Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Siebenzehntes Capitel. Von der Interpolation der Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52934

Siebenzehntes Capitel.

Von der Interpolation der Reihen.

§. 389.

Man sagt, eine Reihe werde interpolirt, wenn die Glieder derselben angegeben werden, die zu gebrochenen oder auch selbst zu irrationalen Anzeigern gehören. Ist daher das allgemeine Glied bekannt, so hat die Interpolation keine Schwierigkeit, da dieses allgemeine Glied bey der Substitution jeder Zahl für x das zugehörige Glied giebt. Ist aber eine Reihe so beschaffen, daß sich das allgemeine Glied derselben auf keine Weise darstellen läßt, so ist diese Interpolation meist mit vieler Schwierigkeit verknüpft, und größtentheils lassen sich die Glieder, die zu den nicht ganzen Anzeigern gehören, bloß durch unendliche Reihen angeben. Da wir also in dem vorhergehenden Capitel die Werthe von solchen Ausdrücken, die sich nicht auf die gewöhnliche Art endlich darstellen lassen, für jede zugehörige Anzeiger bestimmt haben: so ist dadurch der Weg zur vollständigen Betrachtung der Interpolation gebahnt.

§. 390.

Es sey

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \ldots\ldots & & x \\ A & + & B & + & C & + & D & + & \ldots\ldots & + & X \end{array}$$

eine Reihe, deren allgemeines Glied x man kenne, das summatorische Glied S aber unbekannt sey. Man formire daraus eine Reihe, die zum allgemeinen Gliede das summatorische Glied jener Reihe habe, so ist diese neue Reihe

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{(A+B)};\ \overset{3}{(A+B+C)};\ \overset{4}{(A+B+C+D)};\ \overset{5}{(A+B+C+D+E)};$$
$$\text{rc.}$$

und das allgemeine oder dem Anzeiger x zugehörige Glied dieser Reihe ist

$$= A + B + C + D + \ldots + X = S.$$

Da dieses allgemeine Glied nicht entwickelt bekannt ist, so ist die Interpolation der neuen Reihe, wozu es gehört, den vorhin erwähnten Schwierigkeiten unterworfen. Man muß also, um dieselbe zu bewerkstelligen, die Werthe von S aufsuchen, welche durch die Substitution irgend einer nicht ganzen Zahl von x entstehen. Denn wäre x eine ganze Zahl, so würde man den erforderlichen Werth von S ohne Mühe, nemlich durch die Addition so vieler Glieder der Reihe $A + B + C + D +$ rc. finden, als x Einheiten enthielte.

§. 391.

Damit wir also dasjenige, was im vorhergehenden Capitel gelehret worden ist, anwenden können, wollen wir annehmen, x sey eine ganze Zahl, und also der zugehörige Werth $S = A + B + C + D + \ldots + X$ bekannt, und den Werth Σ suchen, in welchen S übergeht, wenn man $x + \omega$ für x setzt, so daß ω jeden Bruch bedeutet. Alsdann ist Σ das Glied der gegebenen zu interpolirenden Reihe, welches zu dem Anzeiger $x + \omega$ gehört, und also die Interpolation der gedachten Reihe leicht. Es sey Z das Glied der Reihe $A, B, C, D, E,$ rc. welches dem Anzeiger $x + \omega$ zugehört, und $Z', Z'', Z''',$ rc. diejenigen, deren Anzeiger

$x +$

$x + \omega + 1$; $x + \omega + 2$; $x + \omega + 3$; ꝛc. sind. Auch wollen wir zuvörderst annehmen, daß die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc. verschwinden. Dies vorausgesetzt, so wird die Reihe

$$\overset{1}{A};\ (A + \overset{2}{B});\ (A + \overset{3}{B} + C);\ (A + \overset{4}{B} + C + D);\ \text{ꝛc.}$$

deren dem Anzeiger x zugehöriges Glied

$$S = A + B + C + D + \ .\ .\ .\ + X$$

ist, interpolirt, wenn man das Glied Σ sucht, dessen Anzeiger $x + \omega$ ist. Nun ist aber nach dem vorhergehenden Capitel

$$\Sigma = S \begin{array}{l} + X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.} \\ - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \text{ꝛc.} \end{array}$$

und so hat man eine unendliche Reihe, die dem gesuchten Gliede Σ gleich ist, und da

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3dx^3} + \text{ꝛc.}$$

auch auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\begin{aligned} \Sigma = S &- \frac{\omega}{dx} d\,.\,(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.}) \\ &- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd\,.\,(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.}) \\ &- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3\,.\,(X' + X'' + X''' + X'''' + \text{ꝛc.}) \\ &\quad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Von diesen beyden Formeln kann man allemal diejenige nehmen, welche die bequemste scheint.

§. 392.

Statt der Reihe A, B, C, D, ꝛc. wollen wir die harmonische Reihe

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \text{ꝛc.}$$

nehmen, deren allgemeines oder x zugehörige Glied

$\frac{1}{a+(x-1)b} = X$ ist. Hieraus sey die Reihe

$$\overset{1}{\frac{1}{a}};\ \overset{2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}\right)};\ \overset{3}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}\right)};\ \overset{4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}\right)}$$

ꝛc.

formirt, deren zu dem Anzeiger x gehörige Glied also

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+3b} + \ldots + \frac{1}{a+(x-1)b}$$

ist. Bedeutet daher Σ das Glied dieser Reihe, welches zu dem Anzeiger $x+\omega$ gehört, so ist wegen $Z = \frac{1}{a+(x+\omega-1)b}$

$$X' = \frac{1}{a+bx}; \qquad Z' = \frac{1}{a+bx+b\omega}$$

$$X'' = \frac{1}{a+b+bx}; \qquad Z'' = \frac{1}{a+b+bx+b\omega}$$

$$X''' = \frac{1}{a+2b+bx}; \qquad Z''' = \frac{1}{a+2b+bx+b\omega}$$

ꝛc. ꝛc.

und hieraus ergiebt sich

$$\Sigma = S + \frac{1}{a+bx} + \frac{1}{a+b+bx} + \frac{1}{a+2b+bx} + \text{ꝛc.}$$

$$- \frac{1}{a+bx+b\omega} - \frac{1}{a+b+bx+b\omega} - \frac{1}{a+2b+bx+b\omega} - \text{ꝛc.}$$

Der andere Ausdruck aber hat folgende Form

$\Sigma =$

$$\Sigma = S + b\omega\left(\frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{1}{(a+b+bx)^2} + \frac{1}{(a+2b+bx)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$- b^2\omega^2\left(\frac{1}{(a+bx)^3} + \frac{1}{(a+b+bx)^3} + \frac{1}{(a+2b+bx)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ b^3\omega^3\left(\frac{1}{(a+bx)^4} + \frac{1}{(a+b+bx)^4} + \frac{1}{(a+2b+bx)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

Erstes Exempel.

Es ist die Reihe:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{(1+\tfrac{1}{2})};\ \overset{3}{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})};\ \overset{4}{(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})}\ \text{ꝛc.}$$

gegeben; man soll die Glieder finden, deren Anzeiger Brüche sind.

