Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Sechszehntes Capitel. Von der Differenziation der inexplicablen Funktionen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52934

Sechszehntes Capitel.

Von der Differenziation der inexplicablen Funktionen.

§. 367.

Inexplicable Funktionen sollen hier solche Funktionen heißen, welche sich weder durch bestimmte Ausdrücke noch durch die Wurzeln der Gleichungen darstellen lassen, so daß sie weder zu den algebraischen noch mit Gewißheit zu einer von den Arten der transcendenten Funktionen gezählet werden können. Eine solche Funktion ist z. B.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{x}$$

welche zwar von x abhängt, aber auf keine Weise entwickelt werden kann, wenn x keine ganze Zahl bedeutet. Auf ähnliche Art ist $1 . 2 . 3 . 4 \ldots\ldots x$ eine inexplicable Funktion, weil, wenn x jede Zahl vorstellen soll, der Werth derselben weder algebraisch noch durch irgend eine Art der transcendenten Größen dargestellt werden kann. Den Begriff von dergleichen Funktionen kann man auf die Reihen gründen. Kann nemlich die Summe der Reihe

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

durch keinen endlichen Ausdruck angegeben werden, so giebt diese Reihe eine inexplicable Funktion von x, nemlich

$$S = A + B + C + D + \ldots\ldots + X$$

Eben

Eben dergleichen erhält man in den Produkten aus den unmittelbar auf einander folgenden Gliedern der Reihen, z. B.

$$P = ABCD \ldots X$$

die aber vermittelst der Logarithmen auf die vorige Form gebracht werden können, indem

$$lP = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

ist.

§. 368.

In dem gegenwärtigen Capitel wollen wir nun die Art, dergleichen inexplicable Funktionen zu differenziiren untersuchen. Zwar scheint dieser Gegenstand in den ersten Theil zu gehören; er mußte aber bis hieher verschoben werden, weil er eine ausführlichere Kenntniß der Reihen voraussetzt. Da indeß diese Untersuchung noch von Niemand angestellt ist, so werden wir uns bloß auf die ersten Gründe derselben einlassen können, doch wollen wir damit einige andere Untersuchungen verbinden, welche die Differenziation der inexplicablen Funktionen nothwendig macht, und zugleich den Nutzen dieser Theorie zeigen wird.

§. 369.

Um also die inexplicablen Funktionen zu differenziiren muß man vor allen Dingen die Werthe aufsuchen, welche sie durch die Substitution $x + \omega$ für x erhalten. Es sey also

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X}$$

Σ der Werth, welchen S durch die Substitution $x + \omega$ für x bekommt, und Z das Glied der Reihe, welches zu dem Anzeiger $x + \omega$ gehört. Ferner mögen die Glieder, deren

Anzeiger

Anzeiger $x+1$, $x+2$, $x+3$ ꝛc. sind, durch X', X'', X''', ꝛc. und dasjenige, dessen Anzeiger $x+\infty$ ist, durch $X^{|\infty|}$ angedeutet werden. Auf ähnliche Art sollen Z', Z'', Z''' ꝛc. die Glieder, deren Anzeiger $x+\omega+1$, $x+\omega+2$, $x+\omega+3$ ꝛc. sind, und $Z^{|\infty|}$ das Glied, welchem der Anzeiger $x+\omega+\infty$ zugehört, ausdrucken. Dieses vorausgesetzt ist

$$S' = S + X'$$
$$S'' = S + X' + X''$$
$$S''' = S + X' + X'' + X'''$$
ꝛc.
$$S^{|\infty|} = S + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{|\infty|}.$$

Auf ähnliche Art ist, wenn Σ nach und nach durch die Glieder Z', Z'', ꝛc. vergrößert wird

$$\Sigma' = \Sigma + Z'$$
$$\Sigma'' = \Sigma + Z' + Z''$$
$$\Sigma''' = \Sigma + Z' + Z'' + Z'''$$
ꝛc.
$$\Sigma^{|\infty|} = \Sigma + Z' + Z'' + Z''' \ldots + Z^{|\infty|}.$$

§. 370.

Nun muß man die Natur der Reihe S, S', S'', S''', ꝛc. erwägen, wenn sie ohne Ende fortgesetzt wird. Wenn dieselbe im Unendlichen mit einer arithmetischen Reihe zusammenfällt; und dies findet statt, wenn die Glieder X, X', X'', X''', ꝛc. im Unendlichen einander gleich werden, so daß die Reihe S, S', S'', S''', ꝛc. endlich gleiche Differenzen bekommt: so sind in diesem Falle

$$S^{|\infty|},\quad S^{|\infty+2|},\quad S^{|\infty+3|},\quad S^{|\infty+4|},\ \text{ꝛc.}$$

in einer arithmetischen Progression; und da

$$\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty+\omega|}$$

wird,

wird, weil

$$S^{|\infty+\omega|} = S^{|\infty|} + \omega(S^{|\infty+1|} - S^{|\infty|})$$
$$= \omega S^{|\infty+1|} + (1-\omega)S^{|\infty|}$$

ist: so hat man

$$\Sigma^{|\infty|} = \omega S^{|\infty+1|} + (1-\omega)S^{|\infty|}.$$

Nun ist

$$S^{|\infty+1|} = S^{|\infty|} + X^{|\infty+1|}$$

also

$$\Sigma^{|\infty|} = S^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|}.$$

Hierdurch bekommt man die Gleichung

$$\Sigma + Z' + Z'' + Z''' + \ldots\ldots + Z^{|\infty|} =$$
$$S + X' + X'' + X''' + \ldots\ldots + X^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|}$$

woraus sich der Werth von Σ bestimmen läßt, den die Funktion S bekommt, wenn man darin $x + \omega$ für x setzt. Es ist nemlich

$$\Sigma = S + \omega X^{|\infty+1|} + X' + X'' + X''' + \text{rc. ohne Ende}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - \text{rc. ohne Ende.}$$

Wenn daher die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, rc. verschwinden, so wird $\omega X^{|\infty+1|} = 0$ und kann weggelassen werden.

§. 371.

Es wird also der Werth Σ durch eine neue unendliche Reihe ausgedruckt, welche sich darstellen läßt, wenn das allgemeine Glied der Reihe $A + B + C +$ rc. bekannt ist, um daraus die Werthe der Glieder Z', Z'', Z''', rc. zu bestimmen. Nimmt man demnach ω unendlich klein, so wird, da $\Sigma - S$ das Differenzial von S ist, das Differenzial dS durch eine unendliche Reihe ausgedruckt. Läßt man ferner dabey auch die höhern Potestäten von ω nicht aus der

Acht, so bekommt man das vollständige Differenzial der inexplicablen Funktion S, dessen Beschaffenheit deutlicher darzulegen die Absicht bey folgenden Exempeln seyn soll.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{x}$$

zu finden.

