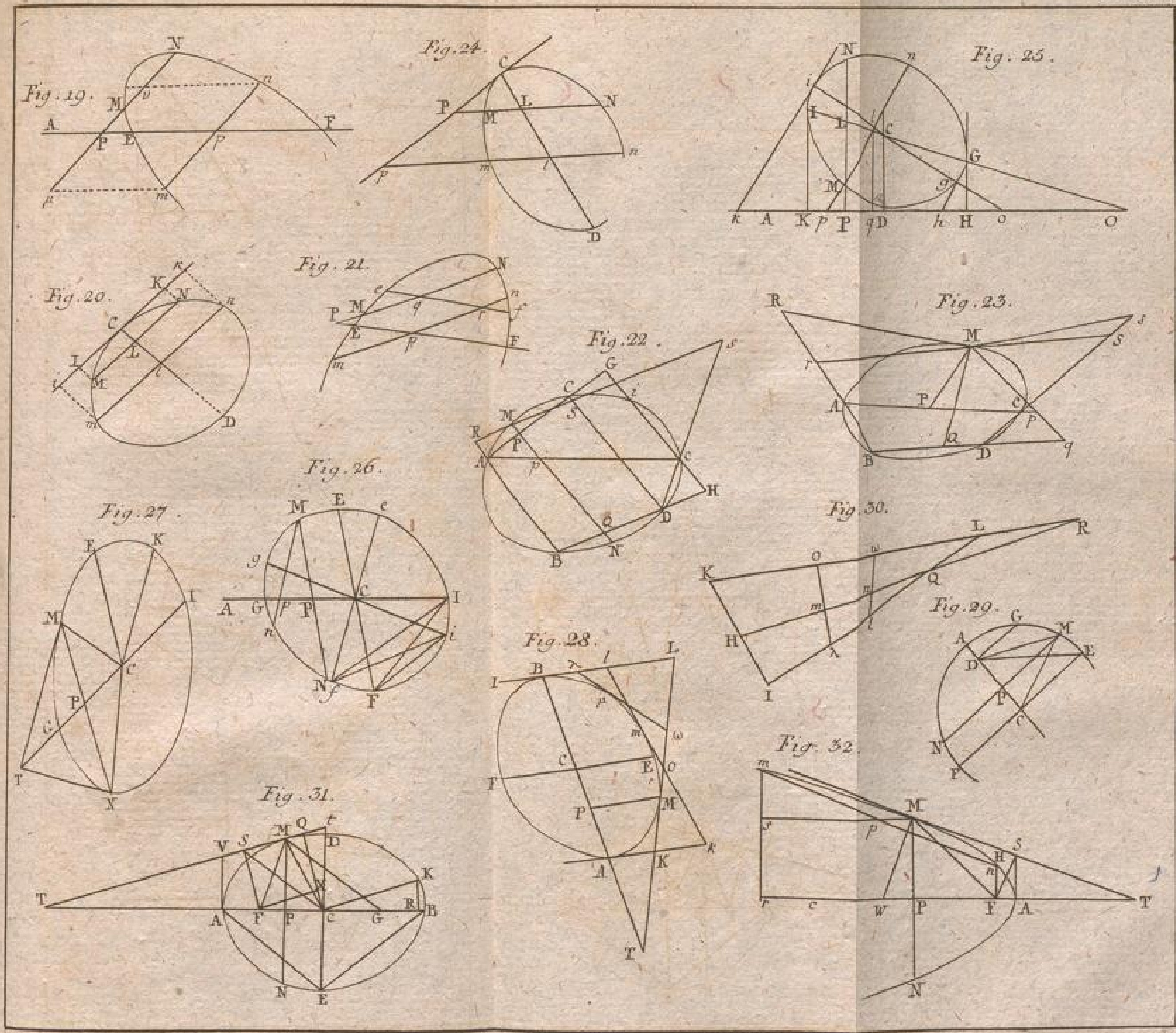
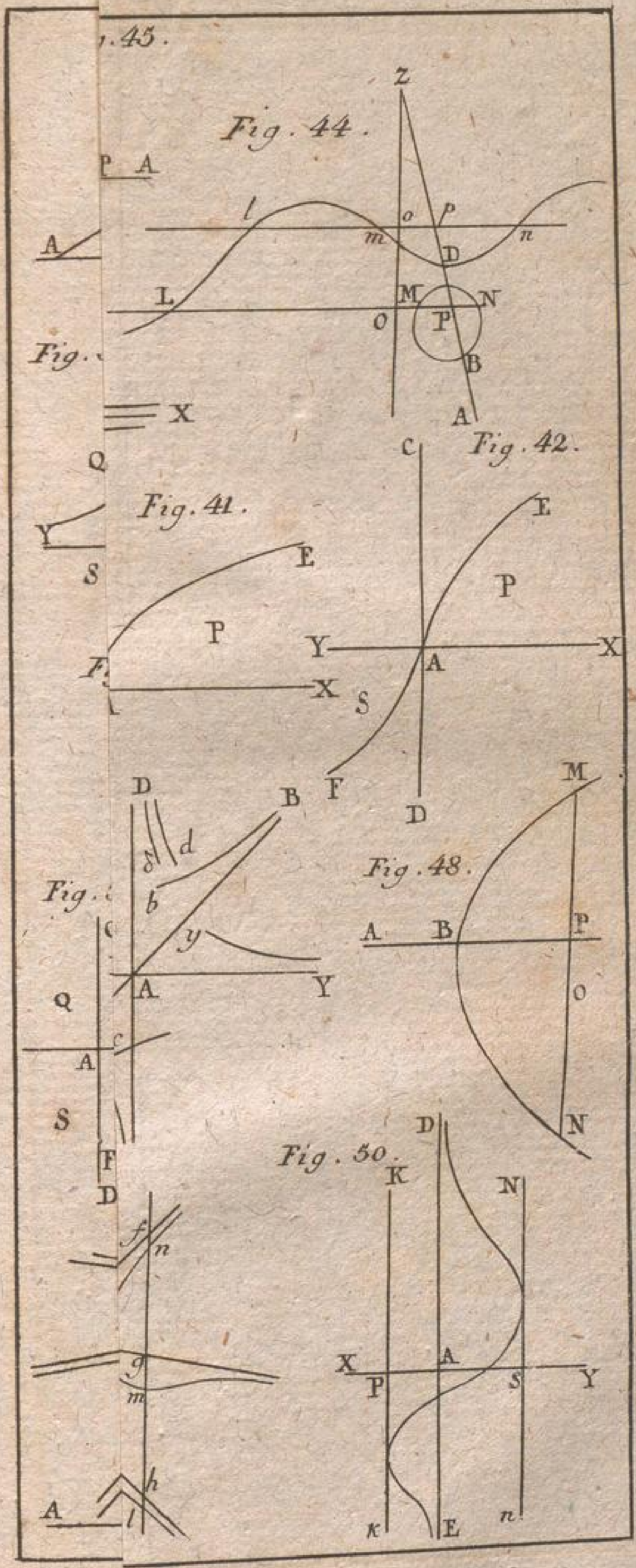