Hier ist $a = 1$ und $b = 1$. Setzt man demnach das Glied, welches dem Anzeiger x zugehört,

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ .\ \ .\ \ .\ + \frac{1}{x}$$

und dasjenige, dessen Anzeiger der Bruch $x + \omega$ ist, $= \Sigma$, so ist

$$\Sigma = S + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \frac{1}{3+x} + \frac{1}{4+x} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{1+x+\omega} - \frac{1}{2+x+\omega} - \frac{1}{3+x+\omega} - \frac{1}{4+x+\omega} - \text{ꝛc.}$$

Hat man indeß das Glied gefunden, welches dem gebrochenen Anzeiger ω zugehört, und welches wir $= T$ annehmen wollen: so läßt sich daraus das dem Anzeiger $x + \omega$ zugehörige Glied leicht finden. Denn bedeuten T', T'', T''', ꝛc. die Glieder, deren Anzeiger $1 + \omega$, $2 + \omega$, $3 + \omega$, ꝛc. sind: so ist

$$T' = T + \frac{1}{1+\omega}$$

$$T'' = T + \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega}$$

$$T''' = T = \frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{3+\omega}$$

$$\text{etc.}$$

und man hat also nur nöthig die Glieder zu suchen, welche zu den Anzeigern ω, die kleiner als eins sind, gehören. Zu dem Ende setze man $x = 0$, wo denn zugleich $S = 0$ wird, und das Glied der Reihe T, welches dem gebrochenen Anzeiger ω zugehört, wird sich auf folgende Art ausdrucken lassen:

$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{1+\omega} - \frac{1}{2+\omega} - \frac{1}{3+\omega} - \frac{1}{4+\omega} - \text{etc.}$$

Verwandelt man diese Brüche in unendliche Reihen, so bekommt man den andern Ausdruck:

$$\begin{aligned} T = &+ \omega\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.}\right) \\ &- \omega^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right) \\ &+ \omega^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right) \\ &- \omega^4\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.}\right) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

die sehr bequem ist, um den Werth von T näherungsweise darzustellen.

Man

Man suche demnach das Glied der gegebenen Reihe, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört. Setzt man dasselbe $= T$, so wird

$$T = 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{9} + \text{etc.}$$

oder

$$T = 2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \text{etc.})$$

Der Werth dieser Reihe ist $= 2 - 2l2$, so daß sich das zu dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ gehörige Glied endlich ausdrucken läßt; und es sind folglich die Glieder, welche den Anzeigern $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. zugehören, folgende:

Anzeiger	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Glieder	$2-2l2$;	$2+\frac{2}{3}-2l2$;	$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2l2$;	$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}-2l2$;

etc.

Zweytes Exempel.

Es ist die Reihe:

$$\overset{1}{1} + \overset{2}{(1 + \tfrac{1}{3})}; \; \overset{3}{(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5})}; \; \overset{4}{(1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7})}; \text{ etc.}$$

gegeben; man soll die Glieder finden, deren Anzeiger gebrochene Zahlen sind.

Hier ist $a = 1$; $b = 2$, und setzt man also das dem Anzeiger x zugehörige Glied

$$S = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2x - 1}$$

so wie dasjenige, welches zu dem Anzeiger $x + \omega$ gehört $= \Sigma$: so ist

$$\Sigma = S + \frac{1}{1 + 2x} + \frac{1}{3 + 2x} + \frac{1}{5 + 2x} + \text{etc.}$$

$$- \frac{1}{1 + 2(x + \omega)} - \frac{1}{3 + 2(x + \omega)} - \frac{1}{5 + 2(x + \omega)} - \text{etc.}$$

Da man nun bloß die Glieder zu finden braucht, deren Anzeiger kleiner als eins sind, so sey $x = 0$ und $S = 0$.

Alsdann ist, wenn man das dem Anzeiger ω zugehörige Glied T nennt,

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \text{etc.}$$
$$- \frac{1}{1+2\omega} - \frac{1}{3+2\omega} - \frac{1}{5+2\omega} - \frac{1}{7+2\omega} - \frac{1}{9+2\omega} - \text{etc.}$$

und wenn ω in der Bedeutung einer jeden Zahl genommen wird, so ist T, als das dem Anzeiger ω zugehörige Glied, das allgemeine Glied der gegebenen Reihe, und läßt sich auch auf folgende Art ausdrucken:

$$T = \frac{2\omega}{1(1+2\omega)} + \frac{2\omega}{3(3+2\omega)} + \frac{2\omega}{5(5+2\omega)} + \frac{2\omega}{7(7+2\omega)}$$
$$+ \text{etc.}$$

oder auch so:

$$T = 2\omega\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.}\right)$$
$$- 4\omega^2\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \text{etc.}\right)$$
$$+ 8\omega^3\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.}\right)$$
$$- 16\omega^4\left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + \text{etc.}\right)$$
$$\text{etc.}$$

Nimmt man $\omega = \frac{1}{2}$ an, so wird das Glied, welches zu diesem Anzeiger gehört,

$$T = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \text{etc.} = l2$$

und man hat daher

Anzeiger:	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
Glieder:	$l2$;	$\frac{1}{2} + l2$;	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + l2$;	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + l2$; etc.

Ist $\omega = \frac{1}{4}$, so wird

$$T = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \text{etc.}$$
$$- \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{7} - \tfrac{2}{11} - \tfrac{2}{15} - \text{etc.}$$

oder

oder

$$T = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{rc.} - \tfrac{1}{2}l2 = \frac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}l2.$$

§. 393.

Wenn daher das Glied der allgemeinen Reihe:

$$\frac{1}{a};\quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b}\right);\quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+2b}\right);\ \text{rc.}$$

welches dem Anzeiger $\tfrac{1}{2}$ zugehört, gefunden werden soll, so setze man in den Ausdrücken des vorhergehenden §. $x = 0$ und $\omega = \tfrac{1}{2}$. Hiedurch wird $S = 0$, und das dem Anzeiger $\tfrac{1}{2}$ zugehörige Glied wird

$$\Sigma = \frac{1}{a} - \frac{2}{2a+b} + \frac{1}{a+b} - \frac{2}{2a+3b} + \frac{1}{a+2b} - \frac{2}{2a+5b}$$
$$+ \text{rc.}$$

oder, wenn man die Glieder auf eine gleichförmige Art darstellen will,

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{2a} - \frac{1}{2a+b} + \frac{1}{2a+2b} - \frac{1}{2a+3b} + \frac{1}{2a+4b} - \text{rc.}$$

Da die Glieder dieser Reihe abwechselnde Zeichen haben, so läßt sich der Werth von $\tfrac{1}{2}\Sigma$ nach der oben erklärten Methode der Differenzen durch eine mehr convergirende Reihe ausdrucken. Es ist nemlich die Reihe der Differenzen:

$$\frac{b}{2a(2a+b)};\quad \frac{b}{(2a+b)(2a+2b)};\quad \frac{b}{(2a+2b)(2a+3b)};\ \text{rc.}$$

$$\frac{2bb}{2a(2a+b)(2a+2b)};\quad \frac{2bb}{(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)};\ \text{rc.}$$

$$\frac{6b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)};\ \text{rc.}$$

rc.

Hieraus läßt sich

$\tfrac{1}{2}\Sigma =$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4a} + \frac{1\,.\,b}{8a(2a+b)} + \frac{1\,.\,2bb}{16a(2a+b)(2a+2b)}$$
$$+ \frac{1\,.\,2\,.\,3b^3}{32a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \text{rc.}$$

folgern, und man hat also

$$\Sigma = \frac{1}{2a} + \frac{\frac{1}{2}b}{2a(2a+b)} + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}bb}{2a(2a+b)(2a+2b)}$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}b^3}{2a(2a+b)(2a+2b)(2a+3b)} + \text{rc.}$$

Diese Reihe convergirt sehr stark, und giebt den Werth des Gliedes Σ Näherungsweise ohne viele Mühe.