Da das allgemeine Glied dieser Reihe $X = \frac{1}{x}$, und daher

$$\begin{array}{l|l}
X' = \dfrac{1}{x+1} & Z' = \dfrac{1}{1+1+\omega} \\
X'' = \dfrac{1}{x+2} & Z'' = \dfrac{1}{x+1+\omega} \\
X''' = \dfrac{1}{x+3} & Z''' = \dfrac{1}{x+3+\omega} \\
\text{ꝛc.} & \text{ꝛc.}
\end{array}$$

ist, so erhält man, da $X^{|\infty+1|} = \frac{1}{x+\infty+1} = 0$ ist, wenn $x+\omega$ für x gesetzt wird, Σ für S, so daß

$$\Sigma = S + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \text{ꝛc.}$$

$$- \frac{1}{x+1+\omega} - \frac{1}{x+2+\omega} - \frac{1}{x+3+\omega} - \text{ꝛc.}$$

oder, wenn man die Glieder Paarweise addirt

$$\Sigma = S + \frac{\omega}{(x+1)(x+1+\omega)} + \frac{\omega}{(x+2)(x+2+\omega)}$$

$$+ \frac{\omega}{(x+3)(x+3+\omega)} + \text{ꝛc.}$$

oder,

oder, da

$$\frac{1}{x+1+\omega} = \frac{1}{x+1} - \frac{\omega}{(x+1)^2} + \frac{\omega^2}{(x+1)^3} - \frac{\omega^3}{(x+1)^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{x+2+\omega} = \frac{1}{x+2} - \frac{\omega}{(x+2)^2} + \frac{\omega^2}{(x+2)^3} - \frac{\omega^3}{(x+2)^4} + \text{ꝛc.}$$

ist, wenn man die Reihen nach den Potestäten von ω ordnet

$$\Sigma = S$$

$$+\,\omega\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$-\,\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+\,\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$-\,\omega^4\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

wird. Schreibt man also dx für ω, so ist das vollständige Differenzial der gegebenen Funktion S

$$dS =$$

$$dx\left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$-\,dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{1}{(x+4)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+\,dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^4} + \frac{1}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+3)^4} + \frac{1}{(x+4)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$-\,dx^4\left(\frac{1}{(x+1)^5} + \frac{1}{(x+2)^5} + \frac{1}{(x+3)^5} + \frac{1}{(x+4)^5} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$S = 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \ldots\ldots + \frac{1}{2x-1}$$

zu finden.

Da das allgemeine Glied dieser Reihe $X = \frac{1}{2x-1}$ ist, so wird

$$\begin{array}{ll|ll}
X' &= \dfrac{1}{2x+1} & Z' &= \dfrac{1}{2x+1+2\omega} \\
X'' &= \dfrac{1}{2x+3} & Z'' &= \dfrac{1}{2x+3+2\omega} \\
X''' &= \dfrac{1}{2x+5} & Z''' &= \dfrac{1}{2x+5+2\omega} \\
&\text{ꝛc.} & &\text{ꝛc.}
\end{array}$$

und da die unendlichsten Glieder dieser Reihe verschwinden und einander gleiche Größen werden, so bekommt man für S, wenn man $x+1$ für x setzt,

$$\Sigma = S + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{2x+5} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{2x+1+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \frac{1}{2x+3+2\omega} - \text{ꝛc.}$$

oder

$$\Sigma = S + \frac{2\omega}{(2x+1)(2x+1+2\omega)} + \frac{2\omega}{(2x+3)(2x+3+2\omega)}$$
$$+ \frac{2\omega}{(2x+5)(2x+5+2\omega)} + \text{ꝛc.}$$

Löset man aber die einzelnen Glieder in Reihen nach den Dignitäten von ω auf, so wird

$$z = S + 2\omega\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$- 4\omega^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ 8\omega^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$- 16\omega^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

und setzt man endlich dx für ω, so erhält man das vollständige Differenzial der inexplicablen Funktion S

$$dS =$$
$$2dx\left(\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+3)^2} + \frac{1}{(2x+5)^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$- 4dx^2\left(\frac{1}{(2x+1)^3} + \frac{1}{(2x+3)^3} + \frac{1}{(2x+5)^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ 8dx^3\left(\frac{1}{(2x+1)^4} + \frac{1}{(2x+3)^4} + \frac{1}{(2x+5)^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$- 16dx^4\left(\frac{1}{(2x+1)^5} + \frac{1}{(2x+3)^5} + \frac{1}{(2x+5)^5} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

Drittes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{x^n}$$

zu finden.

Da das allgemeine Glied dieser Reihe $= \frac{1}{x^n}$ ist, so sind die unendlichsten Glieder verschwindende und einander gleiche Größen. Da also

$$X' = \frac{1}{(x+1)^n} \qquad Z' = \frac{1}{(x+1+\omega)^n}$$
$$X'' = \frac{1}{(x+2)^n} \qquad Z'' = \frac{1}{(x+2+\omega)^n}$$
$$X''' = \frac{1}{(x+3)^n} \qquad Z''' = \frac{1}{(x+3+\omega)^n}$$
ꝛc. ꝛc.

ist: so wird $X' - Z' =$

$$\frac{n\omega}{(x+1)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+1)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+1)^{n+3}} - \text{ꝛc.}$$

$$X'' - Z'' =$$

$$\frac{n\omega}{(x+2)^{n+1}} - \frac{n(n+1)\omega^2}{2(x+2)^{n+2}} + \frac{n(n+1)(n+2)\omega^3}{6(x+2)^{n+3}} - \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

$$\Sigma - S =$$

$$n\omega\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$-\frac{n(n+1)}{1.2}\omega^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\omega^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

und setzt man also dx für ω, so bekommt man das gesuchte Differenzial

$$dS =$$

$$ndx\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+2)^{n+1}} + \frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$-\frac{n(n+1)}{1.2}dx^2\left(\frac{1}{(x+1)^{n+2}} + \frac{1}{(x+2)^{n+2}} + \frac{1}{(x+3)^{n+2}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}dx^3\left(\frac{1}{(x+1)^{n+3}} + \frac{1}{(x+2)^{n+3}} + \frac{1}{(x+3)^{n+3}} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

§. 372.

Hieraus lassen sich auch die Summen jener Reihen interpoliren, oder die Werthe der summatorischen Glieder finden, wenn die Zahl der Glieder keine ganze Zahl ist. Denn setzt man $x = 0$, so wird auch $S = 0$, und Σ druckt die Summe so vieler Glieder aus, als ω Einheiten enthält, wenn gleich ω keine ganze Zahl ist. Setzt man z. B. im ersten Exempel

$$\Sigma = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{\omega}$$

so wird

$$\Sigma = \frac{\omega}{(1+\omega)} + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \text{etc.}$$

oder

$$\begin{aligned}\Sigma = \ & \omega\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}\right) \\ & - \omega^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}\right. \\ & + \omega^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}\right. \\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

Im dritten Exempel hingegen ist

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots + \frac{1}{\omega^n}$$

und der Werth von Σ wird, ω mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, durch folgende Reihen ausgedruckt:

$$\begin{aligned}\Sigma = \ & n\omega\left(+ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{4^{n+1}} + \text{etc.}\right) \\ & - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\omega^2\left(1 + \frac{1}{2^{n+2}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \frac{1}{4^{n+2}} + \text{etc.}\right) \\ & + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\omega^3\left(1 + \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{1}{3^{n+3}} + \frac{1}{4^{n+3}} + \text{etc.}\right) \\ & \text{etc.}\end{aligned}$$

§. 373.

