Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Achtzehntes Capitel. Von dem Gebrauche der Differenzialrechnung bey der Auflösung der Brüche.

Achtzehntes Capitel.

Von dem Gebrauche der Differenzialrechnung bey der Auflösung der Brüche.

§. 403.

Die Methode, jeden gegebenen Bruch in einfache Brüche aufzulösen, welche in der Einleitung in die Analysis des Unendlichen erklärt worden ist, ist zwar an sich leicht genug, sie kann aber durch den Gebrauch der Differenzialrechnung noch beträchtlich vervollkommt und leichter gemacht werden. Die meiste Schwierigkeit findet sich bey der Anwendung jener Methode alsdann, wenn der Nenner des aufzulösenden Bruchs eine Potenz von einem unbestimmten Grade ist, und es entspringt dieselbe hauptsächlich aus der erforderlichen Division des Nenners durch den bereits gefundenen Faktor. Bey dem Gebrauche der Differenzialrechnung aber kann man diese Schwierigkeit vermeiden, indem es dabey nicht nöthig ist, den andern Faktor des Nenners, der aus der Division mit dem bereits gefundenen Faktor entspringt, zu kennen. Diesen Vortheil gewährt nemlich die Methode, den Werth eines Bruchs zu bestimmen, dessen Zähler und Nenner in gewissen Fällen verschwinden, und der Gegenstand dieses Capitels, womit wir die Lehre vom Gebrauche der Differenzialrechnung in der Analysis beschließen wollen, soll daher die Art und

Weise seyn, die oben erklärte Methode von der Auflösung der Brüche bequemer und leichter zu machen.

§. 404.

Ist also irgend ein Bruch $\frac{P}{Q}$ gegeben, dessen Zähler und Nenner rationale und ganze Funktionen von x sind, so kommt es zuvörderst darauf an, ob x im Zähler P eben so viel oder mehr Dimensionen hat als im Nenner. Enthält der Bruch $\frac{P}{Q}$ einen ganzen Theil von der Form $Ax + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ rc. welcher sich durch die Division daraus entwickeln läßt: so ist der übrige Theil ein Bruch mit eben dem Nenner Q, dessen Zähler R weniger Dimensionen hat, als der Nenner Q, so daß sich die fernere Auflösung auf den Bruch $\frac{R}{Q}$ einschränkt. Indeß ist es nicht nöthig diesen Zähler R zu kennen, sondern es lassen sich die einfachen Brüche, welche $\frac{R}{Q}$ giebt, auch aus dem gegebenen Bruche $\frac{P}{Q}$ unmittelbar finden. Dieses ist bereits oben gezeigt worden.

§. 405.

Die einfachen Brüche, welche der Bruch $\frac{P}{Q}$, außer dem etwa in ihm enthaltenen Ganzen, in sich faßt, haben entweder zweytheilige Nenner von der Form $f + gx$, oder dreytheilige von der Form $f + 2x\cos.\phi\sqrt{fg} + gxx$, oder es sind ihre Nenner, Quadrate, Würfel, oder überhaupt höhere Potestäten von diesen. Alle diese Nenner sind ferner Faktoren des Nenners Q, so daß ein jeder Faktor des Nenners Q einen einfachen Bruch giebt. Ist nemlich $f + gx$ ein Faktor des Nenners Q, so entsteht daher ein einfacher Bruch von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$, und ist $(f + gx)^2$ ein solcher Faktor, so entspringen daher zwey Brüche $\frac{\mathfrak{A}}{(f + gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f + gx}$. Auf ähnliche Art entspringen aus dem cubischen Faktor $(f + gx)^3$ drey einfache Brüche von der Form: $\frac{\mathfrak{A}}{(f + gx)^3} + \frac{\mathfrak{B}}{(f + gx)^2} + \frac{\mathfrak{C}}{(f + gx)}$ u. s. w. Hat hingegen der Nenner Q einen dreytheiligen Faktor von der Form $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$, so entspringt daraus ein Bruch wie $\frac{\mathfrak{A} + ax}{ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx}$, und sind zwey solche Faktoren in dem Nenner einander gleich, so entstehen daher zwey Brüche wie

$$\frac{\mathfrak{A} + ax}{(ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx)^2} + \frac{\mathfrak{B} + bx}{ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx}$$

Auf ähnliche Art giebt der cubische Faktor

$$(ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx)^3$$

drey Brüche, ein biquadratischer vier u. s. f.

§. 406.

Man verfahre daher bey der Auflösung eines Bruchs $\frac{P}{Q}$ auf folgende Art. Zuvörderst suche man alle, sowohl einfache als zwey und dreytheilige, Faktoren des Nenners Q, und sind darunter einige gleich, so merke man sich dieselben, und betrachte sie als einen einzigen. Dann suche man aus diesen Faktoren des Nenners die einfachen Brü-

che,

che, welche sie geben, entweder auf die oben erklärte Art, oder auf die, welche jetzt beschrieben werden soll, und welche man nach Gefallen statt jener brauchen kann. Ist dieses geschehen, so addire man alle diese Brüche und setze dazu den in dem Bruche $\frac{P}{Q}$ etwa enthaltenen ganzen Theil, worauf denn die Summe dem Bruche $\frac{P}{Q}$ gleich seyn wird. Die Erfindung der Faktoren des Nenners Q setzen wir hier als etwas Bekanntes voraus, indem dieselbe von der Auflösung der Gleichung $Q = 0$ abhängt, und erklären hier nur die Art und Weise, mittelst der Differenzialrechnung, aus jedem Faktor des Nenners den daraus entspringenden einfachen Bruch zu finden. Da die Nenner dieser einfachen Brüche schon bekannt sind, so kommt es bloß darauf an, die Art zu beschreiben, wie die zugehörigen Zähler gefunden werden.

§. 407.

Es habe also der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ den Faktor $f + gx$, so daß $Q = (f + gx)S$ sey, und S den Faktor $f + gx$ nicht weiter enthalte. Ferner sey der aus diesem Faktor entspringende Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx}$, und sein Complement $\frac{V}{S}$, so daß $\frac{\mathfrak{A}}{f + gx} + \frac{V}{S} = \frac{P}{Q}$ sey. Alsdann ist $\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{f + gx} = \frac{P - \mathfrak{A}S}{(f + gx)S}$, und folglich $V = \frac{P - \mathfrak{A}S}{f + gx}$. Da also V eine ganze Funktion von x ist, so muß $P - \mathfrak{A}S$ durch $f + gx$ theilbar seyn, und daher, wenn man $f + gx = 0$, oder $x = \frac{-f}{g}$ setzt, $P - \mathfrak{A}S$ verschwinden. Man setze demnach $x = \frac{-f}{g}$, so wird, da $P - \mathfrak{A}S = 0$ ist, $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$ seyn, wie wir oben gefunden haben. Da aber $S = \frac{Q}{f+gx}$ ist, so wird $\mathfrak{A} = \frac{(f+gx)P}{Q}$, wenn man allenthalben $f+gx = 0$ oder $x = \frac{-f}{g}$ setzt. Da aber in diesem Falle sowohl der Zähler $(f+gx)P$ als der Nenner Q verschwinden, so wird nach dem, was wir über die Erfindung des Werths von solchen Brüchen gesagt haben,

$$\mathfrak{A} = \frac{(f+gx)dP + Pgdx}{dQ}$$

wenn man $x = \frac{-f}{g}$ nimmt. Da nun in diesem Falle $(f+gx)dP = 0$ wird, so ist $\mathfrak{A} = \frac{gPdx}{dQ}$, und so läßt sich der Werth von $\mathfrak{A}$ durch die Differenziation finden.