§. 394.

Verschwinden überhaupt die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, E, rc., und ist das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $= Z$: so nenne man die folgenden Glieder, deren Anzeiger $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, rc. sind, Z', Z'', Z''', $Z^{\prime v}$, rc. Setzt man alsdann in den §. 391. gefundenen Formeln $x = 0$, so daß $S = 0$, $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$, rc. wird: so ist, wenn man die Reihe

$$\overset{1}{A},\ (A \overset{2}{+} B),\ (A + \overset{3}{B} + C),\ (A + B \overset{4}{+} C + D),\ \text{rc.}$$

formirt, und das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z'''')$$
$$+ \text{rc.}$$

und aus diesem Ausdrucke lassen sich alle Zwischenglieder finden. Es reicht aber zur Interpolation hin, die Glieder zu haben, die den Anzeigern ω, welche kleiner als eins sind, zugehören. Ist nemlich das Glied Σ, welches einem solchen Anzeiger ω zugehört, gefunden, und werden diejenigen,

gen, deren Anzeiger $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, ꝛc. sind, Σ', Σ'', Σ''', ꝛc. genennt, so ist

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$

ꝛc.

Erstes Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{(1 + \tfrac{1}{4})};\ \overset{3}{(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9})};\ \overset{4}{(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16})};\ \text{ꝛc.}$$

zu interpoliren.

Es sey Σ das Glied dieser Reihe, welches dem Anzeiger ω zugehört: so ist, da die Reihe aus folgender

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} + \text{ꝛc.}$$

durchs Summiren formirt worden, und das ω zugehörige Glied dieser Reihe $= \frac{1}{\omega^2}$ ist,

$$Z = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^2} - \frac{1}{(2+\omega)^2} - \frac{1}{(3+\omega)^2} - \frac{1}{(4+\omega)^2} - \text{ꝛc.}$$

Soll also das Glied der gegebenen Reihe gesucht werden, dessen Anzeiger $= \frac{1}{2}$ ist, so muß man $\omega = \frac{1}{2}$ nehmen. Dadurch bekommt man

$$\Sigma = 1 - \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{4}{25} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{4}{49} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$\Sigma = 4(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} - \tfrac{1}{49} + \text{ꝛc.})$$

Da also $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^2}{12}$ ist, so hat man

$$\Sigma = 4(1 - \frac{\pi\pi}{12}) = 4 - \tfrac{1}{3}\pi^2.$$

und

und dies ist das Glied, welches zu dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ gehört. Es gehören demnach zu den

Anzeigern $\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{5}{2}$ $\qquad$ ꝛc.

die Glieder $4 - \frac{1}{3}\pi^2$; $\frac{4}{1} + \frac{4}{9} - \frac{1}{3}\pi^2$; $\frac{4}{1} + \frac{4}{9} + \frac{4}{25} - \frac{1}{3}\pi^2$; ꝛc.

Zweytes Exempel.

Die Reihe:

$$\frac{1}{1};\ (1 \overset{2}{+} \tfrac{1}{9});\ (1 + \overset{3}{\tfrac{1}{9}} + \tfrac{1}{25});\ (1 + \tfrac{1}{9} \overset{4}{+} \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49});\ \text{ꝛc.}$$

zu interpoliren.

Es sey Σ das Glied, welches dem allgemeinen Anzeiger ω zugehört. Da die Reihe aus folgender

$$1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{81} + \text{ꝛc.}$$

formirt, und das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $Z = \frac{1}{(2\omega - 1)^2}$ ist: so wird

$$Z' = \frac{1}{(2\omega + 1)^2};\ Z'' = \frac{1}{(2\omega + 3)^2};\ Z''' = \frac{1}{(2\omega + 5)^2};$$

ꝛc.

und man hat daher

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{(1+2\omega)^2} - \frac{1}{(3+2\omega)^2} - \frac{1}{(5+2\omega)^2} - \frac{1}{(7+2\omega)^2} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man $\omega = \frac{1}{2}$, um das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, zu bekommen, so wird dieses Glied

$$\Sigma = 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{36} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{12}$$

und dadurch lassen sich die zwischen jede zwey Glieder der gegebenen Reihe fallende Mittelglieder auf folgende Art ausdrucken:

Anzei-

Anzeiger $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{7}{2}$

Glieder $\frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{\pi\pi}{12}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{\pi\pi}{12}$ ꝛc.

Drittes Exempel.

Die Reihe:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1; & \left(1 + \frac{1}{2^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right); \text{ ꝛc.} \end{array}$$

zu interpoliren.

Es sey wie vorhin Σ das dem Anzeiger ω zugehörige Glied, so ist

$$Z = \frac{1}{\omega^n};\ Z' = \frac{1}{(1+\omega)^n};\ Z'' = \frac{1}{(2+\omega)^n};\ Z''' = \frac{1}{(3+\omega)^n} \text{ ꝛc.}$$

und daher

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{(1+\omega)^n} - \frac{1}{(2+\omega)^n} - \frac{1}{(3+\omega)^n} - \frac{1}{(4+\omega)^n} - \text{ꝛc.}$$

Will man demnach das Glied haben, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, so ist dasselbe

$$= 1 - \frac{2^n}{3^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{2^n}{5^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{2^n}{7^n} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$= 2^n\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \text{ꝛc.}\right)$$

Setzt man demnach

$$\mathfrak{N} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{5}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \text{ꝛc.}$$

so

so ist das dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied $= 2^n(1 - \mathfrak{N})$, und es gehören also zu den

Anzeigern $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \frac{5}{2}$

die Glieder $2^n - 2^n\mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} - 2^n\mathfrak{N}$; $2^n + \frac{2^n}{3^n} + \frac{2^n}{5^n} - 2^n\mathfrak{N}$; rc.

Viertes Exempel.

Die Reihe:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1; & \left(1 + \frac{1}{3^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right); & \left(1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}\right); \text{ rc.} \end{array}$$

zu interpoliren.

Es sey Σ das Glied, welches dem allgemeinen Anzeiger ω zugehört. Da $Z = \frac{1}{(2\omega - 1)^n}$ ist, so wird

$$Z' = \frac{1}{(2\omega + 1)^n};\ Z'' = \frac{1}{(2\omega + 3)^n};\ Z''' = \frac{1}{(2\omega + 5)^n};\text{ rc.}$$

und

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{ rc.}$$
$$- \frac{1}{(1 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(3 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(5 + 2\omega)^n} - \frac{1}{(7 + 2\omega)^n} - \text{ rc.}$$

Setzt man $\omega = \frac{1}{2}$, so bekommt man das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört,

$$= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \text{ rc.} = \mathfrak{N}$$

und dadurch werden die zwischen jede zwey Glieder der gegebenen Reihe fallende Mittelglieder folgende:

Anzeiger $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad \frac{5}{2}$

Glieder $\mathfrak{N}$; $\frac{1}{2^n} + \mathfrak{N}$; $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \mathfrak{N}$; rc.

§. 395.

§. 395.