Eben dieses läßt sich auch auf die allgemeine Reihe anwenden. Denn da

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

ist, und wenn man $x + \omega$ für x setzt, X in Z und S in Σ übergeht: so ist

$$Z = X + \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1.dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1.2.3dx^3} + \text{2c.}$$

und da auf ähnliche Art Z', Z'', Z''', 2c. durch X', X'', X''', 2c. ausgedruckt werden, so findet man

$$\begin{aligned}\Sigma = S &+ \omega X^{|\infty+1|} \\ &- \frac{\omega}{dx} d(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + \text{2c.}) \\ &- \frac{\omega^2}{1.2dx^2} dd(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + \text{2c.}) \\ &- \frac{\omega^3}{1.2.3dx^3} d^3(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + \text{2c.}) \\ &\text{2c.}\end{aligned}$$

Ist nun $X^{|\infty+1|}$ nicht $= 0$, so kann man es, um das Unendliche wegzubringen, auf folgende Art ausdrucken:

$$X^{|\infty+1|} = X' + (X''-X') + (X'''-X'') + (X^{\prime v}-X''') + \text{2c.}$$

und es ist also

$$\begin{aligned}\Sigma = S + \omega X' &+ \omega((X''-X') + (X'''-X'') + (X^{\prime v}-X''') + \text{2c.}) \\ &- \frac{\omega}{dx} d(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{2c.}) \\ &- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{2c.}) \\ &- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3(X' + X'' + X''' + X^{\prime v} + X^{v} + \text{2c.}) \\ &\text{2c.}\end{aligned}$$

Setzt

Setzt man daher dx für ω, so erhält man folgendes vollständige Differenzial von $S = A + B + C + \ldots + X$

$$\begin{aligned} dS = X'dx + dx((X''-X') + (X'''-X'') + (X^{IV}-X''') + \text{ꝛc.}) \\ - \; d\,.\,(X' + X'' + X''' + X^{IV} + \text{ꝛc.}) \\ - \tfrac{1}{2}dd\,.\,(X' + X'' + X''' + X^{IV} + \text{ꝛc.}) \\ - \tfrac{1}{6}d^3\,.\,(X' + X'' + X''' + X^{IV} + \text{ꝛc.}) \\ \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

§. 374.

Setzt man $x = 0$, so wird $X' = A$, $X'' = B$, ꝛc. und also $X' + X'' + X''' +$ ꝛc. eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied $= X$ ist. Formirt man nun Reihen aus diesen allgemeinen Gliedern

$$\frac{dX}{dx};\; \frac{ddX}{2dx^2};\; \frac{d^3X}{6dx^3};\; \frac{d^4X}{24\,dx^4};\; \text{ꝛc.}$$

welche Reihen, ohne Ende fortgesetzt, folgende Summen haben mögen:

$$\begin{aligned} \int . \; X &= \mathfrak{A} \\ \int . \frac{dX}{dx} &= \mathfrak{B} \\ \int . \frac{ddX}{2dx^2} &= \mathfrak{C} \\ \int . \frac{d^3X}{6dx^3} &= \mathfrak{D} \\ \int . \frac{d^4X}{24dx^4} &= \mathfrak{E} \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

so wird, weil für $x = 0$ auch $S = 0$ ist, Z die Summe der Reihe $A + B + C + D + \ldots + Z$, bis zu dem ωten Gliede, weil Z das Glied ist, welches dem Anzeiger ω zugehört, ω mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn. Man hat daher

$$\Sigma = \omega A + \omega((B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{ꝛc.})$$
$$- \omega\mathfrak{B} - \omega^2\mathfrak{C} - \omega^3\mathfrak{D} - \omega^4\mathfrak{E} - \text{ꝛc.}$$

wo man die erste Reihe weglassen kann, wenn die Glieder der gegebenen Reihe endlich verschwinden.

§. 375.

Schreibt man nun x für ω, so geht Σ in S über, so daß

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \overset{\cdots}{\ldots} + \overset{x}{X}$$

wird, und eben dieser Werth von S läßt sich auf folgende Art durch eine unendliche Reihe ausdrucken:

$$S = Ax + x((B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{ꝛc.})$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \mathfrak{F}x^5 - \text{ꝛc.}$$

Da dieser Ausdruck gleich passend ist, x mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, so lassen sich die Differenzialien jeder Ordnung von S darnach sehr leicht darstellen. Es ist nemlich

$$\frac{dS}{dx} = A + (B - A) + (C - B) + (D - C) + \text{ꝛc.}$$
$$- \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}x - 3\mathfrak{D}x^2 - 4\mathfrak{E}x^3 - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{ddS}{2dx^2} = - \mathfrak{C} - 3\mathfrak{D}x - 6\mathfrak{E}x^2 - 10\mathfrak{F}x^3 - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{d^3S}{6dx^3} = - \mathfrak{D} - 4\mathfrak{E}x - 10\mathfrak{F}x^2 - 20\mathfrak{G}x^3 - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{d^4S}{24dx^4} = - \mathfrak{E} - 5\mathfrak{F}x - 15\mathfrak{G}x^2 - \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Da also das vollständige Differenzial =

$$dS + \tfrac{1}{2}ddS + \tfrac{1}{6}d^3S + \tfrac{1}{24}d^4S + \text{ꝛc.}$$

ist: so ist das vollständige Differenzial der Funktion S

$$dS = Adx + (B - A)dx + (C - B)dx + (D - C)dx + \text{ꝛc.}$$

—

$$-\mathfrak{B}dx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3)$$
$$-\mathfrak{E}(4x^3dx + 6x^2dx^2 + 4xdx^3 + dx^4) - \text{2c.}$$

§. 376.

Auf diese Art läßt sich also das Differenzial einer jeden inexplicablen Funktion S ausdrucken, wenn die unendlichsten Glieder der Reihe A + B + C + D + 2c. entweder verschwinden oder einander gleich werden. Denn sind die unendlichsten Glieder dieser Reihe nicht = 0, so wird die Summe der Reihe 𝔅, welche aus dem allgemeinen Gliede $\frac{dX}{dx}$ formirt wird, unendlich, giebt aber mit der Reihe A + (B — A) + (C — B) + (D — C) + 2c. zusammengenommen eine endliche Summe. Es können aber die Glieder der Reihe A + B + C + D + 2c. so ins Unendliche vermehrt werden, daß nicht nur die Summe der Reihe 𝔅, sondern auch die der Reihe ℭ unendlich wird, und in diesem Falle ist es nicht genug, die Reihe A + (B — A) + (C — B) + (D — C) + 2c. hinzugefügt zu haben, sondern es muß dann auch auf die unendlichsten Glieder,

$$S|\infty|, \quad S|\infty+1|, \quad S|\infty+2| \text{ 2c.}$$

deren §. 370 Erwähnung geschehen ist, da sie in keiner arithmetischen Progression mehr sind, Rücksicht genommen werden. So wie wir daher die ersten Differenzen dieser Glieder gleich angenommen haben, so müssen wir nun, um die erklärte Methode weiter auszudehnen, erst die zweyten, oder die dritten Differenzen u. s. f. gleich seyn lassen.

§. 377.