§. 408.

Hat demnach der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ den einfachen Faktor $f+gx$, so entspringt aus diesem Nenner der einfache Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$, wenn $\mathfrak{A} = \frac{gPdx}{dQ}$ ist, nachdem man hier allenthalben anstatt x den aus der Gleichung $f+gx = 0$ sich ergebenden Werth $x = \frac{-f}{g}$ gesetzt hat. Auf diese Art ist es also nicht nöthig, zuvor den andern Faktor S zu suchen, welchen man durch die Division des Nenners

Q mit $f + gx$ erhält. Wenn daher Q nicht in seinen Faktoren gegeben ist, so kann man diese, häufig und insbesondere, wenn die Exponenten von x in Q unbestimmt sind, sehr lästige Divisionen unterlassen, indem der Werth von $\mathfrak{A}$ aus der Formel $\frac{gPdx}{dQ}$ gefunden wird. Ist aber Q in seinen Faktoren gegeben, so daß der Werth von S unmittelbar genommen werden kann: so verdient der andere Ausdruck den Vorzug, wobey $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$ ist, wenn man $x = \frac{-f}{g}$ setzt. Auf diese Art kann man jedesmal leicht die bequemste Methode wählen; die Anwendung der jetzt gefundenen Formel aber wollen wir an einigen Beyspielen erläutern.

Erstes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^9}{1 + x^{17}}$ gegeben; man soll den einfachen Bruch finden, der aus dem Faktor des Nenners $1 + x$ entspringt.

Da hier $Q = 1 + x^{17}$ ist, und $1 + x$ zum Faktor hat, so würde man, wenn man dividiren wollte,

$$S = 1 - x + xx - x^3 + \ldots\ldots + x^{16}$$

finden. Allein es ist weit bequemer, die neue Formel $\mathfrak{A} = \frac{gPdx}{dQ}$ zu brauchen. Da also $f = 1$; $g = 1$, und $P = x^9$ ist, so wird, wegen $dQ = 17x^{16}dx$,

$$\mathfrak{A} = \frac{x^9}{17x^{16}} = \frac{1}{17x^7}$$

wenn man $x = -1$ nimmt, und folglich $\mathfrak{A} = \frac{1}{17}$, und der aus dem Faktor $1 + x$ entspringende einfache Bruch

$$\frac{-1}{17(1+x)}$$

Zweytes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^m}{1 - x^{2n}}$ gegeben; man soll den einfachen Bruch finden, der aus dem Faktor des Nenners $1 - x$ entspringt.

Da der gegebene Faktor $1 - x$ ist, so wird $f = 1$ und $g = -1$. Nun giebt $Q = 1 - x^{2n}$, wenn man differenziirt, $dQ = -2nx^{2n-1}dx$, und da $P = x^m$ ist, so wird $\mathfrak{A} = \frac{-x^m}{-2nx^{2n-1}}$. Setzt man nun, wegen $1 - x = 0$, den Werth von $x = 1$, so wird $\mathfrak{A} = \frac{1}{2n}$, und also der gesuchte einfache Bruch $= \frac{1}{2n(1-x)}$.

Drittes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^m}{1 - 4x^k + 3x^n}$ gegeben; man soll den einfachen Bruch finden, der aus dem Faktor des Nenners $1 - x$ entspringt.

Hier wird $f = 1$; $g = -1$; $P = x^m$; $Q = 1 - 4x^k + 3x^n$, und $\frac{dQ}{dx} = -4kx^{k-1} + 3nx^{n-1}$; folglich $\mathfrak{A} = \frac{-x^m}{-4kx^{k-1} + 3nx^{n-1}}$, und, wenn man $x = 1$ setzt,

$\mathfrak{A} =$

$\mathfrak{A} = \frac{1}{4k - 3n}$. Demnach ist der einfache Bruch, welcher aus dem einfachen Faktor $1 - x$ entspringt =

$$\frac{1}{(4k - 3n)(1 - x)}.$$

§. 409.

Nun habe der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ den quadratischen Faktor $(f + gx)^2$, und die daraus entspringenden einfachen Brüche seyen $= \frac{\mathfrak{A}}{(f + gx)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{f + gx}$. Ferner sey $Q = (f + gx)^2 S$, und das Complement $= \frac{V}{S}$, so daß

$$\frac{V}{S} = \frac{P}{Q} - \frac{\mathfrak{A}}{(f + gx)^2} - \frac{\mathfrak{B}}{f + gx}, \text{ und}$$

$$V = \frac{P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}(f + gx)S}{(f + gx)^2}$$

werde. Da V eine ganze Funktion ist, so muß $P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}S(f + gx)$ durch $(f + gx)^2$, und da S den Faktor $f + gx$ nicht weiter enthält, auch $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f + gx)$ durch $(f + gx)^2$ theilbar seyn, und es verschwindet daher, wenn man $x = \frac{-f}{g}$ setzt, nicht bloß dieser letzte Ausdruck selbst, sondern auch sein Differenzial $d.\frac{P}{S} - \mathfrak{B}gdx$. Man setze also $x = \frac{-f}{g}$, so erhält man aus der ersten Gleichung $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$, und aus der andern $\mathfrak{B} = \frac{1}{gdx} d.\frac{P}{S}$. Durch diese

Werthe

Werthe aber werden die gesuchten einfachen Brüche: $\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^2}$ $+ \frac{\mathfrak{B}}{f+gx}$ selbst erhalten.

Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^m}{1-4x^3+3x^4}$ gegeben, dessen Nenner den Bruch $(1-x)^2$ hat; man soll die einfachen Brüche finden, welche aus diesem Nenner entspringen.

Da hier $f = 1$; $g = -1$; $P = x^m$ und $Q = 1 - 4x^3 + 3x^4$ ist, so wird $S = 1 + 2x + 3xx$;

$$\frac{P}{S} = \frac{x^m}{1+2x+3xx},$$

und

$$d.\frac{P}{S} = \frac{mx^{m-1}dx + 2(m-1)x^m dx + 3(m-2)x^{m+1}dx}{(1+2x+3xx)^2}.$$

Setzt man demnach $x = 1$, so wird

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{6}, \text{ und } \mathfrak{B} = -1 \,.\, \frac{6m-8}{36} = \frac{4-3m}{18};$$

also die gesuchten einfachen Brüche:

$$\frac{1}{6(1-x)^2} + \frac{4-3m}{18(1-x)}.$$

§. 410.

Es habe der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ drey einfache gleiche Faktoren, oder den cubischen Faktor $(f+gx)^3$, und dabey seyen die einfachen Brüche, welche aus diesem Faktor entspringen

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^3} + \frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^2} + \frac{\mathfrak{C}}{f+gx}$$

und

und das Complement derselben $= \frac{V}{S}$; so ist

$$V = \frac{P - \mathfrak{A}S - \mathfrak{B}S(f + gx) - \mathfrak{C}S(f + gx)^2}{(f + gx)^3}$$

Es muß folglich der Ausdruck

$$\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f + gx) - \mathfrak{C}S(f + gx)^2$$

durch $(f + gx)^3$ theilbar seyn, und also auch, wenn man $f + gx = 0$, oder $x = \frac{-f}{g}$ setzt, nicht bloß dieser Ausdruck selbst, sondern auch sein erstes und zweytes Differenzial $= 0$ werden. Es ist demnach, wenn man $x = \frac{-f}{g}$ setzt,

$$\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f + gx) - \mathfrak{C}(f + gx)^2 = 0$$

$$d.\frac{P}{S} - \mathfrak{B}gdx - 2\mathfrak{C}gdx(f + gx) = 0$$

$$dd.\frac{P}{S} - \mathfrak{C}g^2dx^2 = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt, $\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$

„ „ zweyten „ „ $\mathfrak{B} = \frac{1}{gdx}d.\frac{P}{S}$

„ „ dritten „ „ $\mathfrak{C} = \frac{1}{2g^2dx^2}dd.\frac{P}{S}$

§. 411.