Fig. 19.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 30.
Fig. 29.
Fig. 28.
Fig. 32.
Fig. 31.

Tab. III.



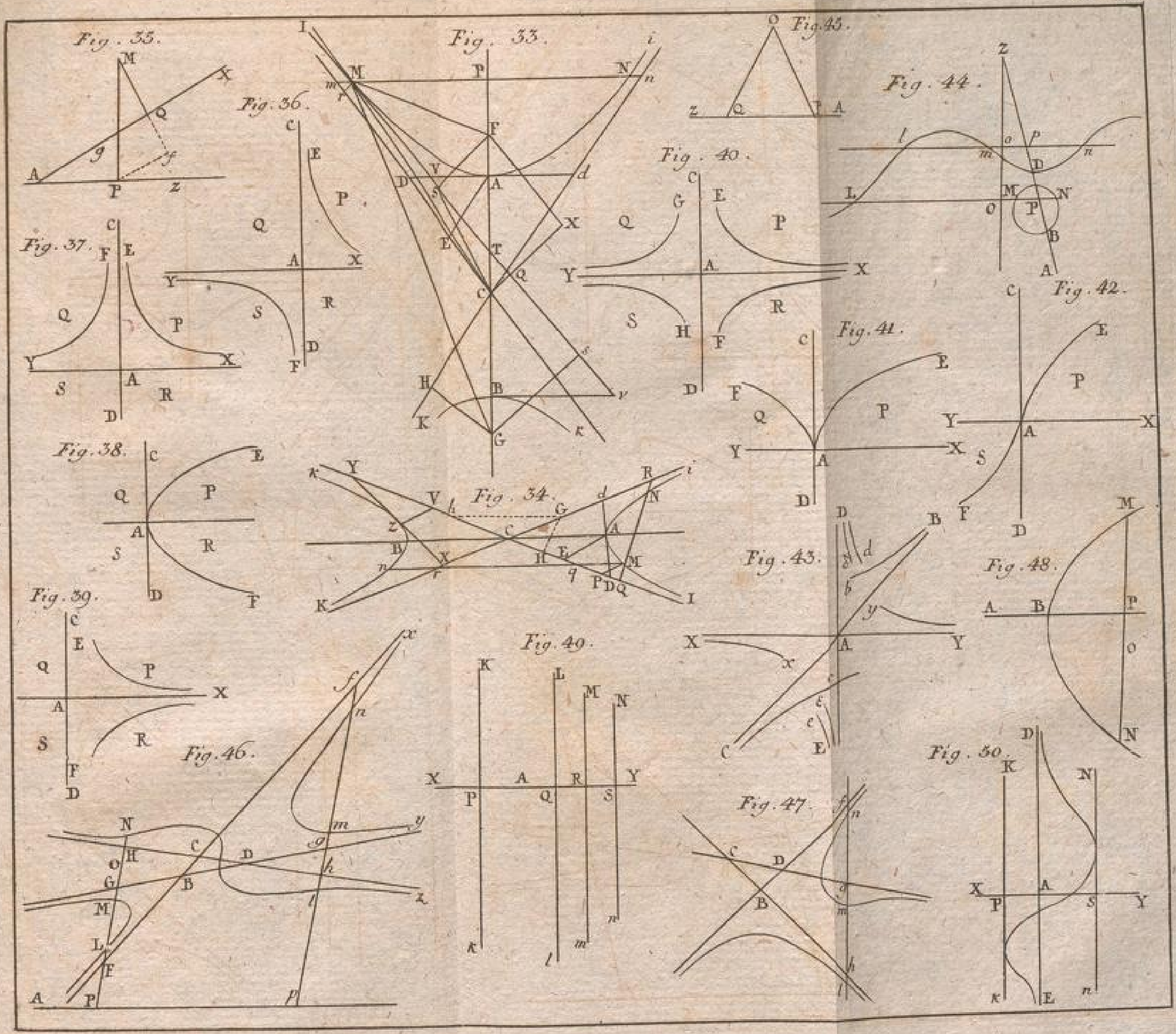
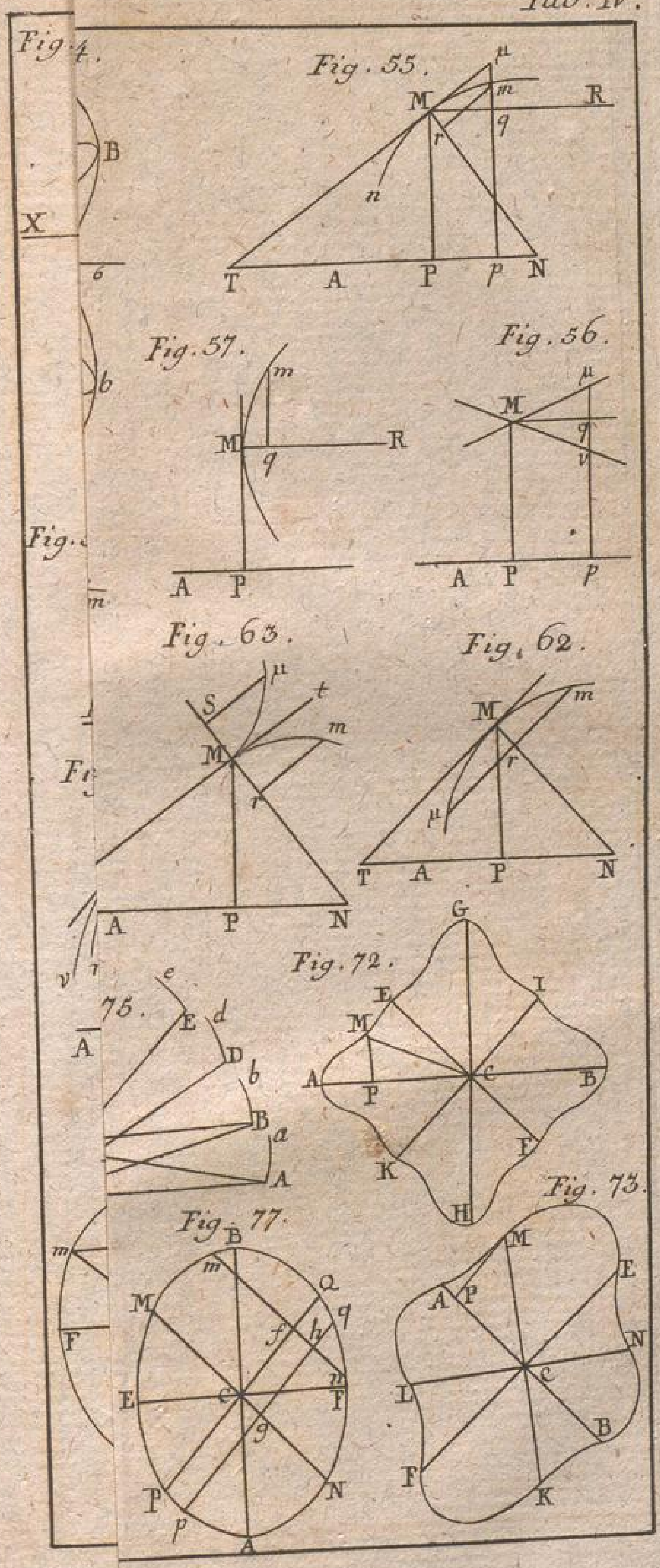