Mit Beybehaltung der Schlußart, welcher wir uns §. 369. bedient haben, wollen wir daher jetzt annehmen,

daß

daß die zweyten Differenzen der angeführten Werthe gleich seyen.

$$S^{|\infty|},\quad S^{|\infty+1|},\quad S^{|\infty+2|};$$

Erste Differ. $X^{|\infty+1|};\quad X^{|\infty+2|};$

Zweyte Differ. $X^{|\infty+2|} - X^{|\infty+1|}.$

Hiernach ist

$$Z^{|\infty|} = S^{|\infty+\omega|}$$
$$= S^{|\infty|} + \omega X^{|\infty+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left(X^{|\infty+2|} - X^{|\infty+1|}\right)$$
$$= S^{|\infty|} - \frac{\omega(\omega-3)}{1.2}X^{|\infty+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}X^{|\infty+2|}$$

Wir haben demnach folgende Gleichung:

$$Z + Z' + Z'' + Z''' + \ldots\ldots + Z^{|\infty|} =$$
$$S + X' + X'' + X''' + \ldots\ldots + X^{|\infty|} -$$
$$\frac{\omega(\omega-3)}{1.2}X^{|\infty+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}X^{|\infty+2|}$$

und daraus findet man

$$Z = S + X' + X'' + X''' + X'^{v} + \text{etc. ohne Ende}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'^{v} - \text{etc. ohne Ende}$$
$$+ \omega X^{|\infty+1|} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left(X^{|\infty+2|} - X^{|\infty+1|}\right).$$

Diese unendlichsten Glieder lassen sich auf die Art darstellen, daß

$$Z = S + X' + X'' + X''' + X'^{v} + \text{etc.}$$
$$- Z' - Z'' - Z''' - Z'^{v} - \text{etc.}$$
$$+ \omega X' + \omega\left\{\begin{array}{l} + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{etc.} \\ - X' - X'' - X'' - X'^{v} + \text{etc.}\end{array}\right\}$$
$$\begin{array}{l} + \dfrac{\omega(\omega-1)}{1.2}X'' \\ - \dfrac{\omega(\omega-1)}{1.2}X' \end{array} + \frac{\omega(\omega-1)}{1.2}\left\{\begin{array}{l} + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{etc.} \\ - 2X'' - 2X''' - 2X'^{v} - \text{etc.} \\ + X' + X'' + X''' + \text{etc.}\end{array}\right.$$

wird,

wird, und hieraus erhellet zugleich das Gesetz, nach welchem dieser Ausdruck eingerichtet seyn muß, wenn die dritten, vierten und fernern Differenzen gleich werden.

§. 378.

Da also, wie wir oben bewiesen haben,

$$Z = X + \frac{\omega dX}{2dx} + \frac{\omega^2 ddX}{1 \cdot 2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{1 \cdot 2 \cdot 3dx^3} + \text{ꝛc.}$$

ist: so erhalten wir durch die Substitution der Werthe, welche sich hieraus für Z', Z'', Z''', ꝛc. ergeben, für Z', Z'', Z''', ꝛc. wenn in dem Werthe von S, $x + \omega$ für x gesetzt wird,

$$\Sigma = S + \omega X' + \omega \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{ꝛc.} \\ - X' - X'' - X''' - X'^{v} - \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} + \dfrac{\omega(\omega - 1)}{1 \cdot 2} X'' \\ - \dfrac{\omega(\omega - 1)}{1 \cdot 2} X' \end{array} + \frac{\omega(\omega - 1)}{1 \cdot 2} \left\{ \begin{array}{l} + X''' + X'^{v} + X^{v} + X^{v\prime} + \text{ꝛc.} \\ - 2X'' - 2X''' - 2X'^{v} - 2X^{v} - \text{ꝛc.} \\ + X' + X'' + X''' + X'^{v} + \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

$$\frac{-\omega}{dx} d \,.\, (X' + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{ꝛc.})$$

$$\frac{-\omega^2}{2dx^2} dd \,.\, (X' + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{ꝛc.})$$

$$\frac{-\omega^3}{6dx^3} d^3 \,.\, (X' + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{ꝛc.})$$

ꝛc.

Setzt man also dx für ω, so bekommt man folgenden Ausdruck für das vollständige Differenzial von S

$$dS = X'dx + dx \left\{ \begin{array}{l} + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{ꝛc.} \\ - X' - X'' - X''' - X'^{v} - \text{ꝛc.} \end{array} \right.$$

— X''

$$\begin{array}{l} -X''\dfrac{dx(1-dx)}{1\,.\,2} \\ +X'\dfrac{dx(1-dx)}{1\,.\,2} \end{array} - \frac{dx(1-dx)}{1\,.\,2}\left\{\begin{array}{l} +\ X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{rc.} \\ -2X''-2X'''-2X^{IV}-\text{rc.} \\ +\ X'+X''+X'''+\text{rc.} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} +X'''\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\,.\,2\,.\,3} \\ -2X''\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\,.\,2\,.\,3} \\ +X'\dfrac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\,.\,2\,.\,3} \\ \text{rc.} \end{array} + \frac{dx(1-dx)(2-dx)}{1\,.\,2\,.\,3}\left\{\begin{array}{l} +X^{IV}+X^{V}+\text{rc.} \\ -3X'''-3X^{IV}-\text{rc.} \\ +3X''+3X'''+\text{rc.} \\ -X'-X''-\text{rc.} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} -\ d\,.\,(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{rc.}) \\ -\ \tfrac{1}{2}dd\,.\,(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{rc.}) \\ -\ \tfrac{1}{6}d^{3}\,.\,(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{rc.}) \\ -\ \tfrac{1}{24}d^{4}\,.\,(X'+X''+X'''+X^{IV}+X^{V}+\text{rc.}) \\ \qquad\qquad\text{rc.} \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist von dem weitesten Umfange und giebt das gesuchte Differenzial, was für Differenzen auch gleich seyn mögen. Es ist nemlich diese Formel darnach eingerichtet, daß die Differenzen gleich werden, und man erkennt daraus bald das Gesetz ihrer Fortsetzung, wenn diese Fortsetzung etwa nöthig seyn sollte.

§. 379.

Wenn die Reihe A + B + C + D + rc., aus welcher die inexplicable Funktion

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

formirt wird, so beschaffen ist, daß ihre unendlichsten Glieder verschwinden: so ist, wie wir bereit angemerkt haben,

dS =

$$\begin{aligned} dS = & - d \,.\, (X' + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{etc.}) \\ & - \tfrac{1}{2}dd \,.\, (X' + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{etc.}) \\ & - \tfrac{1}{6}d^3 \,.\, (X' + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{etc.}) \\ & - \tfrac{1}{24}d^4 \,.\, (X' + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{etc.}) \\ & \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Sind aber diese unendlichsten Glieder nicht $= 0$, sondern ihre Differenzen, so muß man zu jenem Ausdrucke noch

$$dx \left\{ X' \begin{array}{l} + X'' + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{etc.} \\ - X' - X'' - X''' - X'^{v} - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

addiren. Verschwinden erst die zweyten Differenzen der unendlichsten Glieder der Reihe $A + B + C + D +$ etc., so muß man außerdem noch

$$\frac{dx(dx-1)}{1\,.\,2} \left\{ \begin{array}{ll} + X'' & + X''' + X'^{v} + X^{v} + \text{etc.} \\ & -2X'' - 2X''' - 2X'^{v} - \text{etc.} \\ - X' & + X' + X'' + X''' + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

dazu setzen. Verschwinden erst die dritten Differenzen, so muß man noch hinzufügen

$$\frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \left\{ \begin{array}{ll} X''' & + X'^{v} + X^{v} + X^{v\prime} + \text{etc.} \\ - 2X'' & -3X''' - 3X'^{v} - 3X^{v} - \text{etc.} \\ + X' & + 3X'' + 3X''' + 3X'^{v} + \text{etc.} \\ & - X' - X'' - X''' + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

und auf eben diese Art ferner verfahren. Haben also die unendlichsten Glieder der Reihe $A + B + C + D +$ etc. nur endlich verschwindende Differenzen, so läßt sich hiernach allemal das Differenzial der aus der Reihe formirten in- inexplicablen Funktion bestimmen.

§. 380.