Ueberhaupt habe der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ den Faktor $(f + gx)^n$, so daß $Q = (f + gx)^n S$ sey, und dabey seyen die einfachen Brüche, welche aus diesem Faktor entspringen,

$$\frac{\mathfrak{A}}{(f+gx)^n} + \frac{\mathfrak{B}}{(f+gx)^{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{(f+gx)^{n-2}} + \frac{\mathfrak{D}}{(f+gx)^{n-3}} + \text{ꝛc.}$$

bis zu demjenigen, dessen Nenner $f+gx$ ist. Schließt man nun, wie vorhin, so findet man, daß der Ausdruck

$$\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}(f+gx) - \mathfrak{C}(f+gx)^2 - \mathfrak{D}(f+gx)^3$$
$$- \mathfrak{E}(f+gx)^4 - \text{ꝛc.}$$

durch $(f+gx)^n$ theilbar seyn, und daher sowohl selbst als auch alle seine Differenzialien bis zum Grade $n-1$ verschwinden müsse, wenn man $x = \frac{-f}{g}$ setzt. Aus den Gleichungen aber, welche man auf diese Art erhält, folgt für den Fall $x = \frac{-f}{g}$:

$$\mathfrak{A} = \frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{1gdx} d . \frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{1.2g^2dx^2} dd . \frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{1.2.3g^3dx^3} d^3 . \frac{P}{S}$$

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{1.2.3.4g^4dx^4} d^4 . \frac{P}{S}$$

ꝛc.

Man muß indeß hier nicht vergessen, daß die Differenzialien von $\frac{P}{S}$ vor dem Gebrauche der Substitution $x = \frac{-f}{g}$ genommen werden müssen, weil sonst x aufhören würde, eine veränderliche Größe zu seyn.

§. 412.

§. 412.

Es werden also auf diese Art die Zähler $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. leichter ausgedruckt als nach der oben in der Einleitung erklärten Methode, und öfters auch darnach ihre Werthe schneller gefunden. Um die Vergleichung beyder Methoden zu erleichtern, wollen wir die Bestimmung der Werthe der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. nach der Methode in der Einleitung hersetzen. Nimmt man

$x = \frac{-f}{g}$	und mit Zurücklassung von x als einer veränderl. Größe
$\mathfrak{A} = \frac{p}{S}$	$\frac{p - \mathfrak{A}S}{f + gx} = \mathfrak{P}$; so wird
$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}}{S}$	$\frac{\mathfrak{P} - \mathfrak{B}S}{f + gx} = \mathfrak{Q}$; so wird
$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}}{S}$	$\frac{\mathfrak{Q} - \mathfrak{C}S}{f + gx} = \mathfrak{R}$; so wird
ꝛc.	ꝛc.

§. 413.

Hat der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ nicht lauter einfache reelle Faktoren, so nehme man je zwey von den imaginären Faktoren, deren Produkt eine reelle Größe ist, zusammen. Es sey also ein Faktor des Nenners $Q = ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$, welcher, $= 0$ gesetzt, den doppelten imaginären Werth giebt:

$$x = \frac{f}{g}\cos.\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin.\phi, \text{ woher denn}$$

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin.n\phi$$

ist. Ferner sey $Q = (ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx)S$, und dabey S nicht durch $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ theilbar. Endlich

sey

sey der Bruch, welcher aus dem Faktor $ff - 2fgx \cos.\varphi +$ $ggxx$ entspringt

$$\frac{\mathfrak{A} + ax}{ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx}$$

und das Complement desselben zu $\frac{P}{Q} = \frac{V}{S}$. Bey diesen Voraussetzungen ist

$$V = \frac{P - (\mathfrak{A} + ax)S}{ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx}$$

und daher $P - (\mathfrak{A} + ax)S$, und außerdem auch $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} -$ ax durch $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$ theilbar. Folglich verschwindet $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - ax$, wenn man $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$ $= 0$, oder

$$x = \frac{f}{g}\cos.\varphi + \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin.\varphi, \text{ oder}$$

$$x = \frac{f}{g}\cos.\varphi - \frac{f}{g(\sqrt{-1})}\sin.\varphi$$

setzt.

§. 414.

Da P und S ganze Funktionen von x sind, so braucht man in beyden Ausdrücken beyde Substitutionen; und da für jede Potestät von x oder für x^n die Binomie $x^n =$ $\frac{f^n}{g^n}\cos.n\varphi \pm \frac{f^n}{g^n\sqrt{-1}}\sin.n\varphi$ gesetzt werden muß; so schreibe man zuvörderst allenthalben $\frac{f^n}{g^n}\cos.n\varphi$ für x^n, und dabey gehe P in $\mathfrak{P}$, und S in $\mathfrak{S}$ über. Dann setze man allenthalben $\frac{f^n}{g^n}\sin.n\varphi$ für x^n, und hierbey gehe P in p, und S in in s über; man muß aber vor diesen Substitutionen jede der Funktionen P und S ganz entwickeln, und also die Faktoren, welche sie etwa enthalten, zuvor durch die Multiplication wegschaffen. Hat man auf diese Art die Werthe $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{s}$ gefunden, so ist offenbar, daß die Funktion

$$P \text{ in } \mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}}, \text{ und } S \text{ in } \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$$

übergehen wird, wenn man

$$x = \frac{f}{g}\cos.\varphi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin.\varphi$$

annimmt. Da nun in beyden Fällen $\frac{P}{S} - \mathfrak{A} - ax$, oder $P - (\mathfrak{A} + ax)S$ verschwinden muß, so wird

$$\mathfrak{P} \pm \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{-1}} = (\mathfrak{A} + \frac{af}{g}\cos.\varphi \pm \frac{af}{g\sqrt{-1}}\sin.\varphi)(\mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}})$$

und hieraus entstehen zwey Gleichungen

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{S} + \frac{af\mathfrak{S}}{g}\cos.\varphi - \frac{af\mathfrak{s}}{g}\sin.\varphi$$

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{s} + \frac{af\mathfrak{s}}{g}\cos.\varphi + \frac{af\mathfrak{S}}{g}\sin.\varphi$$

aus welchen man, wenn man $\mathfrak{A}$ daraus wegschafft,

$$\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P} = \frac{af(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)}{g}\sin.\varphi$$

und folglich

$$a = \frac{g(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})}{f(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin.\varphi}$$

findet. Bringt man nun $\sin.\varphi$ weg, so wird

$$\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p} = (\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)(\mathfrak{A} + \frac{af}{g}\cos.\varphi)$$

und folglich

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{P} + \mathfrak{s}\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2} - \frac{(\mathfrak{S}\mathfrak{p} - \mathfrak{s}\mathfrak{P})\cos.\varphi}{(\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{s}^2)\sin.\varphi}$$

§. 415.