Nun wollen wir annehmen, daß die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc., durch deren Summation man die zu interpolirende Reihe findet, nicht verschwinden, sondern so beschaffen seyen, daß ihre Differenzen = 0 werden. Dabey soll X das Glied dieser Reihe seyn, welches dem Anzeiger x, so wie Z dasjenige, welches dem Anzeiger $x + \omega$ zugehört, und X', X'', X''', ꝛc. die auf X, so wie Z', Z'', Z''', ꝛc. die auf Z folgenden Glieder bedeuten. Dies vorausgesetzt sey die zu interpolirende Reihe:

$$\overset{1}{A};\ (A \overset{2}{+} B);\ (A + \overset{3}{B} + C);\ (A + B \overset{4}{+} C + D);\ \text{ꝛc.}$$

dabey S = dem zu dem Anzeiger x, und Σ = dem zu dem Anzeiger $x + \omega$ gehörigen Gliede; so ist nach dem vorhergehenden Capitel

$$\begin{aligned} \Sigma = S &+ X' + X'' + X''' + \text{ꝛc.} \\ &- Z' - Z'' - Z''' - \text{ꝛc.} \\ + \omega X' + \omega &\left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X^{\prime v} + \text{ꝛc.} \\ - X' - X'' - X''' - \text{ꝛc.} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Da es indeß hinlänglich ist, die Glieder gefunden zu haben, welche den Anzeigern zugehören, die kleiner als eins sind: so sey $x = 0$, wodurch $S = 0$, $X' = A$, $X'' = B$, ꝛc. wird. Alsdann ist das Glied, welches dem Anzeiger ω zugehört,

$$\begin{aligned} \Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + D - Z^{\prime v}) + \text{ꝛc.} \\ \omega A + \omega((B - A) + (C - B) + (D - C) + (E - D) + \text{ꝛc.}) \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Differenzen auf die bekannte Art, so daß man $\Delta A = B - A$; $\Delta B = C - B$, ꝛc. nimmt: so bekommt man den Werth von Σ in folgendem Ausdrucke:

$$\begin{aligned} \Sigma = (A - Z') + (B - Z'') + (C - Z''') + (D - Z^{\prime v}) + \text{ꝛc.} \\ + \omega(A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \text{ꝛc.}) \end{aligned}$$

§. 396.

Findet aber der Fall statt, daß weder die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc., durch deren Summation man die zu interpolirende Reihe erhält, noch auch ihre ersten Differenzen verschwinden: so müssen dem Ausdrucke für Σ noch mehr Reihen zugefügt werden, so viel nemlich, bis man zu verschwindenden Differenzen gelangt. Es sey nemlich wieder wie vorhin das dem Anzeiger x zugehörige Glied $= X$, und die darauf folgenden X', X'', X''', ꝛc. so wie das dem Anzeiger $x + \omega$ zugehörige $= Z$, und die darauf folgenden Z', Z'', Z''', ꝛc. Ferner sey die Reihe

$$\overset{1}{A};\ (A + \overset{2}{B});\ (A + \overset{3}{B} + C);\ (A + B \overset{4}{+} C + D);\ \text{ꝛc.}$$

zu interpoliren gegeben; das zu dem Anzeiger x gehörige Glied derselben

$$\Sigma = A + B + C + D + \ldots\ldots + X$$

und dasjenige, welches dem Anzeiger $x + \omega$ gehört, $= \Sigma$, so daß

den Anzeigern	diese Glieder zukommen
$x + \omega + 1$	$\Sigma' = \Sigma + Z'$
$x + \omega + 2$	$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$
$x + \omega + 3$	$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$
ꝛc.	ꝛc.

Druckt man bey diesen Voraussetzungen die Differenzen auf die Art aus, daß man

$$\Delta X' = X'' - X';\ \Delta X'' = X''' - X'';\ \Delta X''' = X'^{v} - X''';\ \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^2 X' = \Delta X'' - \Delta X';\ \Delta^2 X'' = \Delta X''' - \Delta X'';$$
$$\Delta^2 X''' = \Delta X'^{v} - \Delta X''';\ \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^3 X' = \Delta^2 X'' - \Delta^2 X';\ \Delta^3 X'' = \Delta^2 X''' - \Delta^2 X'';$$
$$\Delta^3 X''' = \Delta^2 X'^{v} - \Delta^2 X''';\ \text{ꝛc.}$$

setzt:

setzt: so läßt sich nach §. 377. das Glied Σ auf folgende Art darstellen:

$$\begin{aligned}\Sigma = S \quad . \quad & + X' + X'' + X''' + X'''' + \text{etc.}\\ & - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \text{etc.}\\ & + \omega(X' + \Delta X' + \Delta X'' + \Delta X''' + \text{etc.})\\ & + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}(\Delta X' + \Delta^2 X' + \Delta^2 X'' + \Delta^2 X''' + \text{etc.})\\ & + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}(\Delta^2 X' + \Delta^3 X' + \Delta^3 X'' + \Delta^3 X''' + \text{etc.})\\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

§. 397.

Es ist, wie wir bereits angemerkt haben, genug, wenn man in der Fortsetzung dieser Reihe so weit fortgeht, bis man zu verschwindenden Differenzen gelangt. Wollte man dieselbe ins Unendliche, oder wenigstens so weit fortsetzen, bis die Differenzen der endlichen Glieder verschwinden: so würde sich, da

$$Z' = X' + \omega\Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\Delta^2 X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}\Delta^3 X' + \text{etc.}$$

ist, der ganze Ausdruck in folgenden zusammenziehen lassen:

$$\Sigma = S + \omega X' + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\Delta X' + \frac{\omega(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.3}\Delta^2 X' + \text{etc.}$$

Dieser Ausdruck enthält zugleich das summatorische Glied der Reihe $A + B + C + D +$ etc.; aber wenn dieses bekannt wäre, so hätte die Interpolation keine Schwierigkeit. Man kann indeß auch diese Formel brauchen, die, wenn sie irgendwo abbricht, das einzuschaltende Glied in einem endlichen und algebraischen Ausdrucke giebt; ist dies nicht, so verdient die andere, wobey auf die unendlichsten Glieder der Glieder Rücksicht genommen wurde, den Vorzug.

Setzt man $x = 0$, so daß Σ das Glied bedeutet, welches dem Anzeiger ω zugehört, so wird darnach, da $S = 0$ ist,

$$\begin{aligned}
\Sigma = \quad & + A + B + C + D + \text{ꝛc.} \\
& - Z' - Z'' - Z''' - Z'''' - \text{ꝛc.} \\
& + \omega(A + \Delta A + \Delta B + \Delta C + \Delta D + \text{ꝛc.}) \\
& + \frac{\omega(\omega - 1)}{1 \,.\, 2}(\Delta A + \Delta^2 A + \Delta^2 B + \Delta^2 C + \Delta^2 D + \text{ꝛc.}) \\
& + \frac{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(\Delta^2 A + \Delta^3 A + \Delta^3 B + \Delta^3 C + \Delta^3 D + \text{ꝛc.}) \\
& \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$\omega = \alpha; \quad \frac{\omega(\omega - 1)}{1 \,.\, 2} = \beta; \quad \frac{\omega(\omega - 1)(\omega - 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = \gamma; \quad \text{ꝛc.}$$

setzt,

$$\begin{aligned}
\Sigma = \ & \alpha A + \beta \Delta A + \gamma \Delta^2 A + \delta \Delta^3 A + \text{ꝛc.} \\
& + A + \alpha \Delta A + \beta \Delta^2 A + \gamma \Delta^3 A + \text{ꝛc.} - Z' \ \text{ꝛc.} \\
& + B + \alpha \Delta B + \beta \Delta^2 B + \gamma \Delta^3 B + \text{ꝛc.} - Z'' \ \text{ꝛc.} \\
& + C + \alpha \Delta C + \beta \Delta^3 C + \gamma \Delta^3 C + \text{ꝛc.} - Z''' \ \text{ꝛc.} \\
& \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Die Anzahl der horizontal fortlaufenden Reihen ist unendlich, aber eine jede von ihnen besteht aus einer endlichen Menge von Gliedern.

Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{\tfrac{1}{2}}; \quad \overset{2}{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3})}; \quad \overset{3}{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4})}; \quad \overset{4}{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{4} + \tfrac{4}{5})}; \ \text{ꝛc.}$$

zu interpoliren.

Es sey Σ das Glied dieser Reihe, welches dem Anzeiger ω zugehört. Da die Reihe aus der Summation der Reihe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ꝛc. entspringt, so ist $Z = \frac{\omega}{\omega + 1}$, und da

die

die unendlichsten Glieder derselben schon verschwindende erste Differenzen haben, so brauchen auch bloß die ersten Differenzen genommen zu werden. Nun ist

$$A = \tfrac{1}{2};\ B = \tfrac{2}{3};\ C = \tfrac{3}{4};\ D = \tfrac{4}{5};\ \text{rc.}$$

und also

$$\Delta A = \frac{1}{2\cdot 3};\ \Delta B = \frac{1}{3\cdot 4};\ \Delta C = \frac{1}{4\cdot 5};\ \text{rc.}$$

Folglich hat man

$$\begin{aligned}\Sigma = \frac{\omega}{2} &+ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \text{rc.}\\ &+ \frac{\omega}{2\cdot 3} + \frac{\omega}{3\cdot 4} + \frac{\omega}{4\cdot 5} + \frac{\omega}{5\cdot 6} + \text{rc.}\\ &- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \text{rc.}\end{aligned}$$

oder, da $\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{2\cdot 3} + \frac{\omega}{3\cdot 4} + \frac{\omega}{4\cdot 5} + \text{rc.} = \omega$ ist,

$$\begin{aligned}\Sigma = \omega &+ \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \text{rc.}\\ &- \frac{(\omega+1)}{\omega+2} - \frac{(\omega+2)}{\omega+3} - \frac{(\omega+3)}{\omega+4} - \frac{(\omega+4)}{\omega+5} - \text{rc.}\end{aligned}$$

Sucht man demnach das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, so ist dasselbe

$$\Sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{5}{7} + \frac{3}{4} - \frac{7}{9} + \frac{4}{5} - \frac{9}{11} + \text{rc.}$$

oder

$$\Sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{3\cdot 7} - \frac{1}{4\cdot 9} - \frac{1}{5\cdot 11} - \frac{1}{6\cdot 13} - \text{rc.}$$

und also

$$\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 5} - \frac{1}{6\cdot 7} - \frac{1}{8\cdot 9} - \frac{1}{10\cdot 11} - \frac{1}{12\cdot 13} - \text{rc.}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}z = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \text{ꝛc.}$$
$$+ \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{ꝛc.}$$

Da also $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{ꝛc.} = l2$ ist, so ist

$$\tfrac{1}{2}z = l2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \text{ꝛc.} = l2 - \frac{7}{12}$$

und folglich

$$z = 2l2 - \frac{7}{6}.$$

§. 371.

Um nun zu der Interpolation der Reihen fortzugehen, deren Glieder Produkte aus Faktoren sind, so sey die allgemeine Reihe

$$\overset{1}{A};\ \overset{2}{AB};\ \overset{3}{ABC};\ \overset{4}{ABCD};\ \overset{5}{ABCDE};\ \text{ꝛc.}$$

gegeben, deren dem Anzeiger ω zugehöriges Glied wir wieder $= z$ setzen wollen. Alsdann ist lz das dem Anzeiger ω zugehörige Glied in dieser Reihe

$$\overset{1}{lA};\ \overset{2}{(lA + lB)};\ \overset{3}{(lA + lB + lC)};\ \overset{4}{(lA + lB + lC + lD)};\ \text{ꝛc.}$$

Nimmt man also an, daß die unendlichsten Glieder dieser Reihe verschwinden, und setzt man dabey das zu dem Anzeiger ω gehörige Glied Z, so wie die darauf folgenden zu den Anzeigern $\omega + 1$; $\omega + 2$; $\omega + 3$; ꝛc. gehörigen Glieder Z', Z'', Z''', ꝛc. so ist nach dem Obigen

$$lz = \begin{matrix} + lA & + lB & + lC & + lD & + \text{ꝛc.} \\ - lZ' & - lZ'' & - lZ''' & - lZ'''' & - \text{ꝛc.} \end{matrix}$$

und

und geht man hiervon zu den Zahlen zurück, so wird

$$\Sigma = \frac{A}{Z} \cdot \frac{B}{Z''} \cdot \frac{C}{Z'''} \cdot \frac{D}{Z''''} \cdot \text{ꝛc.}$$

§. 399.

Verschwinden aber die Logarithmen der unendlichsten Glieder nicht, sondern erst ihre Differenzen, so ist, wie wir gesehen haben,

$$\begin{aligned} l\Sigma = & + lA + lB + lC + \text{ꝛc.} \\ & - lZ' - lZ'' - lZ''' - \text{ꝛc.} \\ & + \omega lA + \omega\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + \text{ꝛc.}\right) \end{aligned}$$

und also, wenn man zu den Zahlen zurückkehrt,

$$\Sigma = A^{\omega} \cdot \frac{A^{1-\omega}B^{\omega}}{Z'} \cdot \frac{B^{1-\omega}C^{\omega}}{Z''} \cdot \frac{C^{1-\omega}D^{\omega}}{Z'''} \cdot \frac{D^{1-\omega}E^{\omega}}{Z''''} \text{ ꝛc.}$$

Verschwinden aber erst die zweyten Differenzen jener Logarithmen, so wird

$$\begin{aligned} l\Sigma = & \quad lA + lB + lC + lD + \text{ꝛc.} \\ & - lZ' - lZ'' - lZ''' - lZ'''' - \text{ꝛc.} \\ & + \omega\left(lA + l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{ꝛc.}\right. \\ & + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left(l\frac{B}{A} + l\frac{AC}{B^2} + l\frac{BD}{C^2} + l\frac{CE}{D^2} + l\frac{DF}{E^2} + \text{ꝛc.}\right. \end{aligned}$$

und hieraus erhält man

$$\Sigma = A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1}} B^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}} \cdot \frac{A^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} B^{\omega(2-\omega)} C^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}} C^{\omega(2-\omega)} D^{\frac{\omega(\omega-1)}{1.2}}}{Z''}$$

ꝛc.

 wofür

wofür man, wenn $\omega < 1$ ist, den bequemern Ausdruck

$$\Sigma = \frac{A^{\frac{\omega(3-\omega)}{1.2}}}{B^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}}} \cdot \frac{A^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}} B^{\omega(2-\omega)}}{C^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} Z'} \cdot \frac{B^{\frac{(1-\omega)(2-\omega)}{1.2}} C^{\omega(2-\omega)}}{D^{\frac{\omega(1-\omega)}{1.2}} Z''}$$

$$\text{ꝛc.}$$

nehmen kann.

§. 400.