Setzt man $x = 0$, so wird $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$ etc. So wie daher $A + B + C + D +$ etc. eine Reihe mit dem

dem allgemeinen Gliede X ist, so suche man auch aus den allgemeinen Gliedern

$$\frac{dX}{dx};\quad \frac{ddX}{2dx^2};\quad \frac{d^3X}{6dx^3};\quad \frac{d^4X}{24dx^4};\quad \text{ꝛc.}$$

ähnliche unendliche Reihen, deren Summe durch die Buchstaben $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$, ꝛc. angezeigt werden mögen. Alsdann wird die Summe von n Gliedern der Reihe $A + B + C + D +$ ꝛc. auf die Art ausgedruckt, daß es gleich viel ist, n mag eine ganze Zahl oder einen Bruch bedeuten. Setzt man x für n, so daß

$$S = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots\ldots + \overset{x}{X}$$

wird, so ist, wenn die unendlichsten Glieder verschwinden

$$S = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{ꝛc.}$$

Haben hingegen diese unendlichsten Glieder die ersten Differenzen verschwindend, so muß man noch dazu setzen

$$x\left\{A\begin{array}{l} + B + C + D + E + \text{ꝛc.} \\ - A - B - C - D - \text{ꝛc.} \end{array}\right.$$

Verschwinden erst die zweyten Differenzen, so muß man außerdem dazu nehmen

$$\frac{x(x-1)}{1.2}\left\{\begin{array}{ll} + B & + C + D + E + F + \text{ꝛc.} \\ & - 2B - 2C - 2D - 2E - \text{ꝛc.} \\ - A & + A + B + C + D + \text{ꝛc.} \end{array}\right\}$$

so wie man, wenn erst die dritten Differenzen $= 0$ werden, noch dazu setzen muß

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\left\{\begin{array}{ll} + C & + D + E + F + G + \text{ꝛc.} \\ - 2B & - 3C - 3D - 3E - 3F - \text{ꝛc.} \\ + A & + 3B + 3C + 3D + 3E + \text{ꝛc.} \\ & - A - B - C - D - \text{ꝛc.} \end{array}\right\}$$

§. 381.

§. 381.

Jetzt wollen wir diese Methode auf die andere Gattung der inexplicablen Funktionen anwenden, welche aus einem Produkte einiger unmittelbar auf einander folgenden Glieder der Reihe $A + B + C + D +$ ꝛc. bestehen, dabey

$$S = \overset{1}{A} \,.\, \overset{2}{B} \,.\, \overset{3}{C} \,.\, \overset{4}{D} \,.\,.\,.\,.\,.\, \overset{x}{X}$$

setzen, und zuvörderst den Werth Σ suchen, worin S übergeht, wenn man $x + \omega$ für x setzt. Es soll aber auch hier Z, wie vorhin das Glied bedeuten, dessen Anzeiger $x + \omega$ ist, so wie X dem Anzeiger x zugehört. Um diesen Fall auf den vorhergehenden zurückzuführen, muß man die Logarithmen nehmen, wo denn

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots + lX$$

wird. Verschwinden die unendlichsten Glieder dieser Reihe, so findet man, nach der bey der ersten Gattung der inexplicablen Funktion gebrauchten Methode,

$$\begin{aligned} l\Sigma = lS &+ lX' + lX'' + lX''' + \text{ꝛc.} \\ &- lZ' - lZ'' - lZ''' - \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

und hat also, wenn man zu den Zahlen zurückgeht,

$$\Sigma = S \,.\, \frac{X'}{Z'} \,.\, \frac{X''}{Z''} \,.\, \frac{X'''}{Z'''} \,.\, \frac{X^{IV}}{Z^{IV}}, \text{ ꝛc.}$$

Verschwinden die Logarithmen der unendlichsten Glieder jener Reihe aber nicht, sondern erst ihre Differenzen, so muß zu der Reihe, welche wir für $l\Sigma$ gefunden haben, noch

$$\omega lX' + \omega\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X''''}{X'''} + \text{ꝛc.}\right)$$

hinzugesetzt werden, und dadurch bekommt man, wenn man wieder die Zahlen nimmt,

$$\Sigma =$$
$$SX'^{\omega} . \frac{X''^{\omega} . X'^{(1-\omega)}}{Z'} . \frac{X'''^{\omega} . X''^{(1-\omega)}}{Z''} . \frac{X^{IV\omega} . X'''^{(1-\omega)}}{Z'''}$$
$$\text{ꝛc.}$$

§. 382.

Setzt man also $x = 0$, in welchem Falle $S = 1$, und $X' = A$, $X'' = B$, $X''' = C$, ꝛc. wird, so bedeutet Σ ein Produkt aus ω Gliedern der Reihe A, B, C, D, ꝛc. Setzt man also x für ω, damit Σ den Werth erhalte, welchen wir vorhin S beygelegt haben, so daß

$$S = \overset{1}{A} . \overset{2}{B} . \overset{3}{C} . \overset{4}{D} . \; . \; . \; . \overset{x}{X}$$

ist, so bekommt man für S, weil nun Z', Z'', Z''', ꝛc. in X', X'', X''', ꝛc. übergehen, für den Fall, daß die Logarithmen der unendlichsten Gliedern jener Reihe verschwinden, den Ausdruck

$$S = \frac{A}{X'} . \frac{B}{X''} . \frac{C}{X'''} . \frac{D}{X^{IV}} . \frac{E}{X^{V}} . \text{ꝛc.}$$

Verschwinden aber erst die Differenzen der Logarithmen der unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, ꝛc., so wird

$$S = A^{x} . \frac{B^{x} A^{1-x}}{X'} . \frac{C^{x} B^{1-x}}{X''} . \frac{D^{x} C^{1-x}}{X'''} . \text{ꝛc.}$$

Verschwinden erst die zweyten Differenzen jener Logarithmen, so kann man hieraus ohne Mühe herleiten, was für Faktoren zu den vorhergehenden hinzugesetzt werden müssen; wir verweilen aber hierbey nicht, da dieser Fall schwerlich vorkommen wird. Den Nutzen dieser Ausdrücke werden wir in dem folgenden Capitel bey der Interpolation der Reihen zu zeigen Gelegenheit haben.

§. 383.

Da es uns hier vorzüglich um die Differenziation von dergleichen inexplicablen Funktionen zu thun ist: so sey das Differenzial der Funktion

$$S = A \,.\, B \,.\, C \,.\, D \,.\,\,.\,\,.\,\,. X$$

zu finden. Zu diesem Ende wollen wir die vorhin gefundene Gleichung

$$lZ = lS + lX' + lX'' + lX''' + \text{etc.}$$
$$- lZ' - lZ'' - lZ''' - \text{etc.}$$

zu Hülfe nehmen. Da lZ aus dem lX entspringt, wenn man $x + \omega$ für x setzt, so ist

$$lZ = lX + \frac{\omega}{dx} d \,.\, lX + \frac{\omega^2}{2dx^2} dd \,.\, lX + \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3 \,.\, lX + \text{etc.}$$

und braucht man diese Werthe für lZ', lZ'', lZ''', etc., so bekommt man

$$lZ = lS - \frac{\omega}{dx} d \,.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX^{\prime v} + \text{etc.})$$
$$- \frac{\omega^2}{2dx^2} dd \,.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX^{\prime v} + \text{etc.})$$
$$- \frac{\omega^3}{6dx^3} d^3 \,.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX^{\prime v} + \text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

Setzt man nun $\omega = dx$, so wird $lZ = lS + d \,.\, lS$, und also

$$\frac{dS}{d} = - d \,.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX^{\prime v} + \text{etc.})$$
$$- \tfrac{1}{2} dd \,.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX^{\prime v} + \text{etc.})$$
$$- \tfrac{1}{6} d^3 \,.\, (lX' + lX'' + lX''' + lX^{\prime v} + \text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

Diese Reihen gelten, wenn die Logarithmen der unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, etc. verschwinden;

verschwinden diese aber nicht, sondern erst ihre Differenzen, so muß zu dem vorhergehenden Ausdrucke noch

$$dx\,lX' + dx\left(l\frac{X''}{X'} + l\frac{X'''}{X''} + l\frac{X^{IV}}{X'''} + \text{etc.}\right)$$

hinzugefügt werden, um das vollständige Differenzial zu erhalten.