Da

$$S = \frac{Q}{ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx}$$

ist, und wenn man $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx = 0$ setzt, sowohl Zähler als Nenner verschwinden, so ist in diesem Falle

$$S = \frac{dQ : dx}{2ggx - 2fg\cos.\phi}$$

Nun gehe, wenn man allenthalben $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi$ setzt, die Funktion $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q}$, wenn man aber $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin.n\phi$ nimmt, in q über: so ist offenbar, daß bey

$$x = \frac{f}{g}\cos.\phi \pm \frac{f}{g\sqrt{-1}}\sin.\phi$$

die Funktion $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q} + \frac{q}{\sqrt{-1}}$ übergehen wird; und hiedurch geht die Funktion S in $\frac{\mathfrak{Q} \pm q : \sqrt{-1}}{\pm 2fg . \sin.\phi\sqrt{-1}}$ über. Da also $S = \mathfrak{S} \pm \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{-1}}$ ist, wenn man eben denselben Werth für x setzt, so hat man

$$\mathfrak{Q} \pm \frac{q}{\sqrt{-1}} = \pm \frac{2fg\mathfrak{S}}{\sqrt{-1}}\sin.\phi - 2fg\mathfrak{s}\sin.\phi$$

Demnach ist

$$\mathfrak{s} = \frac{-\mathfrak{Q}}{2fg\sin.\phi}, \text{ und } \mathfrak{S} = \frac{q}{2fg.\sin.\phi}$$

Braucht man diese Werthe, so wird

$$a = \frac{2gg(pq + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})}{\mathfrak{Q}^2 + q^2}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\sin.\phi}{\mathfrak{Q}^2 + q^2} - \frac{2fg(pq + \mathfrak{P}\mathfrak{Q})\cos.\phi}{\mathfrak{Q}^2 + q^2}$$

§. 416.

§. 416.

Hiedurch erhält man eine bequeme Art, aus jedem Faktor vom zweyten Grade einen einfachen Bruch zu bilden; und da dabey der Nenner des gegebenen Bruchs selbst in der Rechnung beybehalten wird, so vermeidet man die Division, wodurch der Werth von S bestimmt werden müßte, und welche oft eine sehr mühsame Operation ist. Hat also der Nenner Q des Bruchs $\frac{P}{Q}$ einen Faktor wie $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$, so findet man den einfachen Bruch, der aus diesem Faktor entspringt, auf folgende Art. Man nimmt $x = \frac{f}{g}\cos.\phi$, und schreibt für jede Potestät von x oder x^n den Werth $\frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi$. Hiedurch gehe P in $\mathfrak{P}$, und die Funktion $\frac{dQ}{dx}$ in $\mathfrak{Q}$ über. Dann setzt man $x = \frac{f}{g}\sin.\phi$, und $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin.n\phi$. Dadurch gehe P in p, und $\frac{dQ}{dx}$ in q über. Hat man diese Werthe von $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, p, q, gefunden, so lassen sich die Größen A und a auf folgende Art bestimmen:

$$\mathfrak{A} = \frac{2fg(\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\sin.\phi}{\mathfrak{Q}^2 + q^2} - \frac{2fg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)\cos.\phi}{\mathfrak{Q}^2 + q^2}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{2gg(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)}{\mathfrak{Q}^2 + q^2}$$

Der Bruch aber, welcher aus dem Faktor $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ des Nenners Q entspringt, ist =

$$\frac{2fg(\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\sin.\phi + 2g(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)(gx - f\cos.\phi)}{(\mathfrak{Q}^2 + q^2)(ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx)}$$

Erstes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{x^m}{a + bx^n}$ gegeben, dessen Nenner $a + bx^n$ den Faktor $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ hat; man soll den einfachen Bruch finden, welcher aus diesem Faktor entspringt.

Da hier $P = x^m$ und $Q = a + bx^n$ ist: so ist $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1}$. Hiedurch wird

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos.m\phi; \qquad \mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin.m\phi$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos.(n-1)\phi; \quad \mathfrak{q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin.(n-1)\phi$$

Hieraus ergiebt sich

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{n^2b^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(n-m-1)\phi$$

und

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q} = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(n-m-1)\phi$$

Folglich ist der gesuchte einfache Bruch =

$$\left.\begin{array}{l} 2g^{n-m}(f\sin.\phi\sin.(n-m-1)\phi) \\ +\,2g^{n-m}(gx\cos.(n-m-1)\phi) \\ -\,2g^{n-m}(f\cos.\phi\cos.(n-m-1)\phi) \end{array}\right\} : \begin{array}{c} nbf^{n-m-1} \\ \times \\ ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx \end{array}$$

oder

$$\frac{2g^{n-m}(gx\cos.(n-m-1)\phi - f\cos.(n-m)\phi)}{nbf^{n-m-1}(ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx)}$$

Zweytes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{1}{x^m(a+bx^n)}$ gegeben, dessen Nenner den Faktor $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ hat; man soll den einfachen Bruch finden, welcher aus diesem Faktor entspringt.

Da $P = 1$, und $Q = ax^m + bx^{m+n}$ ist, so wird $\frac{dQ}{dx} = max^{m-1} + (m+n)bx^{m+n-1}$; und also, wenn man $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi$ setzt, wegen $P = x^0$ und $\mathfrak{P} = 1$,

$$\mathfrak{Q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos.(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(m+n-1)\phi$$

$\mathfrak{p} = 0$, und

$$\mathfrak{q} = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin.(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(m+n-1)\phi.$$

Folglich

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{m^2a^2f^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} + \frac{2m(m+n)abf^{2m+n-2}}{g^{2m+n-2}}\cos.n\phi + \frac{(m+n)^2b^2f^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}$$

Ist aber $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ der Divisor von $a + bx^n$, so ist $a + \frac{bf^n}{g^n}\cos.n\phi = 0$, und $\frac{bf^n}{g^n}\sin.n\phi = 0$, und also

$$aa = \frac{bbf^{2n}}{g^{2n}}.$$ Folglich

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{(m+n)^2bbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}} - \frac{m(2n+m)aaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}}$$

$$= \frac{nnaaf^{2(m-1)}}{g^{2(m-1)}} = \frac{nnbbf^{2(m+n-1)}}{g^{2(m+n-1)}}$$

Ferner ist

$$Pq - pQ = \frac{maf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin.(m-1)\phi + \frac{(m+n)bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(m+n-1)\phi$$

$$=$$

$$\frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}((m+n)\sin.(m+n-1)\phi - m\cos.n\phi\,.\,\sin.(m-1)\phi)$$

$$=$$

$$\frac{bf^{(m+n-1)}}{g^{m+n-1}}(n\cos.n\phi\sin.(m-1)\phi + (m+n)\sin.n\phi\cos(m-1)\phi)$$

und $PQ + pq =$

$$\frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}((m+n)\cos.(m+n-1)\phi - m\cos.n\phi\,.\,\cos.(m-1)\phi)$$

Oder da $ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$ auch ein Divisor von $ax^{m-1} + bx^{m+n-1}$ ist, so wird

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\cos.(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(m+n-1)\phi = 0$$

und

$$\frac{af^{m-1}}{g^{m-1}}\sin.(m-1)\phi + \frac{bf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(m+n-1)\phi = 0$$

Folglich

$$Q = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(m+n-1)\phi, \text{ und}$$

$$q = \frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(m+n-1)\phi; \text{ oder}$$

$$Q = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\cos.(m-1)\phi; \text{ und}$$

$$q = \frac{-naf^{m-1}}{g^{m-1}}\sin.(m-1)\phi.$$

Hieraus ergiebt sich der gesuchte Bruch

$$\frac{2g^m(f\cos.m\phi - gx\cos.(m-1)\phi)}{naf^{m-1}(ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx)}$$

Diese

Diese Formel folgt aus dem vorhergehenden Exempel, wenn man m negativ nimmt; daher es nicht einmal nöthig gewesen wäre, hieraus einen besondern Fall zu machen.