Wir wollen dieses auf die Interpolation der Reihe

$$\overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+c)}{b(b+c)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+c)(a+2c)}{b(b+c)(b+2c)}};\ \overset{4}{\frac{a(a+c)(a+2c)(a+3c)}{b(b+c)(b+2c)(b+3c)}};\ \text{ꝛc.}$$

anwenden, deren Faktoren aus der Reihe

$$\overset{1}{\frac{a}{b}};\ \overset{2}{\frac{a+c}{b+c}};\ \overset{3}{\frac{a+2c}{b+2c}};\ \overset{4}{\frac{a+3c}{b+3c}};\ \text{ꝛc.}$$

genommen sind, wovon die Logarithmen der unendlichsten Glieder verschwinden. Es ist also

$$Z = \frac{a - c + c\omega}{b - c + c\omega};\ Z' = \frac{a + c\omega}{b + c\omega};\ \text{ꝛc.}$$

und wenn das Glied, welches dem Anzeiger ω in jener Reihe zugehört, Σ genannt wird, so ist nach §. 398.

$$\Sigma = \frac{a(b+c\omega)}{b(a+c\omega)} \cdot \frac{(a+c)}{(b+c)} \cdot \frac{(b+c+c\omega)}{(a+c+c\omega)} \cdot \frac{(a+2c)(b+2c+c\omega)}{(b+2c)(b+2c+c\omega)} . \text{ꝛc.}$$

Will man demnach das Glied haben, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, so ist, wenn man $\omega = \frac{1}{2}$ annimmt,

$$\Sigma = \frac{a(2b+c)}{b(2a+c)} \cdot \frac{(a+c)(2b+3c)}{(b+c)(2a+3c)} \cdot \frac{(a+2c)(2b+5c)}{(b+2c)(2a+5c)} . \text{ꝛc.}$$

Exem-

Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{\frac{1}{2}};\ \overset{2}{\frac{1.3}{2.4}};\ \overset{3}{\frac{1.3.5}{2.4.6}};\ \overset{4}{\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}};\ \overset{5}{\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}};\ \text{rc.}$$

zu interpoliren.

Da hier $a = 1$, $b = 2$ und $c = 2$ ist, so wird, wenn man das Glied, welches dem allgemeinen Anzeiger ω zugehört, $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = \frac{1(2+2\omega)}{2(1+2\omega)} \cdot \frac{3(4+2\omega)}{4(3+2\omega)} \cdot \frac{5(6+2\omega)}{6(5+2\omega)} \cdot \frac{7(8+2\omega)}{8(7+2\omega)} \cdot \text{rc.}$$

Nennt man demnach die Glieder, welche den Anzeigern $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$, rc. zugehören, Σ', Σ'', Σ''', rc., so ist

$$\Sigma' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega}\Sigma$$

$$\Sigma'' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega}\Sigma$$

$$\Sigma''' = \frac{1+2\omega}{2+2\omega} \cdot \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \cdot \frac{5+2\omega}{6+2\omega}\Sigma$$

rc.

Verlangt man demnach das Glied, dessen Anzeiger $\frac{1}{2}$ ist, so erhält man dafür, wenn man $\omega = \frac{1}{2}$ setzt,

$$\Sigma = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \frac{9.11}{10.10} \cdot \text{rc.}$$

Nun haben wir oben gezeigt, daß, wenn π den halben Umkreis eines Zirkels bedeutet, dessen Halbmesser $= 1$ ist

$$\pi = 2 \cdot \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \text{rc.}$$

sey, und es lassen sich daher die Zwischenglieder, die zu den Anzeigern $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, rc. gehören, auf folgende Art ausdrucken:

$$\begin{array}{lcccc} \text{Anzeiger} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \text{Glieder} & \frac{2}{\pi}; & \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\pi}; & \frac{2\cdot4}{3\cdot5}\cdot\frac{2}{\pi}; & \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}\cdot\frac{2}{\pi} \text{ rc.} \end{array}$$

Eben diese Interpolation hat Wallis in seiner **Arithmetica infinitorum** gefunden.

§. 401.

Nun wollen wir die Reihe

$$\overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};\ \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)};\ \text{rc.}$$

betrachten, deren Faktoren die arithmetische Progression

$$a,\ (a+b),\ (a+2b),\ (a+3b),\ (a+4b)$$

bilden, und deren unendlichste Glieder so beschaffen sind, daß die Differenzen ihrer Logarithmen verschwinden. Da also

$$Z = a - b + b\omega, \text{ und}$$

$$Z' = a + b\omega;\ Z'' = a + b + b\omega;\ Z''' = a + 2b + b\omega;\ \text{rc.}$$

ist: so wird, wenn Σ das Glied der gegebenen Reihe bedeutet, dessen Anzeiger $= \omega$ ist,

$$\Sigma =$$

$$a^{\omega}\cdot\frac{a^{1-\omega}(a+b)^{\omega}}{a+b\omega}\cdot\frac{(a+b)^{1-\omega}(a+2b)^{\omega}}{a+b+b\omega}\cdot\frac{(a+2b)^{1-\omega}(a+3b)^{\omega}}{a+2b+b\omega}$$

rc.

Hat man diesen Werth für den Fall gefunden, wenn ω eine Zahl bedeutet, die kleiner ist als eins, so lassen sich die Glieder, welche den Anzeigern $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, rc. zugehören, auf folgende Art ausdrucken:

$$\Sigma' = (a + b\omega)\Sigma$$

$$\Sigma'' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)\Sigma$$

$$\Sigma''' = (a + b\omega)(a + b + b\omega)(a + 2b + b\omega)\Sigma$$

rc.

Ver-

Verlangt man demnach das Glied, dessen Anzeiger $\frac{1}{2}$ ist, so erhält man, wenn man $\omega = \frac{1}{2}$ setzt

$$\Sigma = a^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a^{\frac{1}{2}}(a+b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{1}{2}b} \cdot \frac{(a+b)^{\frac{1}{2}}(a+2b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{3}{2}b} \cdot \frac{(a+2b)^{\frac{1}{2}}(a+3b)^{\frac{1}{2}}}{a+\frac{5}{2}b}$$

$$\text{rc.}$$

und folglich, wenn man die Quadrate nimmt,

$$\Sigma^2 = a \cdot \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \frac{(a+2b)(a+3b)}{(a+\frac{5}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)}$$

$$\text{rc.}$$

§. 402.

Setzt man in der §. 400. untersuchten Reihe

$$\overset{1}{\frac{f}{g}};\ \overset{2}{\frac{f(f+h)}{g(g+h)}};\ \overset{3}{\frac{f(f+h)(f+2h)}{g(g+h)(g+2h)}};\ \overset{4}{\frac{f(f+h)(f+2h)(f+3h)}{g(g+h)(g+2h)(g+3h)}} \text{ rc.}$$

das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört $= \Theta$: so ist

$$\Theta = \frac{f(g+\frac{1}{2}h)}{g(f+\frac{1}{2}h)} \cdot \frac{(f+h)(g+\frac{3}{2}h)}{(g+h)(f+\frac{3}{2}h)} \cdot \frac{(f+2h)(g+\frac{5}{2}h)}{(g+2h)(f+\frac{5}{2}h)} \text{ rc.}$$

Setzt man nun $f = a$; $g = a + \frac{1}{2}b$, und $h = b$, so wird

$$\Theta = \frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{1}{2}b)} \cdot \frac{(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)} \cdot \text{ rc.}$$

folglich $\Sigma^2 = a\Theta$, und $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$. Wenn daher das Glied der Reihe

$$\overset{1}{a};\ \overset{2}{a(a+b)};\ \overset{3}{a(a+b)(a+2b)};\ \overset{4}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)} \text{ rc.}$$

welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, $= \Sigma$, und das Glied der Reihe

$$\overset{1}{\frac{a}{a+\frac{1}{2}b}};\ \overset{2}{\frac{a(a+b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)}};\ \overset{3}{\frac{a(a+b)(a+2b)}{(a+\frac{1}{2}b)(a+\frac{3}{2}b)(a+\frac{5}{2}b)}} \text{ rc.}$$

dessen Anzeiger ebenfalls $\frac{1}{2}$ ist, $= \Theta$ gesetzt wird: so ist $\Sigma = \sqrt{a\Theta}$.