§. 384.

Es giebt hierzu aber noch einen andern Weg. Man setze $x = 0$, in welchem Falle auch $lS = 0$ wird. Dann formire man Reihen, deren allgemeine Glieder

$$lX;\ \frac{d\,.\,lX}{dx};\ \frac{dd\,.\,lX}{2dx^2};\ \frac{d^3\,.\,lX}{6dx^3}\ \text{etc.}$$

sind, und setze ihre Summen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$, etc. Schreibt man nun x für ω, damit $\Sigma = S$ werde, so ist

$$lS = -\mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{etc.}$$

wenn die Logarithmen der unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, etc. deren allgemeines Glied X ist, verschwinden. Geschieht dies erst bey den Differenzen dieser Logarithmen, so ist

$$lS = x\,lA + x\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.}\right)$$
$$- \mathfrak{B}x - \mathfrak{C}x^2 - \mathfrak{D}x^3 - \mathfrak{E}x^4 - \text{etc.}$$

Hiernach ist das Differenzial von lS

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.}\right.$$
$$- \mathfrak{B}dx - 2\mathfrak{C}xdx - 3\mathfrak{D}x^2dx - 4\mathfrak{E}x^3dx - \text{etc.}$$

und das vollständige Differenzial

$$\frac{dS}{S} = dx\,lA + dx\left(l\frac{B}{A} + l\frac{C}{B} + l\frac{D}{C} + l\frac{E}{D} + \text{etc.}\right)$$
$$- \mathfrak{B}xdx - \mathfrak{C}(2xdx + dx^2) - \mathfrak{D}(3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3)$$
$$- \text{etc.}$$

Den

Den Gebrauch dieser Formeln zu zeigen mögen folgende Exempel hier stehen, welche wir auf beyde Arten behandeln wollen.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \frac{2x-1}{2x}$$

zu finden.

Hier ist vor allen Dingen zu bemerken, daß die unendlichsten Glieder dieser Faktoren Einheiten werden, und also ihre Logarithmen verschwinden. Da also $X = \frac{2x-1}{2x}$ ist, so ist

$$X' = \frac{2x+1}{2x+2};\ X'' = \frac{2x+3}{2x+4};\ X''' = \frac{2x+5}{2x+6};\ \text{rc.}$$

und überhaupt

$$X^{|n|} = \frac{2x+2n-1}{2x+2n};$$

Folglich

$$lX^{|n|} = l(2x+2n-1) - l(2x+2n)$$

$$d.lX^{|n|} = \frac{2dx}{(2x+2n-1)} - \frac{2dx}{(2x+2n)}$$

$$dd.lX^{|n|} = -\frac{4dx^2}{(2x+2n-1)^2} + \frac{4dx^2}{(2x+2n)^2}$$

$$d^3.lX^{|n|} = +\frac{2.2.4dx^3}{(2x+2n-1)^3} - \frac{2.2.4dx^3}{(2x+2x)^3}$$

$$d^4.lX^{|n|} = -\frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n-1)^4} + \frac{2.2.4.6dx^4}{(2x+2n)^4}$$

rc.

und also das vollständige Differenzial

$$\frac{dS}{S} = -2dx\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{2x+3}+\frac{1}{2x+5}+\text{rc.}\\ -\frac{1}{2x+2}-\frac{1}{2x+4}-\frac{1}{2x+6}-\text{rc.}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{4}{2}dx^2\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+3)^2}+\frac{1}{(2x+5)^2}+\text{rc.}\\ -\frac{1}{(2x+2)^2}-\frac{1}{(2x+4)^2}-\frac{1}{(2x+6)^2}-\text{rc.}\end{array}\right\}$$

$$-\frac{8}{3}dx^3\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{(2x+1)^3}+\frac{1}{(2x+3)^3}+\frac{1}{(2x+5)^3}+\text{rc.}\\ -\frac{1}{(2x+2)^3}-\frac{1}{(2x+4)^3}-\frac{1}{(2x+6)^3}-\text{rc.}\end{array}\right\}$$

$$\text{rc.}$$

Sucht man bloß das erste Differenzial, so ist solches

$$\frac{dS}{S} = -2dx \times$$

$$\left(\frac{1}{(2x+1)(2x+2)}+\frac{1}{(2x+3)(2x+4)}+\frac{1}{(2x+5)(2x+6)}+\text{rc.}\right)$$

welches man nach der andern Methode §. 394. auf folgende Art finden kann. Da $lX = l\frac{2x-1}{2x}$ ist, so ist

$$\frac{d.lX}{dx} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dd.lX}{2dx^2} = -\frac{2}{(2x-1)^2} + \frac{1}{2xx}$$

$$\frac{d^3.lX}{6dx^3} = +\frac{8}{3(2x-1)^3} - \frac{1}{3x^3}$$

$$\text{rc.}$$

und

und folglich

$$\mathfrak{A} = l\frac{1}{2} + l\frac{3}{4} + l\frac{5}{6} + l\frac{7}{8} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{B} = \left\{\begin{array}{l} +\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\text{etc.} \\ -\frac{2}{2}-\frac{2}{4}-\frac{2}{6}-\frac{2}{8}-\frac{2}{10}-\text{etc.}\end{array}\right\} = 2l2$$

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{4}{2}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.} \\ -\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{8^2}-\text{etc.}\end{array}\right\}$$

$$\mathfrak{D} = \tfrac{8}{3}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\text{etc.} \\ -\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}-\frac{1}{8^3}-\text{etc.}\end{array}\right\}$$

etc.

oder

$$\mathfrak{B} = + \tfrac{2}{1}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.})$$

$$\mathfrak{C} = - \tfrac{4}{2}(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{etc.})$$

$$\mathfrak{D} = + \tfrac{8}{3}(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{etc.})$$

$$\mathfrak{E} = - \tfrac{16}{4}(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \text{etc.})$$

etc.

Durch die Substitution dieser Werthe wird

$$\frac{dS}{S} = - 2dx(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.})$$

$$+ 4xdx(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \text{etc.})$$

—

$$- 8x^2dx(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - \text{etc.})$$

$$+ 16x^3dx(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \text{etc.})$$

$$\text{etc.}$$

Ist also $x = 0$, in welchem Falle $lS = 0$ und $S = 1$ wird, so ist $dS = -2dxl2$.

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der inexplicablen Funktion:

$$S = 1 . 2 . 3 . 4 . \ldots . x$$

zu finden.