Drittes Exempel.

Wenn der Nenner des Bruchs $\frac{x^m}{a + bx^n + cx^{2n}}$ den Faktor $ff - 2gfx\cos.\varphi + ggxx$ hat, den einfachen Bruch zu finden, der aus diesen Nenner entspringt.

Wenn $ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$ ein Faktor des Nenners $a + bx^n + cx^{2n}$ ist, so ist, wie wir oben gezeigt haben,

$$a + \frac{bf^n}{g^n}\cos.n\varphi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\cos.2n\varphi = 0$$

und

$$\frac{bf^n}{g^n}\sin.n\varphi + \frac{cf^{2n}}{g^{2n}}\sin.2n\varphi = 0$$

Da also $P = x^m$ und $Q = a + bx^n + cx^{2n}$ ist, so wird $\frac{dQ}{dx} = nbx^{n-1} + 2ncx^{2n-1}$, und folglich

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos.m\varphi; \qquad \mathfrak{p} = \frac{f^m}{g^m}\sin.m\varphi;$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\cos.(n-1)\varphi + \frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\cos.(2n-1)\varphi$$

$$\mathfrak{q} = \frac{nbf^{n-1}}{g^{n-1}}\sin.(n-1)\varphi + \frac{2ncf^{2n-1}}{g^{2n-1}}\sin.(2n-1)\varphi$$

Hiernach wird

$$\mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{q}^2 = \frac{n^2f^{2(n-1)}}{g^{2(n-1)}}\left(bb + \frac{4bcf^n}{g^n}\cos.n\varphi + \frac{4ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

Nun ist aber aus den beyden vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{f^{2n}}{g^{2n}}\left(bb + \frac{2bcf^n}{g^n}\cos.n\phi + \frac{ccf^{2n}}{g^{2n}}\right) = aa;$$

und also

$$\frac{4bcf^n}{g^n}\cos.n\phi = \frac{2g^{2n}aa}{f^{2n}} - 2bb - \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}$$

Braucht man diesen Werth, so wird

$$Q^2 + q^2 = \frac{n^2f^{2n-2}}{g^{2n-2}}\left(\frac{2aag^{2n}}{f^{2n}} - bb + \frac{2ccf^{2n}}{g^{2n}}\right)$$

oder

$$Q^2 + q^2 = \frac{n^2(2aag^{4n} - bbf^{2n}g^{2n} + 2ccf^{4n})}{ffg^{4n-2}}$$

Ferner ist $Pq - pQ =$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\sin.(n-m-1)\phi + \frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\sin.(2n-m-1)\phi$$

$PQ + pq =$

$$\frac{nbf^{m+n-1}}{g^{m+n-1}}\cos.(n-m-1)\phi + \frac{2ncf^{m+2n-1}}{g^{m+2n-1}}\sin.(2n-m-1)\phi$$

Hat man diese Werthe gefunden, so ist der gesuchte einfache Bruch

$$\frac{2fg(Pq - pQ)\sin.\phi + 2g(PQ + pq)(gx - f\cos.\phi)}{(Q^2 + q^2)(ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx)}$$

§. 417.

Es lassen sich aber diese Brüche auf eine leichtere Art ausdrucken, wenn man die Faktoren des Nenners selbst bestimmt. Es sey also der Nenner des gegebenen Bruchs

$$a + bx^n.$$

Setzt man den dreytheiligen Faktor desselben

$$ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$$

so ist nach dem, was wir darüber in der Einleitung gesagt haben,

a +

$$a + \frac{bs^n}{g^n}\cos.n\phi = 0, \text{ und } \frac{bs^n}{g^n}\sin.n\phi = 0.$$

Da also $\sin.n\phi = 0$ ist, so ist entweder $n\phi = (2k - 1)\pi$ oder $n\phi = 2k\pi$; im ersten Falle ist $\cos.n\phi = -1$, im letzten aber $\cos.n\phi = +1$. Sind demnach a und b positive Größen, so hat der erste Fall allein statt, wo denn $a = \frac{bs^n}{g^n}$, und daher

$$f = a^{\frac{1}{n}} \text{ und } g = b^{\frac{1}{n}}$$

wird. Statt dieser Irrational-Größen wollen wir indeß die Buchstaben f und g beybehalten, oder vielmehr $a = f^n$ und $b = g^n$ setzen, so daß die Faktoren der Funktion $f^n + g^n x^n$ zu suchen seyen. Da also $\phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$ ist, wo k jede ganze positive Zahl bedeuten kann, so lange $\frac{2k-1}{n}$ kleiner als eins bleibt; so sind die Faktoren der Funktion $f^n + g^n x^n$ folgende:

$$ff - 2fgx\cos.\frac{\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{3\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{5\pi}{n} + ggxx$$

ꝛc.

Bedeutet aber n eine gerade Zahl, so muß man nicht vergessen, daß der eine Faktor ein zweytheiliger, nemlich $f + gx$ sey, dergleichen hingegen nicht statt findet, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Erstes Exempel.

Den Bruch $\frac{x^m}{f^n + g^n x^n}$ in seine einfachen Brüche aufzulösen.

Da alle dreytheilige Faktoren des Nenners in der Form

$$ff - 2fgx \cos.\frac{(2k-1)\pi}{n} + ggxx$$

enthalten sind, so ist nach dem Vorhergehenden

$$a = f^n,\ b = g^n \text{ und } \phi = \frac{(2k-1)\pi}{n}$$

folglich

$$\sin.(n-m-1)\phi = \sin.(m+1)\phi = \sin.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}$$

und

$$\cos.(n-m-1)\phi = -\cos.(m+1)\phi = -\cos.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}$$

und der einfache Bruch, der aus jenem Faktor entspringt,

$$\frac{2f\sin.\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{(m+1)(2k-1)\pi}{n}\left(gx - f\cos.\frac{(2k-1)}{n}\pi\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos.\frac{(2k-1)}{2}\pi + ggxx\right)}$$

Demnach läßt sich der gegebene Bruch in folgende einfache Brüche auflösen

$$\frac{2f\sin.\frac{\pi}{n}\sin.\frac{(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos.\frac{\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos.\frac{\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{2f\sin.\frac{3\pi}{n}\sin.\frac{3(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{3(m+1)\pi}{n}\left(gx - f\cos.\frac{3\pi}{n}\right)}{nf^{n-m-1}g^m\left(ff - 2fgx\cos.\frac{3\pi}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{2f\sin.\frac{5\pi}{n}\sin.\frac{5(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{5(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{5\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^m(ff - 2fgx\cos.\frac{5\pi}{n} + ggxx)}$$

2c.

Ist also n eine gerade Zahl, so erhält man auf diese Art alle einfache Brüche, ist aber n ungerade, so muß man wegen des Faktors $f + gx$ noch dazu den Bruch

$$\frac{\pm 1}{ng^{n-m-1}g^m(f + gx)}$$

addiren, wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine gerade, und das untere, wenn m eine ungerade Zahl bedeutet. Ist m größer als n, so müssen zu diesen Brüchen auch noch folgende Ganze addirt werden:

$$Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{2c.}$$

so lange die Exponenten positiv bleiben. Dabey ist

$$Ag^n = 1; \qquad \text{folglich } A = \frac{1}{g^n}$$

$$Af^n + Bg^n = 0; \qquad B = -\frac{f^n}{g^{2n}}$$

$$Bf^n + Cg^n = 0; \qquad C = +\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$$

$$Cf^n + Dg^n = 0; \qquad D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$$

2c. 2c.