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.

Tab. IV.



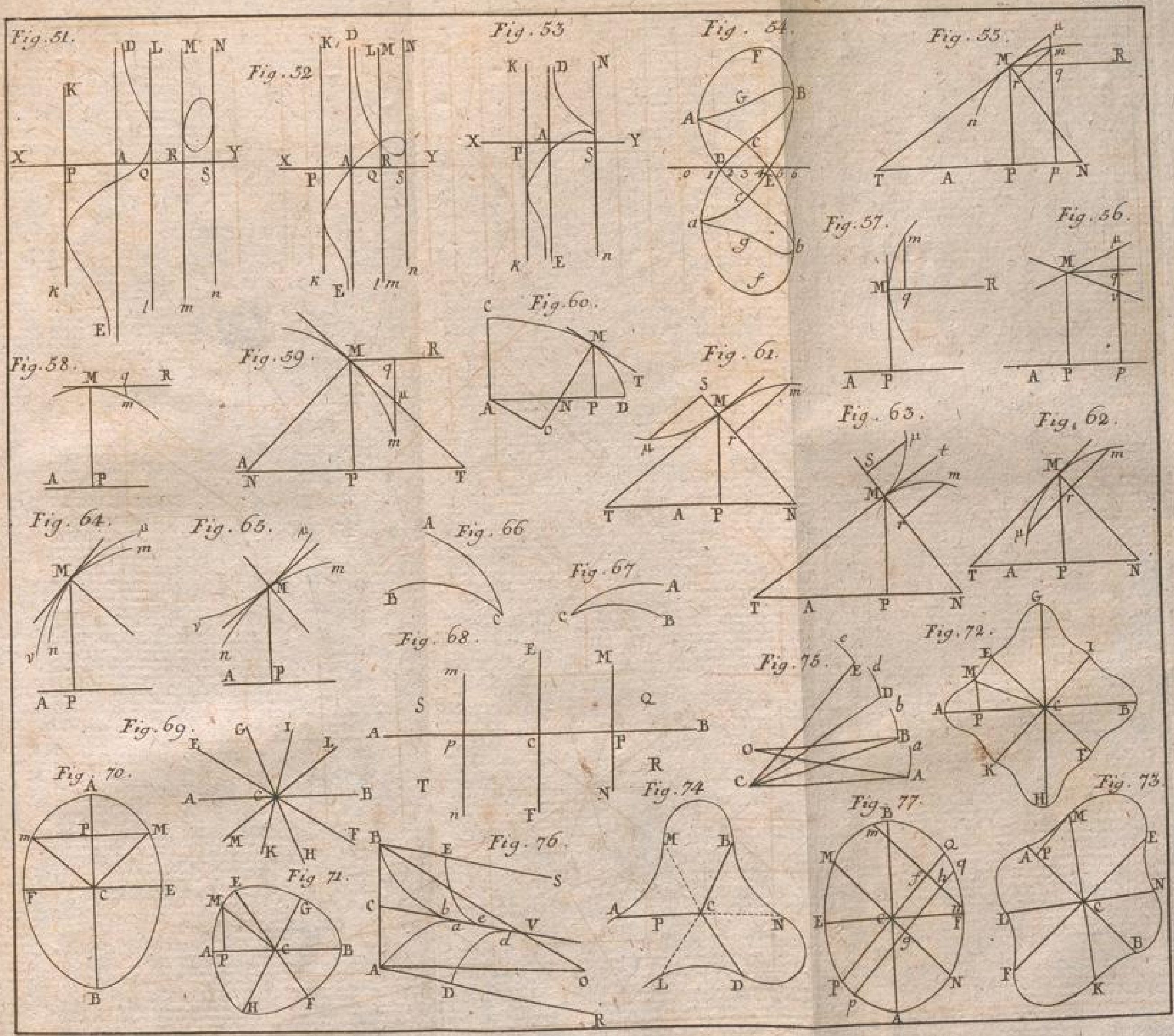
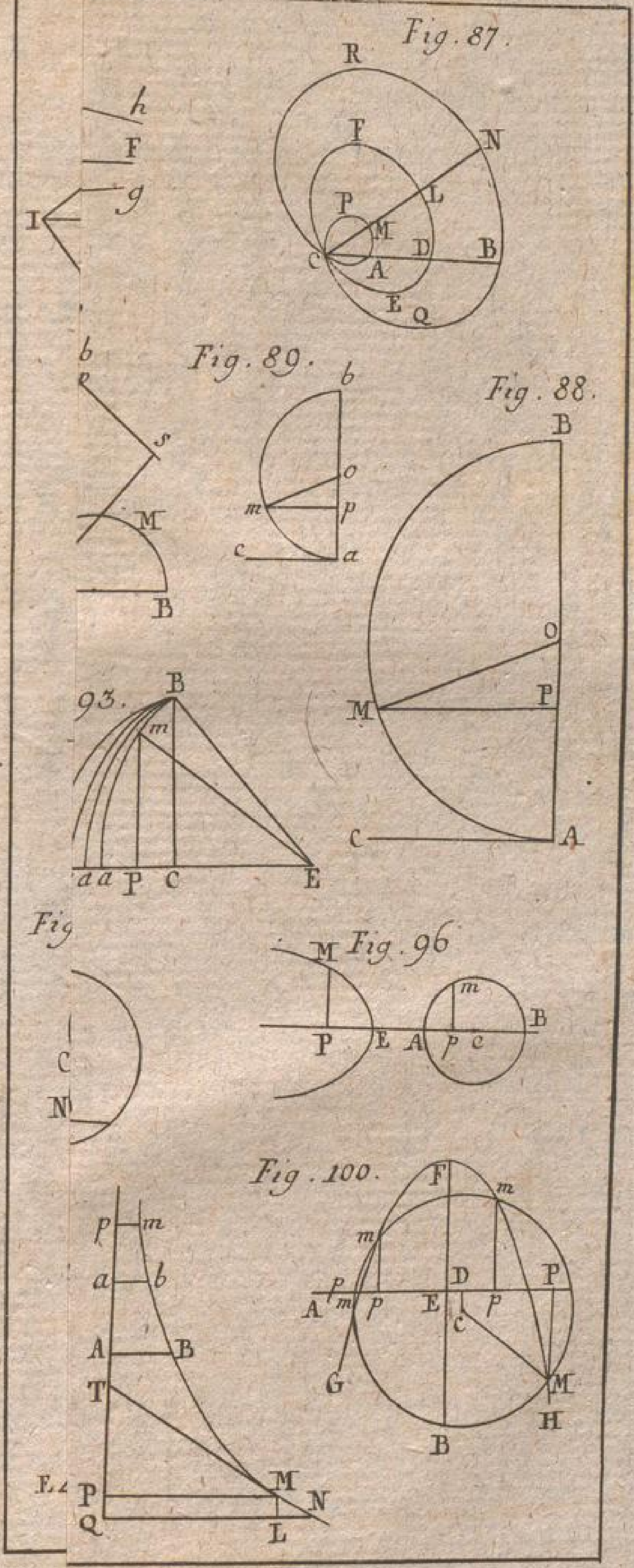