Die Glieder dieser Reihe 1, 2, 3, 4, etc. wachsen im Unendlichen so, daß die Differenzen der Logarithmen verschwinden, indem

$$l(\infty + 1) - l\infty = l(1 + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ist. Da also $X = x$ und $lX = lx$ ist, so wird

$$X' = x + 1$$
$$X'' = x + 2$$
$$X''' = x + 3$$
$$\text{etc.}$$

$$d.lX = \frac{dx}{dx}$$

$$dd.lX = - \frac{dx^2}{x^2}$$

$$d^3.lX = \frac{2dx^3}{x^3}$$

$$d^4.lX = - \frac{2.3dx^4}{x^4}$$

$$\text{etc.}$$

Wenn

Wenn also die Logarithmen verschwänden, so würde

$$\frac{dS}{S} = -\,dx\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\text{ꝛc.}\right)$$
$$+\,\frac{dx^2}{2}\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\text{ꝛc.}\right)$$
$$-\,\frac{dx^3}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

seyn. Da aber erst die Differenzen der Logarithmen = 0 werden, so muß dazu noch

$$dx\,l(x+1)+dx\left(l\frac{x+2}{x+1}+l\frac{x+3}{x+2}+l\frac{x+4}{x+3}+\text{ꝛc.}\right)$$

addirt werden. Nun ist

$$l\frac{x+2}{x+1}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{3(x+1)^3}-\frac{1}{4(x+1)^4}+\text{ꝛc.}$$
$$l\frac{x+3}{x+2}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(2x+2)^2}+\frac{1}{3(x+2)^3}-\frac{1}{4(x+2)^4}+\text{ꝛc.}$$

ꝛc.

also das wahre vollständige Differenzial

$$\frac{dS}{S} = dx\,l(x+1)$$
$$-\,\tfrac{1}{2}(dx-dx^2)\left(\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}+\text{ꝛc.}\right)$$
$$+\,\tfrac{1}{3}(dx-dx^3)\left(\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+3)^3}+\text{ꝛc.}\right)$$
$$-\,\tfrac{1}{4}(dx-dx^4)\left(\frac{1}{(x+1)^4}+\frac{1}{(x+2)^4}+\frac{1}{(x+3)^4}+\text{ꝛc.}\right)$$
$$+\,\tfrac{1}{5}(dx-dx^5)\left(\frac{1}{(x+1)^5}+\frac{1}{(x+2)^5}+\frac{1}{(x+2)^5}+\text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

Will man aber dieses Differenzial auf die andere Art ausdrucken, so hat man, da

$$lX = lx;\quad \frac{d.lX}{dx} = 1;\quad \frac{dd.lX}{2dx^2} = -\frac{1}{2x^3};$$

$$\frac{d^3.lX}{6dx^3} = \frac{1}{3x^3};\quad \frac{d^4.lX}{24dx^4} = -\frac{1}{4x^4};\ \text{ꝛc.}$$

ist, folgende Reihen:

$$\mathfrak{A} = \quad l1 + l2 + l3 + l4 + l5 + \text{ꝛc.}$$

$$\mathfrak{B} = \quad 1(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ꝛc.})$$

$$\mathfrak{C} = -\tfrac{1}{2}(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ꝛc.})$$

$$\mathfrak{D} = \quad \tfrac{1}{3}(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ꝛc.})$$

$$\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{4}(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ꝛc.})$$

ꝛc.

Da also $lA = l1 = 0$ ist, so wird nach §. 384.

$$\begin{aligned} lS = \; & x(l\frac{2}{1} + l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} + l\frac{5}{4} + \text{ꝛc.}) \\ & - x(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{ꝛc.}) \\ & + \tfrac{1}{2}x^2(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.}) \\ & - \tfrac{1}{3}x^3(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{ꝛc.}) \\ & + \tfrac{1}{4}x^4(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.}) \end{aligned}$$

ꝛc.

Die beyden ersten Reihen, womit x multiplicirt worden, haben zwar jede für sich genommen eine unendliche Summe, me, allein zusammen geben sie eine endliche Größe. Denn nimmt man von jeder n Glieder, so bekommt man

$$l(n + 1 - 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n}.$$

Nun haben wir oben §. 142.

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = C + ln$$

gefunden, und für C ergiebt sich 0,5772156649015325. Setzt man demnach $n = \infty$, so wird

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{\infty} = C + l\infty$$

und es ist daher der Werth jener beyden Reihen, wenn man sie ohne Ende fortsetzt

$$= l(\infty + 1) - C - l\infty = -C.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} lS = &- x \,.\, 0{,}5772156649015325 \\ &+ \tfrac{1}{2}x^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{rc.}\right) \\ &- \tfrac{1}{3}x^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{rc.}\right) \\ &+ \tfrac{1}{4}x^4\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{rc.}\right) \\ &\text{rc.} \end{aligned}$$

woraus sich ferner die Differenzialien einer jeden Ordnung leicht bestimmen lassen. Es ist nemlich

$$\begin{aligned} \frac{dS}{S} = &- dx \,.\, 0{,}5772156649015325 \\ &+ x\,dx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{rc.}\right) \\ &- x^2dx\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{rc.}\right) \\ &+ x^3dx\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{rc.}\right) \\ &\text{rc.} \end{aligned}$$

Ver-

Vereinigt man aber diese Reihen in eine, so wird

$$\frac{dS}{S} = -dx \,.\, 0{,}5772156649015325$$
$$+ \frac{xdx}{1(1+x)} + \frac{xdx}{2(2+x)} + \frac{xdx}{3(3+x)} + \frac{xdx}{4(4+x)} + \text{rc.}$$

Ist daher $x = 0$, so wird

$$\frac{dS}{S} = -dx \,.\, 0{,}4772156649015325$$

Aus dem ersten Ausdrucke aber ist in diesem Falle

$$\frac{dS}{S} = -\tfrac{1}{2}dx\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{rc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}dx\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{rc.}\right)$$
$$- \tfrac{1}{4}dx\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{rc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}dx\left(1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{rc.}\right)$$
$$\text{rc.}$$

§. 385.

Da die Differenzialien, welche wir bisher gesucht haben, vollständige Differenzialien sind, so lassen sich daraus auch die Differenzialien in besondern Fällen herleiten. Wenn daher in den gegebenen Ausdrücken solche Funktionen vorkommen, welche unbestimmt zu seyn scheinen, dergleichen im vorhergehenden Capitel untersucht worden sind: so kann man die Werthe derselben nach eben der Methode finden. Wir wollen auch dieses durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes

Erstes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks:

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x}}{x(x-1) \ldots (x-1)(2x-1)}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ gesetzt wird.

Setzt man

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = S$$

so ist nach §. 372.

$$S = x\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$- x^2\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ x^3\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

Da aber auch

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4+x} - \frac{1}{5+x} - \text{ꝛc.}$$

ist, so erhält man, wenn man jedes Glied der obern Reihe mit dem vorhergehenden der unteru verbindet,

$$S = 1 + \frac{x-1}{2(1+x)} + \frac{x-1}{3(2+x)} + \frac{x-1}{4(3+x)} + \text{ꝛc.}$$

und dieser Ausdruck ist bequemer, wenn $x = 1$ gesetzt werden soll. Es sey also $x = 1 + \omega$, so wird

$$S = 1 + \frac{\omega}{2(2+\omega)} + \frac{\omega}{3(3+\omega)} + \frac{\omega}{4(4+\omega)} + \text{ꝛc.}$$

oder

oder

$$S = 1 + \omega\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ꝛc.}\right) = 1 + \mathfrak{B}\omega$$

$$- \omega^2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{ꝛc.}\right) \quad - \mathfrak{C}\omega^2$$

$$+ \omega^3\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ꝛc.}\right) \quad + \mathfrak{D}\omega^3$$

ꝛc. ꝛc.

und es geht also der ganze Ausdruck, wenn man $x = 1 + \omega$ annimmt, in

$$\frac{1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \text{ꝛc.}}{\omega(1 + \omega)} - \frac{1}{\omega(1 + 2\omega)}$$

oder

$$\frac{\omega + \mathfrak{B}\omega + 2\mathfrak{B}\omega^2 - \mathfrak{C}\omega^2 - \text{ꝛc.}}{\omega(1 + \omega)(1 + 2\omega)} = \frac{1 + \mathfrak{B} + 2\mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega - \text{ꝛc.}}{(1 + \omega)(1 + 2\omega)}$$

über. Nimmt man daher $\omega = 0$, so wird der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 1$,

$$= 1 + \mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.}$$

und folglich da diese Reihe $= \frac{1}{6}\pi^2$ ist, $= \frac{1}{6}\pi^2$.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks:

$$\frac{2x - xx}{(x-1)^2} + \frac{\pi\pi x}{6(x-1)} - \frac{(2x-1)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x})}{x(x-1)^2}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ gesetzt wird.