Zweytes Exempel.

Den Bruch $\frac{1}{x^m(f^n + g^nx^n)}$ in seine einfache Brüche aufzulösen.

Was die Faktoren von $f^n + g^nx^n$ betrifft, so entspringen daraus eben die Brüche, welche wir daraus im vorher=

hergehenden Exempel hergeleitet haben, wenn man nur m negativ nimmt. Wir haben also nur nöthig, die aus dem andern Faktor x^m entspringenden einfachen Brüche aufzusuchen, und dieses geschieht am bequemsten auf folgende Art. Man setze den gegebenen Bruch =

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{N}x^{n-m}}{f^n + g^n x^n}, \text{ so ist}$$

$$\mathfrak{A}f^n = 1; \qquad \text{folglich } \mathfrak{A}\frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{N} = 0; \qquad \mathfrak{N} = -\frac{g^n}{f^n}$$

Ist $n - m$ noch negativ, so muß man auf ähnliche Art verfahren, so daß, wenn m eine nach Belieben große Zahl bedeutet, folgende einfache Brüche entspringen:

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \text{etc.}$$

so lange die Exponenten von x positiv bleiben. Dabey ist

$$\mathfrak{A}f^n = 1; \qquad \text{folglich } \mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$$

$$\mathfrak{A}g^n + \mathfrak{B}f^n = 0; \qquad \mathfrak{B} = -\frac{g^n}{f^{2n}}$$

$$\mathfrak{B}g^n + \mathfrak{C}f^n = 0; \qquad \mathfrak{C} = -\frac{g^{2n}}{f^{3n}}$$

$$\mathfrak{C}g^n + \mathfrak{D}f^n = 0; \qquad \mathfrak{D} = -\frac{g^{3n}}{f^{4n}}$$

$$\text{etc.} \qquad \qquad \text{etc.}$$

Die einfachen Brüche, worin sich der gegebene Bruch auflösen läßt, sind demnach

$$\frac{1}{f^n x^m} - \frac{g^n}{f^{2n}x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n}x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n}x^{m-3n}} + \text{etc.}$$

—

$$\frac{-2fg^m \sin.\frac{\pi}{n} \sin.\frac{(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{\pi}{n})}{n f^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{\pi}{n} + ggxx)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin.\frac{3\pi}{n} \sin.\frac{3(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{3(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{3\pi}{n})}{n f^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{3\pi}{n} + ggxx)}$$

$$\frac{-2fg^m \sin.\frac{5\pi}{n} \sin.\frac{5(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{5(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{5\pi}{n})}{n f^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{5\pi}{n} + ggxx)}$$

Ist n eine ungerade Zahl, so muß wegen des Faktors $f + gx$ hiezu noch der Bruch

$$\frac{\pm g^m}{n f^{n+m-1}(f + gx)}$$

addirt werden, wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine gerade, und das untere, wenn m eine ungerade Zahl ist.

§. 418.

Nun wollen wir auch die Formel $a + bx^n$ für den Fall erwägen, wenn b eine negative Größe ist, und die Funktion

$$f^n - g^n x^n$$

als gegeben betrachten, die allemal den Faktor $f - gx$, und wenn n eine gerade Zahl ist, auch den Faktor $f + gx$ hat. Die übrigen Faktoren sind dreytheilige, und setzt man ihre allgemeine Form =

$$ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$$

so wird $f^n - f^n\cos.n\phi = 0$, und $f^n\sin.n\phi = 0$ oder $\sin.n\phi = 0$ und $\cos.n\phi = 1$. Soll diesen Bedingungen ein Genüge geleistet werden, so muß $n\phi = 2k\pi$ seyn, wenn k jede

jede ganze Zahl bedeutet, und daher $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ genommen werden. Es ist demnach der allgemeine Faktor

$$ff - 2fgx.\cos.\frac{2k\pi}{n} + ggxx$$

und wenn man für 2k alle die gerade Zahlen setzt, die kleiner als n sind, so findet man alle dreytheilige Faktoren. Sie sind

$$ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{6\pi}{n} + ggxx$$

ꝛc.

Erstes Exempel.

Den Bruch $\frac{x^m}{f^n - g^n x^n}$ in seine einfachen Brüche aufzulösen.

Da der Nenner den Faktor $f - gx$ hat, so ergiebt sich daraus ein Bruch von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{f-gx}$, dessen Zähler auf folgende Art gefunden wird. Man setze $x^m = P$ und $f^n - g^n x^n = Q$, so ist $dQ = -ng^n x^{n-1}$, und

$$\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{-ng^n x^{n-1}} = \frac{x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}}$$

wenn man $x = \frac{f}{g}$ annimmt. Also $\mathfrak{A} = \frac{1}{nf^{n-m-1}g^m}$ und folglich der aus dem Faktor $f - gx$ entspringende Bruch

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m(f-gx)}$$

Ist n eine gerade Zahl, so wird auch ein Faktor des Nenners $f+gx$, und setzt man den daher entspringenden Bruch $= \frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$, so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{-gx^m}{ng^nx^{n-1}} = \frac{-x^m}{ng^{n-1}x^{n-1}}$$

wenn man $x = \frac{-f}{g}$ nimmt. Da nun in diesem Falle $n-1$ eine ungerade Zahl ist, so wird $g^{n-1}x^{n-1} = -f^{n-1}$; x^m aber $= \frac{\pm f^m}{g^m}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine gerade, und das untere, wenn es eine ungerade Zahl ist. Und da $\mathfrak{A} = \frac{\pm 1}{nf^{n-m-1}g^m}$ ist, so wird der aus dem Faktor $f+gx$ entspringende einfache Bruch folgender:

$$\frac{\mp 1}{nf^{n-m-1}g^m(f+gx)}$$

Ferner ist die allgemeine Form der dreytheiligen Faktoren

$$ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi}{n} + ggxx$$

und aus der Vergleichung mit dem ersten Exempel §. 416. ergiebt sich

$$a = f^n;\ b = -g^n;\ \text{und}\ \varphi = \frac{2k\pi}{n}.$$

Hieraus fließt

$$\sin.\varphi = 0;\ \cos.n\varphi = 1;\ \text{also}$$

$$\sin.(n-m-1)\varphi = -\sin.(m+1)\varphi = -\sin.\frac{2k(m+1)\pi}{n}$$

und

$$\cos.(n-m-1)\varphi = \cos.(m+1)\varphi = \cos.\frac{2k(m+1)\pi}{n}$$

Den=

Demnach ist der aus dem dreytheiligen Faktor entspringende Bruch

$$\frac{2f\sin.\frac{2k\pi}{n}.\sin\frac{2k(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{2k(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{2k\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^m(ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi}{n} + ggxx)}$$

und die gesuchten einfachen Brüche sind:

$$\frac{1}{nf^{n-m-1}g^m(f - gx)}$$

$$+\frac{2f\sin.\frac{2\pi}{n}.\sin.\frac{2(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{2(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{2\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^m(ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi}{n} + ggxx)}$$

$$+\frac{2f\sin.\frac{4\pi}{n}.\sin.\frac{4(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{4(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{4\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^m(ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi}{n} + ggxx)}$$

$$+\frac{2f\sin.\frac{6\pi}{n}.\sin.\frac{6(m+1)\pi}{n} - 2\cos.\frac{6(m+1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{6\pi}{n})}{nf^{n-m-1}g^m(ff - 2fgx\cos.\frac{6\pi}{n} + ggxx)}$$

etc.