Da

Da also hier das Glied der Reihe der bloßen Zähler, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, $= \Sigma$ ist, so wird, wenn man das zu eben dem Anzeiger in der Reihe der Nenner zugehörige Glied $= \Lambda$ setzt, $\Theta = \frac{\Sigma}{\Lambda}$. Nun ist $\Theta = \frac{\Sigma^2}{a}$. Folglich wird $\Sigma = \frac{a}{\Lambda}$, oder $\Sigma\Lambda = a$; und durch diese Lehrsätze erhält die Interpolation dieser Art Reihen nicht wenig Licht.

Erstes Exempel.

Die Reihe:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1, & 1\,.\,2, & 1\,.\,2\,.\,3, & 1\,.\,2\,.\,3\,.\,4, & \text{etc.} \end{array}$$

zu interpoliren.

Da hier $a = 1$ und $b = 1$ ist, so wird, wenn man das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $= \Sigma$ setzt

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega}\,.\,2^{\omega}}{1+\omega}\,.\,\frac{2^{1-\omega}\,.\,3^{\omega}}{2+\omega}\,.\,\frac{3^{1-\omega}\,.\,4^{\omega}}{3+\omega}\,.\,\frac{4^{1-\omega}\,.\,5^{\omega}}{4+\omega}\,.\,\text{etc.}$$

Man kann aber hier für ω allemal einen Bruch annehmen, der kleiner als eins ist, und gleichwohl die Interpolation durch die ganze Reihe verrichten. Denn bedeuten Σ', Σ'', Σ''', etc. die Glieder, welche den Anzeigern $1+\omega$, $2+\omega$, $3+\omega$, etc. zugehören, so wird

$$\Sigma' = (1+\omega)\Sigma$$
$$\Sigma'' = (1+\omega)(2+\omega)\Sigma$$
$$\Sigma''' = (1+\omega)(2+\omega)(3+\omega)\Sigma$$
$$\text{etc.}$$

Das dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied der gegebenen Reihe ist demnach

$\Sigma =$

$$\Sigma = \frac{1^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{2\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{3\frac{1}{2}} \cdot \text{2c.}$$

oder

$$\Sigma = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 10}{9 \cdot 9} \cdot \text{2c.}$$

Da aber $\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot$ 2c. ist, so wird dadurch

$$\Sigma^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ und } \Sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

und es gehören daher zu den

Anzeigern: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

die Glieder: $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 2c.

Zweytes Exempel.

Die Reihe:

$$\frac{1}{1};\ \frac{2}{1 \cdot 3};\ \frac{3}{1 \cdot 3 \cdot 5};\ \frac{4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7};\ \text{2c.}$$

zu interpoliren.

Da hier $a = 1$ und $b = 2$ ist, so wird, wenn man das dem Anzeiger ω zugehörige Glied $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = \frac{1^{1-\omega} \cdot 3^{\omega}}{1 + 2\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega} \cdot 5^{\omega}}{3 + 2\omega} \cdot \frac{5^{1-\omega} \cdot 7^{\omega}}{5 + 2\omega} \cdot \text{2c.}$$

und die auf Σ folgenden Glieder Σ', Σ'', Σ''', 2c. sind

$$\Sigma' = (1 + 2\omega)\Sigma$$
$$\Sigma'' = (1 + 2\omega)(3 + 2\omega)\Sigma$$
$$\Sigma''' = (1 + 2\omega)(3 + 2\omega)(5 + 2\omega)\Sigma$$

2c.

Verlangt man daher das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, und nennt dasselbe Σ, so ist

$\Sigma =$

$$z = \frac{\sqrt{1.2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3.5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5.7}}{6} \cdot \frac{\sqrt{7.9}}{8} \cdot \text{ꝛc.}$$

also

$$z^2 = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{5.7}{6.6} \cdot \frac{7.9}{8.8} \cdot \text{ꝛc.} = \frac{2}{\pi}$$

Demnach gehören zu den

Anzeigern: $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{7}{2}$

die Glieder: $\sqrt{\frac{2}{\pi}};\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}};\ 2.4\sqrt{\frac{2}{\pi}};\ 2.4.6\sqrt{\frac{2}{\pi}};$ ꝛc.

Multiplicirt man aber die vorhergehende Reihe durch diese, so daß man die Reihe

$$\overset{1}{1^2};\ \overset{2}{1^2.2.3};\ \overset{2}{1^2.2.3^2.5};\ \overset{4}{1^2.2.3^2.4.5.7};\ \text{ꝛc.}$$

bekommt, so ist das Glied, welches dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, $= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Die Richtigkeit hiervon erkennt man bald, wenn man jener Reihe die Form giebt,

$$\overset{1}{\frac{1.2}{2}};\ \overset{2}{\frac{1.2.3.4}{2^2}};\ \overset{3}{\frac{1.2.3.4.5.6}{2^3}};\ \overset{4}{\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{2^4}}\ \text{ꝛc.}$$

denn das zu dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ gehörige Glied dieser Reihe ist offenbar $= \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Drittes Exempel.

Die Reihe:

$$\overset{1}{\frac{n}{1}};\ \overset{2}{\frac{2(n-1)}{1.2}};\ \overset{3}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}};\ \overset{4}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}}\ \text{ꝛc.}$$

zu interpoliren.

Man betrachte die Zähler und Nenner dieser Reihe besonders. Da die Zähler

n;

$$\overset{1}{n};\ \overset{2}{n(n-1)};\ \overset{3}{n(n-1)(n-2)};\ \overset{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)};\ \text{etc.}$$

sind, so wird nach dem Vorhergehenden, wenn man $a = n$ und $b = -1$ setzt, das Glied, welches dem Anzeiger ω zugehört, =

$$n^{\omega} \cdot \frac{n^{1-\omega}(n-1)^{\omega}}{n-\omega} \cdot \frac{(n-1)^{1-\omega}(n-2)^{\omega}}{n-1-\omega} \cdot \frac{(n-2)^{1-\omega}(n-3)^{\omega}}{n-2-\omega}$$
$$\text{etc.}$$

allein dieser Ausdruck führt wegen der negativen Faktoren auf nichts gewisses. Man ändere also die Reihe, indem man der Kürze wegen $1.2.3\ldots n = N$ setzt, in folgende um

$$N\left(\overset{1}{\frac{1}{1.1.2.3\ldots(n-1)}};\ \overset{2}{\frac{1}{1.2.1.2.3\ldots(n-2)}};\ \overset{3}{\frac{1}{1.2.3.1.2.3\ldots(n-3)}}\ \text{etc.}\right)$$

Da die Nenner dieser Reihe aus zwey Faktoren bestehen, so geben die einen die Reihe

$$\overset{1}{1.2.3\ldots(n-1)};\ \overset{2}{1.2.3\ldots(n-2)};\ \overset{3}{1.2.3\ldots(n-3)};\ \text{etc.}$$

und das Glied dieser Reihe, welches dem Anzeiger ω zugehört, kommt mit dem Gliede der Reihe

$$\overset{1}{1};\ \overset{2}{1.2};\ \overset{3}{1.2.3};\ \overset{4}{1.2.3.4};\ \overset{5}{1.2.3.4.5};\ \text{etc.}$$