Fig. 51.
Fig. 52
Fig. 53
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66
Fig. 67
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.

Tab. V.



Tab. V.

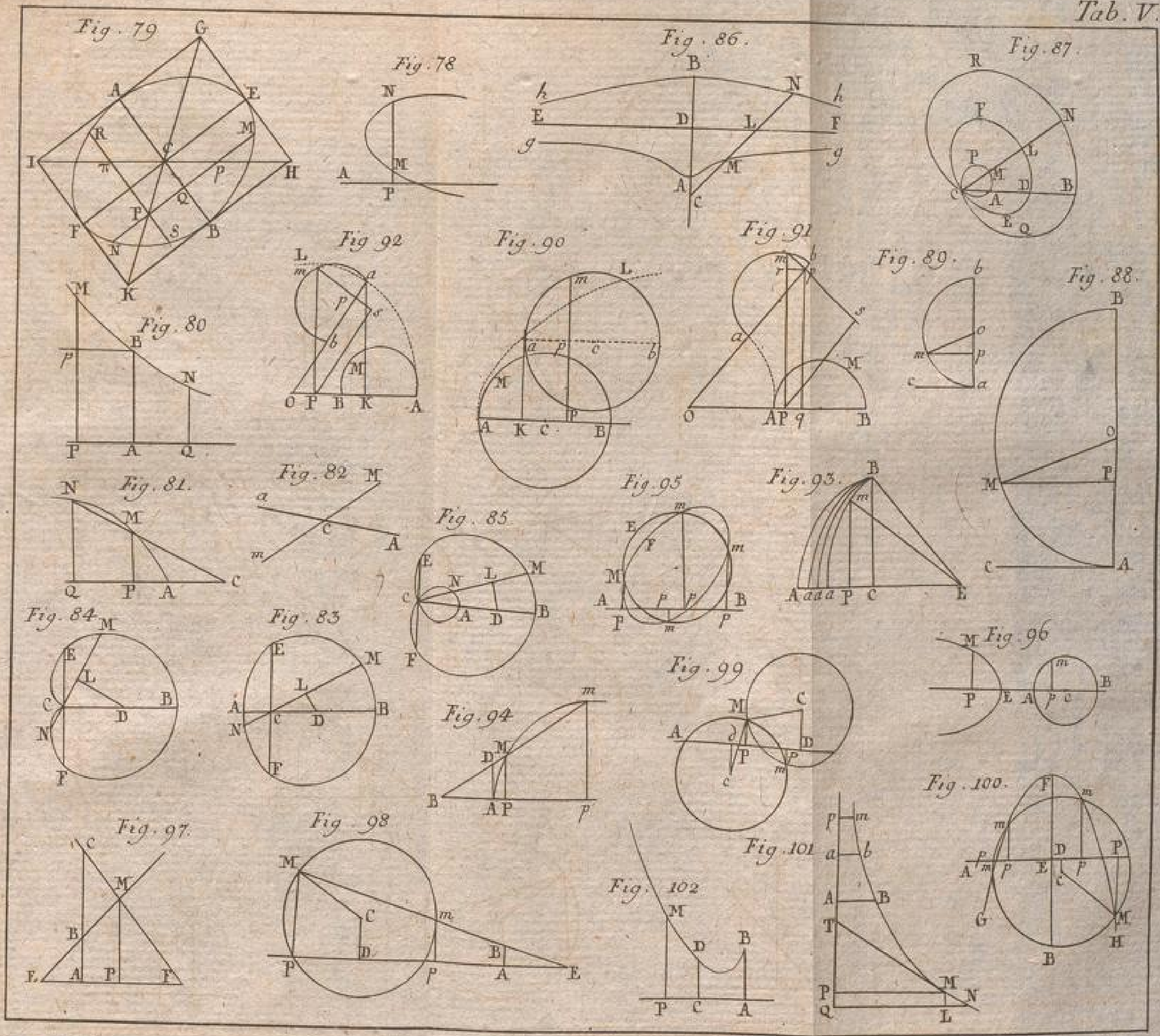


Fig. 78
Fig. 79
Fig. 80
Fig. 81
Fig. 82
Fig. 83
Fig. 84
Fig. 85
Fig. 86
Fig. 87
Fig. 88
Fig. 89
Fig. 90
Fig. 91
Fig. 92
Fig. 93
Fig. 94
Fig. 95
Fig. 96
Fig. 97
Fig. 98
Fig. 99
Fig. 100
Fig. 101
Fig. 102

Fig. 112

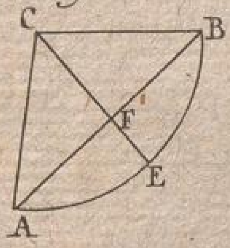
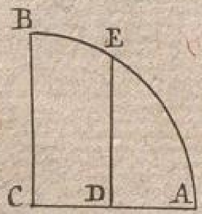


Fig. 113



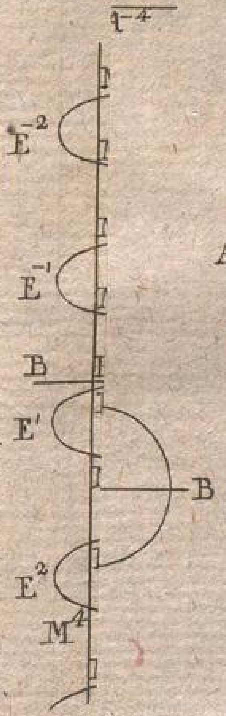


Fig. 114

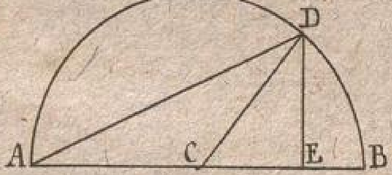


Fig. 116.

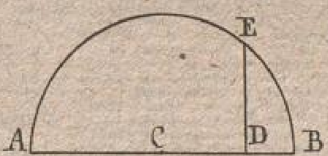
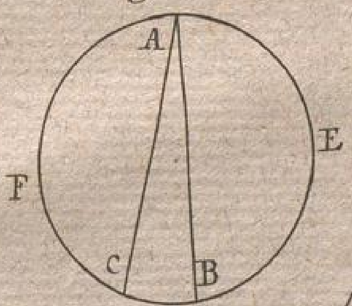