Ist n eine gerade Zahl, so muß man noch den Bruch

$$\frac{\pm 1}{nf^{n-m-1}g^m(f + gx)}$$

setzen, und dabey das obere Zeichen nehmen, wenn m eine gerade, und das untere, wenn m eine ungerade Zahl ist. Ist ferner m nicht kleiner als n, so müssen noch die Ganzen

$$Ax^{m-n} + Bx^{m-2n} + Cx^{m-3n} + Dx^{m-4n} + \text{etc.}$$

so lange die Exponenten nicht negativ werden, dazu kommen, und dabey ist

$-Ag^n = 1;$ oder $A = -\frac{1}{g^n}$

$Af^n - Bg^n = 0;$ $B = -\frac{f^n}{g^{2n}}$

$Bf^n - Cg^n = 0;$ $C = -\frac{f^{2n}}{g^{3n}}$

$Cf^n - Dg^n = 0;$ $D = -\frac{f^{3n}}{g^{4n}}$

2c. 2c.

Zweytes Exempel.

Den Bruch $\frac{1}{x^m(f^n - g^n x^n)}$ in seine einfachen Brüche aufzulösen.

Die Brüche, welche aus dem Faktor $f^n - g^n x^n$ entspringen, sind eben die, welche wir vorhin gefunden haben, wenn man darin nur m negativ nimmt. Wir haben daher bloß auf den andern Faktor x^m zu sehen, und nehmen wir an, daß daraus die Brüche

$$\frac{\mathfrak{A}}{x^m} + \frac{\mathfrak{B}}{x^{m-n}} + \frac{\mathfrak{C}}{x^{m-2n}} + \frac{\mathfrak{D}}{x^{m-3n}} + \text{2c.}$$

bis die Exponenten von x negativ werden, entspringen: so ist

$\mathfrak{A}f^n = 1;$ also $\mathfrak{A} = \frac{1}{f^n}$

$\mathfrak{B}f^n - \mathfrak{A}g^n = 0;$ $\mathfrak{B} = \frac{g^n}{f^{2n}}$

$\mathfrak{C}f^n - \mathfrak{B}g^n = 0;$ $\mathfrak{C} = \frac{g^{2n}}{f^{3n}}$

$\mathfrak{D}f^n - \mathfrak{C}g^n = 0;$ $\mathfrak{D} = \frac{g^{3n}}{f^{4n}}$

2c. 2c.

Die einfachen Brüche, worin der gegebene Bruch sich auflösen läßt, sind demnach

$$\frac{1}{f^n x^m} + \frac{g^n}{f^{2n} x^{m-n}} + \frac{g^{2n}}{f^{3n} x^{m-2n}} + \frac{g^{3n}}{f^{4n} x^{m-3n}} + \text{etc.}$$

$$\frac{g^m}{nf^{n+m-1}(f-gx)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin.\frac{2\pi}{n}.\sin\frac{2(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{2(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{2\pi}{n})}{nf^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi}{n} + ggxx)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin.\frac{4\pi}{n}.\sin\frac{4(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{4(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{4\pi}{n})}{nf^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi}{n} + ggxx)}$$

$$+\frac{2fg^m \sin.\frac{6\pi}{n}.\sin\frac{6(m-1)\pi}{n} - 2g^m \cos.\frac{6(m-1)\pi}{n}(gx - f\cos.\frac{6\pi}{n})}{nf^{n+m-1}(ff - 2fgx\cos.\frac{6\pi}{n} + ggxx)}$$

etc.

wozu aber noch

$$\frac{\mp g^m}{nf^{n+m-1}(f+gx)}$$

addirt werden muß, wenn n eine gerade Zahl ist, im entgegenstehenden Falle aber nicht. Von den beyden Zeichen gilt übrigens das obere —, wenn m eine gerade, und das untere +, wenn m eine ungerade Zahl ist.

§. 419.

Auf diese Art lassen sich also alle Brüche, deren Nenner aus zweyen Gliedern wie $a + bx^n$ bestehen, in einfache Brüche auflösen. Hat aber der Nenner drey Glieder, z. B. $a + bx^n + cx^{2n}$, so kommt es zuvörderst darauf an, ob ob er in zwey reelle Faktoren von der vorigen Form zerfällt werden kann oder nicht. Ist dies, so kann man ihn auch nach der beschriebenen Methode in seine einfachen Brüche auflösen. Denn hat man z. B. den Bruch

$$\frac{x^m}{(f^n + g^n x^n)(f^n + h^n x^n)}$$

so läßt sich derselbe zuvörderst in zwey Brüche von der Form

$$\frac{\alpha x^m}{f^n + g^n x^n} + \frac{\beta x^m}{f^n + h^n x^n}$$

verwandeln, so daß $\alpha f^n + \beta f^n = 1$, und $\alpha h^n + \beta g^n = 0$ ist. Hieraus aber fließt

$$\alpha = \frac{1}{f^n} - \beta = \frac{\beta g^n}{h^n}, \text{ und man hat daher}$$

$$\beta = \frac{h^n}{f^n(h^n - g^n)}, \text{ und } \alpha = \frac{g^n}{f^n(g^n - h^n)}$$

Ist m kleiner als n, so ist die Verwandlung in folgende Brüche

$$\frac{\alpha x^{m-n}}{f^n + g^n x^n} + \frac{\beta x^{m-n}}{f^n + h^n x^n}$$

bequemer, weil dabey $\alpha + \beta = 0$, und $\alpha h^n + \beta g^n = 1$, und folglich

$$\alpha = \frac{1}{h^n - g^n} \text{ und } \beta = \frac{1}{g^n - h^n}$$

wird. Man mag indeß einen Weg einschlagen, was für einen man will, so läßt sich jeder der gefundenen Brüche nach der beschriebenen Methode behandeln, und die Summe der alsdann gefundenen Partial-Brüche ist allemal dem gegebenen Bruche gleich.

§. 420.

Auf ähnliche Art reicht die erwähnte Methode hin, wenn der Nenner aus mehrern Gliedern besteht, z. B. $a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} + ex^{4n} +$ rc., wofern nur derselbe in Faktoren von der Form $f^n \pm g^n x^n$ aufgelöset werden kann. Denn sollte z. B. der Bruch

$$\frac{x^m}{(a - x^n)(b - x^n)(c - x^n)(d - x^n)}$$

in seine einfachen Brüche aufgelöset werden, so würde man denselben zuvörderst in die Brüche

$$\frac{Ax^m}{a - x^n} + \frac{Bx^m}{b - x^n} + \frac{Cx^m}{c - x^n} + \frac{Dx^m}{d - x^n} + \text{rc.}$$

verwandeln können, und dabey würde seyn

$$A = \frac{1}{(b - a)(c - a)(d - a)}$$

$$B = \frac{1}{(a - b)(c - b)(d - b)}$$

$$C = \frac{1}{(a - c)(b - c)(d - c)}$$

rc.

Nach dieser Vorbereitung aber ist es leicht, die aus jedem jener Brüche entspringenden Partial-Brüche zu finden, und ihre dem gegebenen Bruche gleiche Summe zusammenzusetzen.

§. 421.