überein, dessen Anzeiger $n-\omega$ ist, nemlich

$$\frac{1^{1-n+\omega}.2^{n-\omega}}{1+n-\omega} \cdot \frac{2^{1-n+\omega}.3^{n-\omega}}{2+n-\omega} \cdot \frac{3^{1-n+\omega}.4^{n-\omega}}{3+n-\omega}.\text{etc.}$$

Nun sey das Glied dieser Reihe, welches $1-\omega$ zum Anzeiger hat, $= \odot$, so ist

$$\odot = \frac{1^{\omega}.2^{1-\omega}}{2-\omega} \cdot \frac{2^{\omega}.3^{1-\omega}}{3-\omega} \cdot \frac{3^{\omega}.4^{1-\omega}}{4-\omega}.\text{etc.}$$

und

und da zu den

Anzeigern: $1-\omega \quad 2-\omega \quad 3-\omega$

die Glieder: $\Theta;\ (2-\omega)\Theta;\ (2-\omega)(3-\omega)\Theta;$ rc.

gehören, so wird das Glied des Anzeigers $n-\omega$ seyn

$$(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ldots\ldots(n-\omega)\Theta.$$

Die andern Faktoren geben die Reihe

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ 1; & 1.2; & 1.2.3; & 1.2.3.4; & 1.2.3.4.5; & \text{rc.} \end{array}$$

und wenn das Glied, dessen Anzeiger ω ist, $= A$ gesetzt wird, so ist

$$A = \frac{1^{1-\omega}.2^{\omega}}{1+\omega} \cdot \frac{2^{1-\omega}.3^{\omega}}{2+\omega} \cdot \frac{3^{1-\omega}.4^{\omega}}{3+\omega} \cdot \text{rc.}$$

Hat man dieses gefunden, so wird, wenn man das Glied der Reihe

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{n}{1}; & \frac{n(n-1)}{1.2}; & \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}; & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}; \end{array}$$

rc.

welches dem Anzeiger ω zugehört, $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = \frac{N}{A.(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ldots(n-\omega)\Theta}.$$

Nun ist

$$\frac{N}{(2-\omega)(3-\omega)(4-\omega)\ldots\ldots(n-\omega)} = \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \ldots \frac{n}{n-\omega}$$

und

$$A\Theta = \frac{1.2}{(1+\omega)(2-\omega)} \cdot \frac{2.3}{(2+\omega)(3-\omega)} \cdot \frac{3.4}{(3+\omega)(4-\omega)} \cdot \text{rc.}$$

Auf diese Art wird das gesuchte dem Anzeiger ω zugehörige Glied

$$\Sigma = \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \cdot \frac{5}{5-\omega} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n-\omega} \cdot$$

$$\frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{(3+\omega)(4-\omega)}{3 \cdot 4} \cdot$$

ꝛc. ohne Ende.

Zu dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ gehört also das Glied:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1}$$

$$\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \text{ꝛc.}$$

welches sich auf folgenden Ausdruck zurückführen läßt:

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \; \ldots \; 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \; \ldots \; (2n-1)} \cdot \frac{4}{\pi}$$

oder

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \; \ldots \; 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \; \ldots \; (2n-1)}.$$

Ist $n = 2$, so ist die zu interpolirende Reihe

0	1	2	3	4	5	6	ꝛc.
1,	2,	1,	0,	0,	0,	0,	ꝛc.

und das darin dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied ist $= \frac{16}{3\pi}$.

Viertes Exempel.

Das dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied der Reihe:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 1 & + \frac{1}{2} & - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} & + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} & - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} & + \text{ꝛc.} \end{array}$$

zu finden.

Diese Reihe entspringt aus der vorhergehenden, wenn man $n = \frac{1}{2}$ setzt, und es ist daher das gesuchte Glied, wenn man dasselbe $= \Sigma$ setzt,

$$\Sigma = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot \cdot \cdot (2n-1)}$$

wenn man $n = \frac{1}{2}$ nimmt. Man setze für den Fall, daß $n = \frac{1}{2}$ ist

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot \cdot \cdot (2n-1)} = \Theta$$

so ist Θ das Glied, welches in der Reihe

$$\frac{2}{1};\ \frac{2.4}{1.3};\ \frac{2.4.6}{1.3.5};\ \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7};\ \text{rc.}$$

dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehört, und nach dem Obigen $= \frac{\pi}{2}$. Demnach ist das gesuchte dem Anzeiger $\frac{1}{2}$ zugehörige Glied der gegebenen Reihe $= 1$. Da nun in dieser Reihe, vorausgesetzt, daß Σ das dem allgemeinen Anzeiger ω zugehörige Glied bedeute, das folgende Glied $\Sigma' = \frac{1-2\omega}{2+2\omega}\Sigma$ ist: so ist dieselbe mit ihren Zwischengliedern:

Anzeiger: $0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad \frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3 \quad \frac{7}{2}$

Glieder: $1;\ 1;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{-1.1}{2.4};\ 0;\ \frac{1.1.3}{2.4.6};\ 0;$ rc.

Fünftes Exempel.

Das dem Anzeiger ω zugehörige Glied der Reihe:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1; & \frac{n}{1}; & \frac{n(n-1)}{1.2}; & \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}; & \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}; \end{array}$$

zu finden, vorausgesetzt, daß n jede gebrochene Zahl bedeute.

Vergleicht man den Ausdruck

$$\frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdot \frac{4}{4-\omega} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{n}{n-\omega}$$

mit

mit §. 400., und setzt $a = 1$, $c = 1$, $b = 1 - \omega$, und daselbst n für ω, so wird

$$\frac{1}{1-\omega} \cdot \frac{2}{2-\omega} \cdot \frac{3}{3-\omega} \cdots \frac{n}{n-\omega} = \frac{1(1-\omega+n)}{(1-\omega)(1+n)} \cdot \frac{2(2-\omega+2)}{(2-\omega)(2+n)} \cdot$$

$$\text{etc.}$$

und wenn man daher das dem Anzeiger ω zugehörige Glied Σ setzt, so wird

$$\Sigma = \frac{(1-\omega+n) \cdot 2}{(1+n)(2-\omega)} \cdot \frac{(2-\omega+n)}{(2+n)(3-\omega)} \cdot \text{etc.} \frac{(1+\omega)(2-\omega)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(2+\omega)(3-\omega)}{2 \cdot 3}$$

$$\text{etc.}$$

und also

$$\Sigma = \frac{(1+\omega)(1+n-\omega)}{1(1+n)} \cdot \frac{(2+\omega)(2+n-\omega)}{2(2+n)} \cdot \frac{(3+\omega)(3+n-\omega)}{3(3+n)}$$

$$\text{etc.}$$

und es kann daher Σ allemal, wenn $n - \omega$ eine ganze Zahl ist, rational ausgedruckt werden.

Ist z. B.	so ist
$n = \omega$	$\Sigma = 1$
$n = 1 + \omega$	$\Sigma = n$
$n = 2 + \omega$	$\Sigma = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
$n = 3 + \omega$	$\Sigma = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$

etc.

Ist aber $\omega - n$ eine ganze positive Zahl, so ist allemal $\Sigma = 0$.