Fig. 115



118

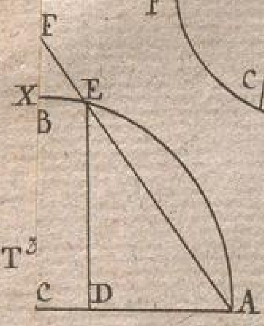


Fig. 117

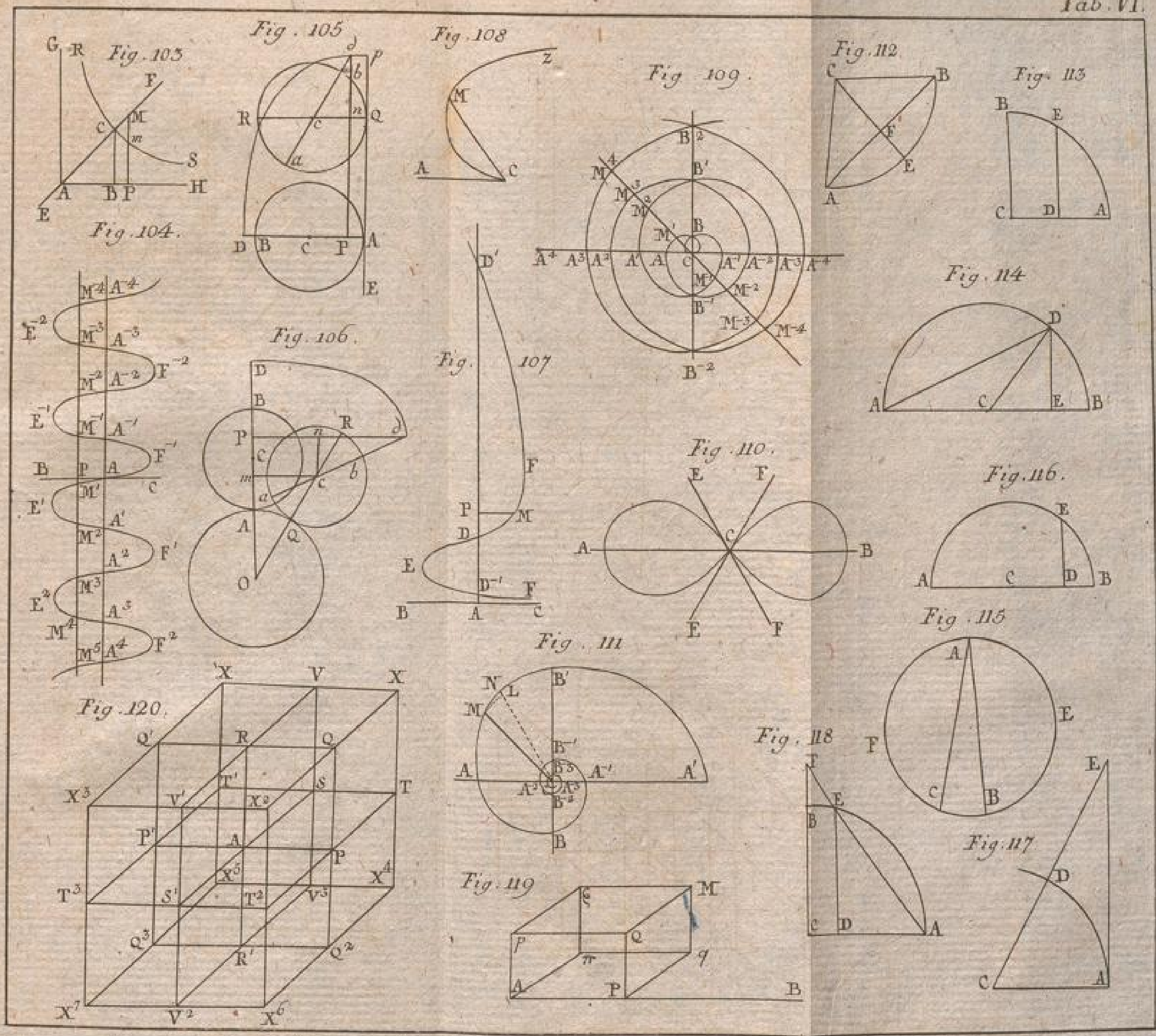
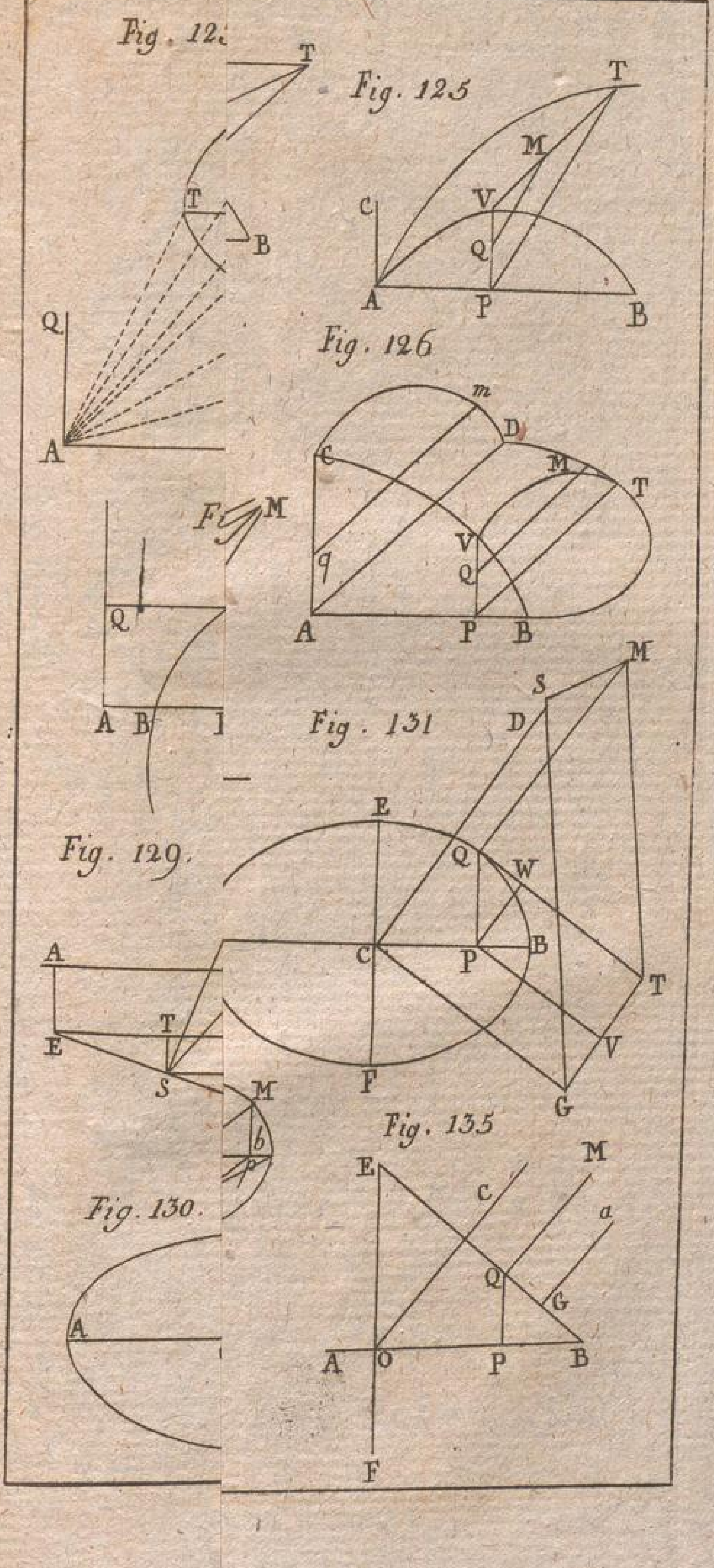


Fig. 103
Fig. 104
Fig. 105
Fig. 106
Fig. 107
Fig. 108
Fig. 109
Fig. 110
Fig. 111
Fig. 112
Fig. 113
Fig. 114
Fig. 115
Fig. 116
Fig. 117
Fig. 118
Fig. 119
Fig. 120

Tab. VII.