Hat aber ein Nenner, wie $a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} +$ rc. nicht lauter reelle Faktoren von der Form $f^n + g^n x^n$, so muß man je zwey imaginäre Faktoren zusammen nehmen. Wir wollen also setzen, das Produkt jeder zweyer imaginärer Faktoren sey

$$f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos.\omega + g^{2n} x^{2n}$$

und da dieser Ausdruck keine einfache reelle Faktoren enthält, ferner annehmen, daß die trinomischen Faktoren die allgemeine Form haben,

$$ff - 2fgx\cos.\varphi + ggxx$$

deren Anzahl daher n seyn wird. Setzt man bey diesen Bedingungen $x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\varphi$, so entsteht die Gleichung:

$$1 - 2\cos.\omega\cos.n\varphi + \cos.2n\varphi = 0$$

und nimmt man darauf $x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin.n\varphi$, so ist auch

$$-2\cos.\omega.\sin.n\varphi + \sin.2n\varphi = 0.$$

Diese Gleichung durch $\sin.n\varphi$ dividirt giebt $\cos.n\varphi = \cos.\omega$ und thut zugleich der ersten Gleichung ein Genüge. Es ist demnach $n\varphi = 2k\pi \pm \omega$, wenn k jede ganze Zahl bedeutet, und folglich $\varphi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$. Demnach sind alle Faktoren in der Form

$$ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx$$

enthalten, und dies giebt folgende Faktoren

$$ff - 2fgx\cos.\frac{\omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi + \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi - \omega}{n} + ggxx$$

$$ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi + \omega}{n} + ggxx$$

ꝛc.

Hiervon muß man jedesmal so viel nehmen, als n Einheiten hat.

§. 422.

Soll also der Bruch

$$\frac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos.\omega + g^{2n}x^{2n}}$$

in seine einfachen Brüche aufgelöset werden: so betrachte man, da jeder dreytheilige Faktor des Nenners in der Form

$$ff - 2fgx\cos.\phi + ggxx$$

enthalten ist, wenn man $\phi = \frac{2k\pi \pm \omega}{n}$ nimmt, den Bruch

$$\frac{x^m}{f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos.\omega + g^{2n}x^{2n+1}}$$

der jenem gleich ist, und setze den Zähler $x^m = P$, und den Nenner $f^{2n}x - 2f^n g^n x^{n+1}\cos.\omega + g^{2n}x^{2n+1} = Q$, wodurch man

$$\frac{dQ}{dx} = f^{2n} - 2(n+1)f^n g^n x^n \cos.\omega + (2n+1)g^{2n}x^{2n}$$

bekommt. Setzt man daher

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\cos.n\phi$$

so wird

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos.m\phi,$$

oder

$$\mathfrak{P} = \frac{f^m}{g^m}\cos.\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$$

 und

und

$$Q = f^{2n}(1 - 2(n + 1)\cos.\omega\cos.n\phi + (2n + 1)\cos.2n\phi).$$

Nun ist aber $\cos.n\phi = \cos.\omega$, und also $\cos.2n\phi = 2\cos.\omega^2 - 1$; folglich auch

$$Q = f^{2n}(-2n + 2n\cos.\omega^2) = -2nf^{2n}\sin.\omega^2.$$

Setzt man ferner

$$x^n = \frac{f^n}{g^n}\sin.n\phi,$$

so wird

$$p = \frac{f^m}{g^m}\sin.m\phi = \frac{f^m}{g^m}\sin.\frac{m(2k\pi \pm \omega)}{n}$$

und

$$q = -f^{2n}(2(n + 1)\cos.\omega.\sin.n\phi - (2n + 1)\sin.2n\phi)$$

Da aber $\sin.2n\phi = 2\sin.n\phi.\cos.n\phi = 2\cos.\omega.\sin.n\phi$ ist, so wird auch

$$q = 2nf^{2n}\cos.\omega.\sin.n\phi,$$

und da $n\phi = 2k\pi \pm \omega$ ist, so ist ferner $\sin.n\phi = \pm\sin.\omega$, und

$$q = \pm 2nf^{2n}\sin.\omega.\cos.\omega$$

Hat man diese Werthe gefunden, so ist ferner

$$Q^2 + q^2 = 4n^2f^{4n}\sin.\omega^2$$

$$Pq - pQ = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(\pm\cos.m\phi.\sin.\omega.\cos.\omega + \sin.m\phi.\sin.\omega^2)$$

oder

$$Pq - pQ = \pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin.\omega.\cos.(m\phi \mp \omega)$$

oder

$$Pq - pQ = \pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin.\omega.\cos.\frac{2km\pi \pm (m - n)\omega}{n}$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}(-\mathrm{cf.}\,m\varphi\,\sin.\omega^2 \pm \sin.m\varphi\,\sin.\omega.\mathrm{cf}\omega)$$

oder

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq = \frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin.\omega\,.\,\sin.(m\varphi \mp \omega)$$

oder

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq = \pm\frac{2nf^{m+2n}}{g^m}\sin.\omega\,.\,\sin.\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}$$

Es entspringt folglich aus dem Faktor $ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi\pm\omega}{n} + ggxx$ der einfache Bruch:

$$\frac{\pm f\,.\,\sin.\frac{2k\pi \pm \omega}{n}\cos.\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin.\omega\left(ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx\right)} \pm$$

$$\frac{\sin.\frac{2km\pi \pm (m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos.\frac{2k\pi \pm \omega}{n}\right)}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin.\omega\left(ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx\right)}$$

oder

$$\frac{\pm gx\sin.\frac{2km\pi \pm (m-1)\omega}{n} \pm f\sin.\frac{2k(m-n)\pi \pm (m-n-1)\omega}{n}}{nf^{2n-m}g^{m-1}\sin.\omega\left(ff - 2fgx\cos.\frac{2k\pi \pm \omega}{n} + ggxx\right)}$$

Exem-

Exempel.

Den Bruch $\dfrac{x^{m-1}}{f^{2n} - 2f^n g^n x^n \cos.\omega + g^{2n} x^{2n}}$ in seine einfachen Brüche aufzulösen.

Die gesuchten einfachen Brüche sind nach dem Vorhergehenden

$$\frac{+ f \sin.\frac{\omega}{n} \cos.\frac{(m-n)\omega}{n} + \sin.\frac{(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos.\frac{\omega}{n}\right)}{n f^{2n-m} g^{m-1} \sin.\omega \left(ff - 2fgx\cos.\frac{\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{- f \sin.\frac{2\pi-\omega}{n} \cos.\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n} - \sin.\frac{2m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos.\frac{2\pi-\omega}{n}\right)}{n f^{2n-m} g^{m-1} \sin.\omega \left(ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi-\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{+ f \sin.\frac{2\pi+\omega}{n} \cos.\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n} + \sin.\frac{2m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos.\frac{2\pi+\omega}{n}\right)}{n f^{2n-m} g^{m-1} \sin.\omega \left(ff - 2fgx\cos.\frac{2\pi+\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{- f \sin.\frac{4\pi-\omega}{n} \cos.\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n} - \sin.\frac{4m\pi-(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos.\frac{4\pi-\omega}{n}\right)}{n f^{2n-m} g^{m-1} \sin.\omega \left(ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi-\omega}{n} + ggxx\right)}$$

$$\frac{+ f \sin.\frac{4\pi+\omega}{n} \cos.\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n} + \sin.\frac{4m\pi+(m-n)\omega}{n}\left(gx - f\cos.\frac{4\pi+\omega}{n}\right)}{n f^{2n-m} g^{m-1} \sin.\omega \left(ff - 2fgx\cos.\frac{4\pi+\omega}{n} + ggxx\right)}$$

ꝛc.

so

so weit nemlich, bis man von diesen Brüchen n hat. Ist m größer als 2n — 1, oder eine negative Zahl, so muß man im ersten Falle die Ganzen, und im andern noch überdies die Brüche hinzufügen, welche man nach der vorhin erklärten Methode leicht findet.

Inhalt