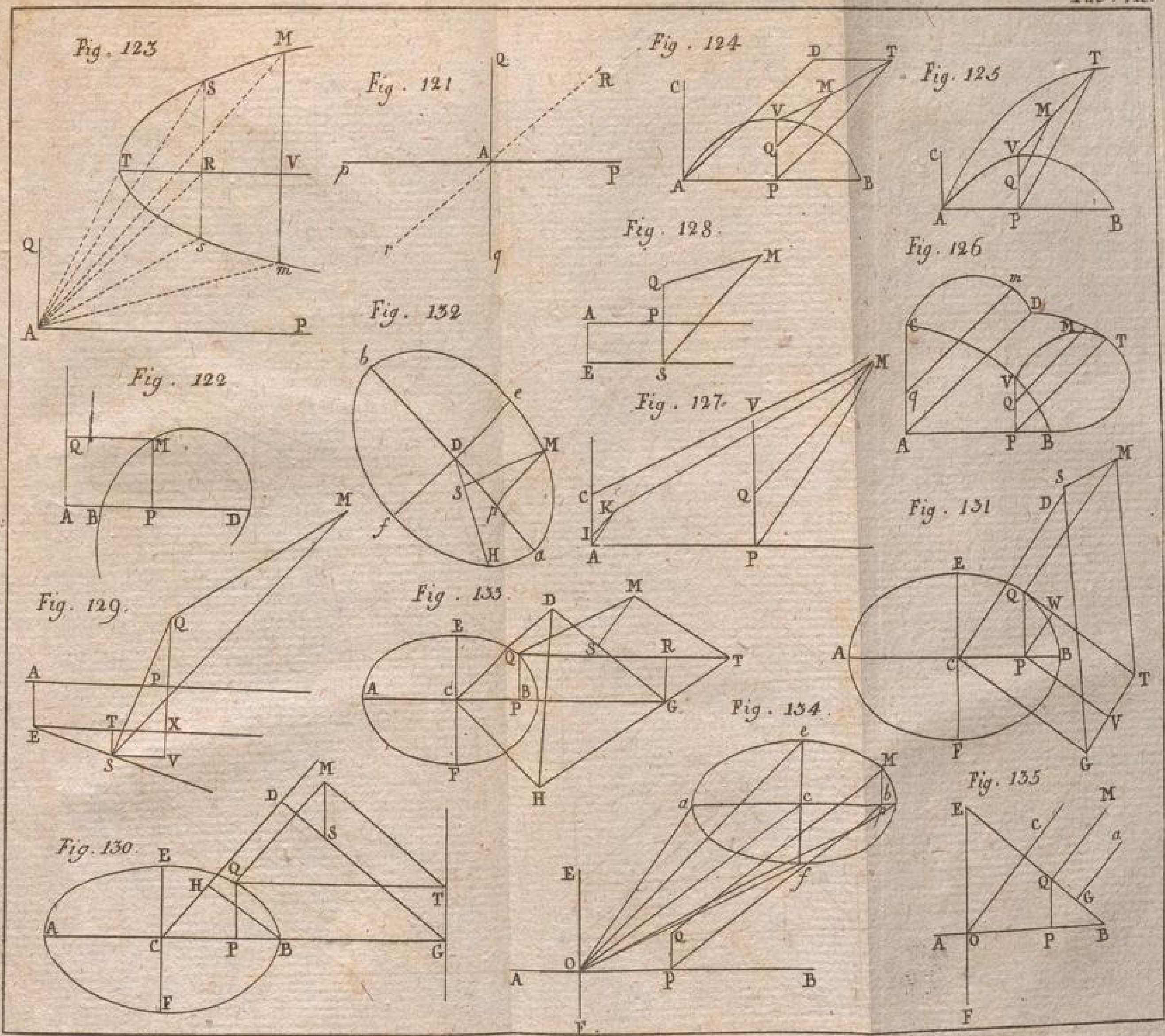


Fig. 123
Fig. 121
Fig. 124
Fig. 125
Fig. 128
Fig. 126
Fig. 132
Fig. 122
Fig. 127
Fig. 131
Fig. 129
Fig. 133
Fig. 134
Fig. 130
Fig. 135

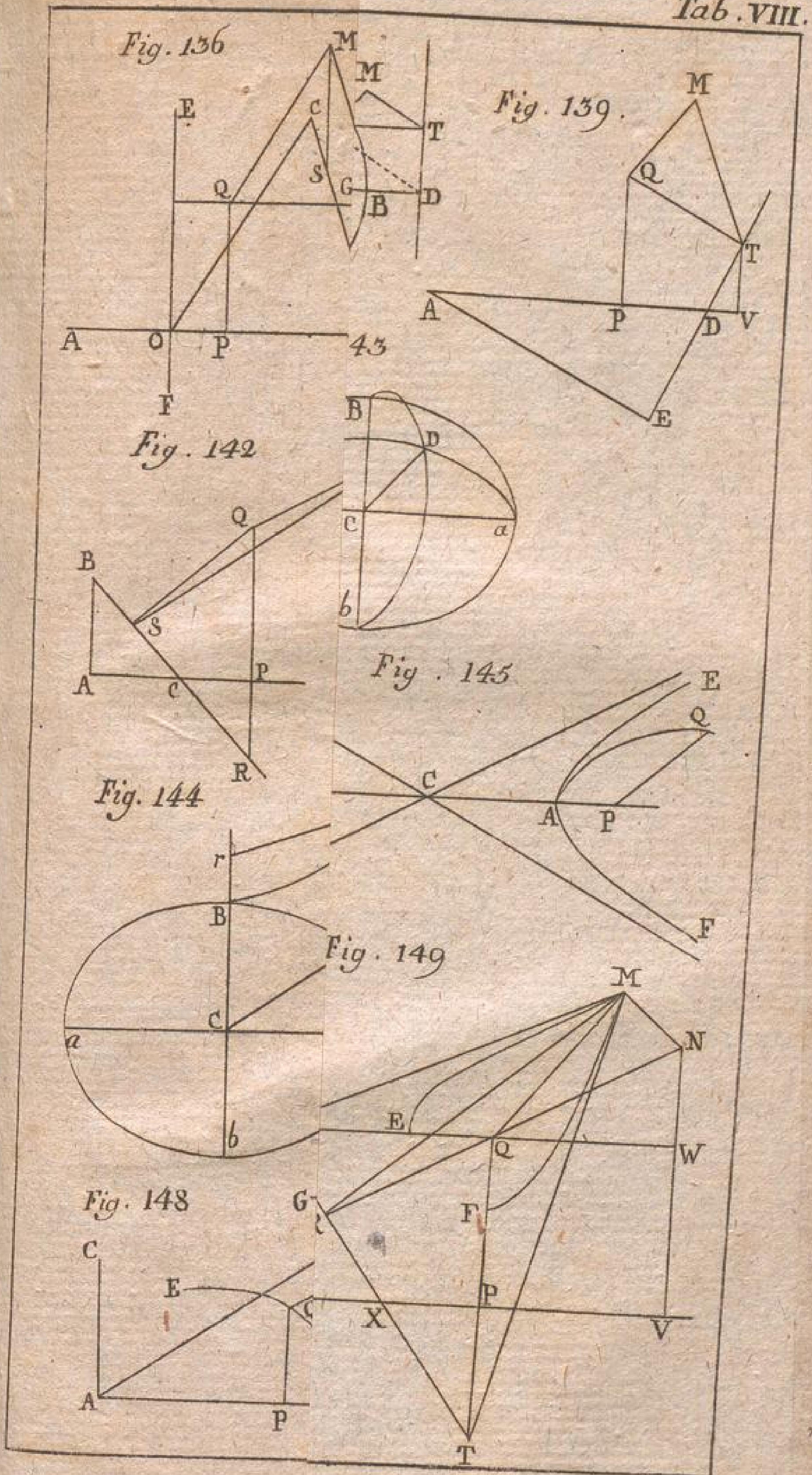


Fig. 136
Fig. 139.
Fig. 142
Fig. 145
Fig. 144
Fig. 149
Fig. 148
43

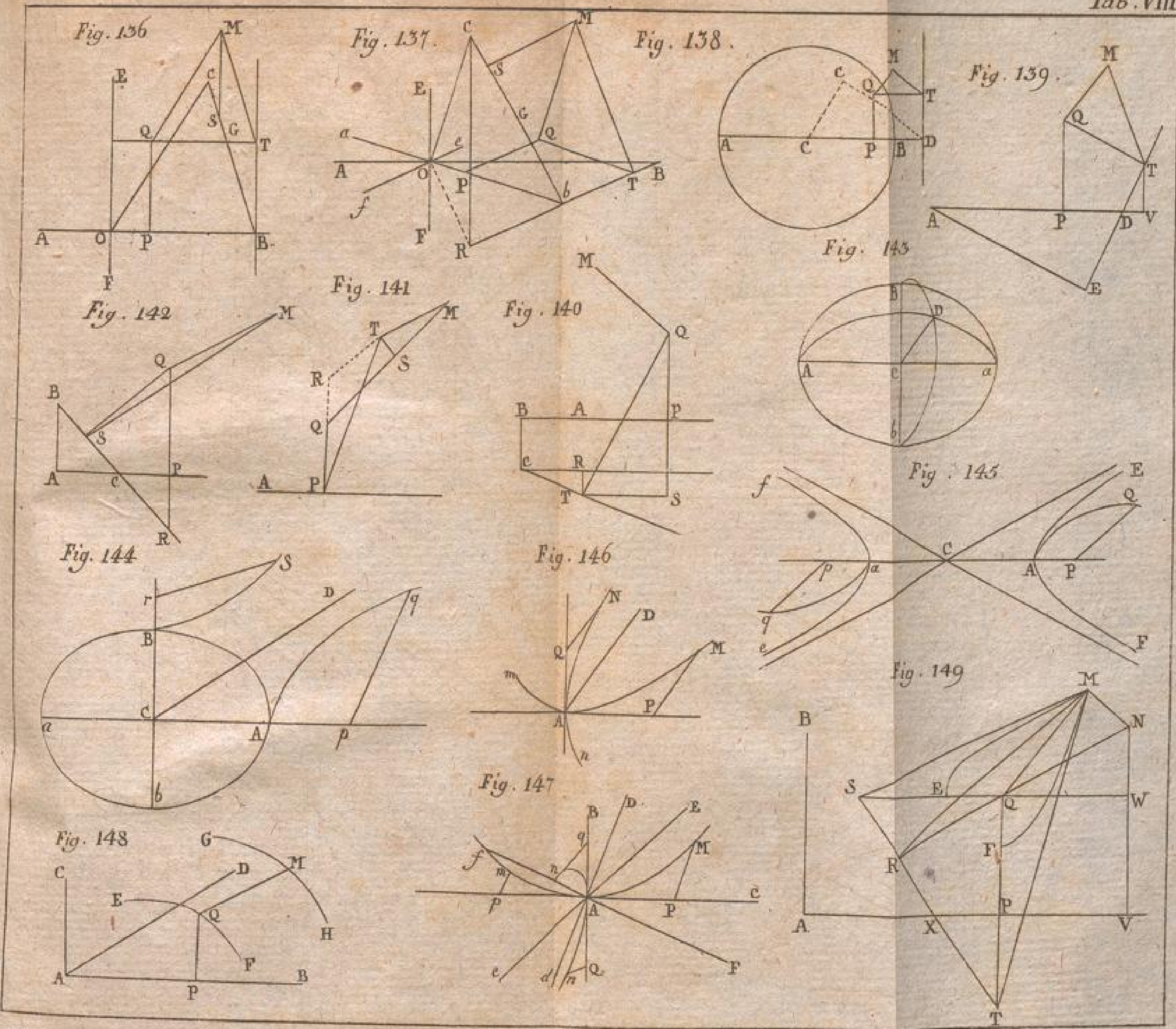


Fig. 136
Fig. 137
Fig. 138
Fig. 139
Fig. 140
Fig. 141
Fig. 142
Fig. 143
Fig. 144
Fig. 145
Fig. 146
Fig. 147
Fig. 148
Fig. 149