Es sey

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = S, \text{ und } x = 1 + \omega$$

so wird, wie wir vorhin gefunden haben,

$S =$

$$S = 1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{D}\omega^3 - \text{etc.}$$

so daß

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \tfrac{1}{6}\pi\pi - 1$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}$$

etc.

ist. Setzt man daher $x = 1 + \omega$, so bekommt der gegebene Ausdruck die Form

$$\frac{1 - \omega\omega}{\omega\omega} + \frac{(1 + \mathfrak{B})(1 + \omega)}{\omega} - \frac{(1 + 2\omega)(1 + \mathfrak{B}\omega - \mathfrak{C}\omega^2 + \text{etc.}}{(1 + \omega)\omega^2}$$

und bringt man dieselbe auf einerley Nenner $\omega^2(1 + \omega)$, so erhält man

$$\frac{\begin{array}{c}1 + \omega - \omega^2 - \omega^3 + \omega + 2\omega^2 + \omega^3 + \mathfrak{B}\omega(1 + 2\omega + \omega\omega) \\ - 1 - \mathfrak{B}\omega + \mathfrak{C}\omega^2 - \mathfrak{D}\omega^3 - 2\omega - 2\mathfrak{B}\omega^2 + 2\mathfrak{C}\omega^3 - \text{etc.}\end{array}}{\omega^2(1 + \omega)}$$

oder

$$\frac{\omega^2 + \mathfrak{C}\omega^2 + \mathfrak{B}\omega^3 - 2\mathfrak{C}\omega^3 - \mathfrak{D}\omega^3 - \text{etc.}}{\omega^2(1 + \omega)}$$

Wenn also nunmehr $\omega = 0$ angenommen wird, so ergiebt sich $1 + \mathfrak{C}$. Es ist folglich der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 1$, $= 1 + \mathfrak{C}$, oder

$$= 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \text{etc.}$$

Da aber die Summe dieser Reihe weder durch die Logarithmen noch durch den Umfang des Kreises dargestellt warden kann, so läßt sich auch der gesuchte Werth bloß auf diese Art durch endliche Größen ausdrucken. Aus diesen beyden Beyspielen erhellet übrigens der Nutzen, welchen

die

die Lehre von den inexplicablen Funktionen in der Theorie der Reihen haben kann, hinlänglich.

§. 386.

Bisher haben wir angenommen, daß die unendlichsten Glieder der Reihe A, B, C, D, E, ꝛc. = 0 seyn, oder doch endlich verschwindende Differenzen haben, und es findet daher die erklärte Methode nicht statt, wenn diese Bedingungen mangeln. Wir wollen daher noch eine andere, von diesen Bedingungen unabhängige, Methode hinzufügen, welche die allgemeine Summirung der Reihen aus dem allgemeinen Gliede, die oben ausführlich erklärt worden ist, in die Hand giebt. Bedeuten demnach 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈, ꝛc. die Bernouillischen Zahlen, (§. 112.) und ist die gegebene inexplicable Funktion

$$\overset{1}{S = A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots \ldots + \overset{x}{X}$$

so läßt sich daraus, daß nach §. 130.

$$S = \int X dx + \tfrac{1}{2} X \frac{\mathfrak{A} dX}{1.2 dx^2} - \frac{\mathfrak{B} d^3 X}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^5 X}{1.2\ldots 6 dx^5}$$
$$- \text{ꝛc.}$$

ist, das Differenzial der Funktion S leicht darstellen. Es ist nemlich

$$dS = X dx + \frac{\mathfrak{A} ddX}{1.2.dx} - \frac{\mathfrak{B} d^4 X}{1.2.3.4 dx^3} + \frac{\mathfrak{C} d^6 X}{1.2\ldots 6 dx^5}$$
$$- \text{ꝛc.}$$

§. 387.

Ist aber eine arithmetische Progression mit einer geometrischen verbunden, in welchem Falle die unendlichsten Glieder nie beständige Differenzen bekommen, und also die erste Methode gar keine Anwendung zuläßt: so gewährt die

die §. 174. erklärte Methode Vortheil. Ist nemlich die Funktion

$$S = Ap + Bp^2 + Cp^3 + Dp^4 + \ldots + Xp^x$$

gegeben, so suche man die Werthe der Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 2c., so daß

$$\frac{p-1}{p-e^u} = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{2c.}$$

sey. Hat man dieselben gefunden, wie wir sie §. 170. mitgetheilt haben, so ist

$$S = \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \text{2c.}\right)$$

$$\pm C$$

oder einer beständigen Größe, welche die Summe $= 0$ giebt, wenn $x = 0$ gesetzt wird, oder irgend einem andern Falle ein Genüge thut. Nimmt man nun das Differenzial, so fällt diese beständige Größe weg, und es wird

$$dS = \frac{p}{p-1} \cdot p^x dx lp \left(X - \frac{\alpha dX}{dx} + \frac{\beta ddX}{dx^2} - \frac{\gamma d^3X}{dx^3} + \text{2c.}\right)$$

$$+ \frac{p}{p-1} \cdot p^x \left(dX - \frac{\alpha ddX}{dx} + \frac{\beta d^3X}{dx^2} - \frac{\gamma d^4X}{dx^3} + \text{2c.}\right)$$

oder

$$dS =$$

$$\frac{p^{x+1}}{p-1}\left(Xdxlp - (\alpha lp - 1)dX + (\beta lp - \alpha)\frac{ddX}{dx} - (\gamma lp - \beta)\frac{d^3X}{dx^2} + \text{2c.}\right)$$

und dieses ist das gesuchte Differenzial der Funktion S.

§. 388.

Ist die gegebene inexplicable Funktion ein Produkt, so kann man das Differenzial derselben, die Logarithmen der unendlichsten Glieder mögen beständige Differenzen haben oder nicht, allemal nach dieser Methode finden. Es sey nemlich

$$S = \overset{1}{A} . \overset{2}{B} . \overset{3}{C} . \overset{4}{D} \ldots . \overset{x}{X}$$

Da hieraus

$$lS = lA + lB + lC + lD + \ldots lX$$

fließt, so wird, wenn man die Bernoullischen Zahlen braucht,

$$lS = \int dx lX + \tfrac{1}{2} lX + \frac{\mathfrak{A}d . lX}{1 . 2dx} - \frac{\mathfrak{B}d^3 . lX}{1.2.3.4dx^3} + \text{etc.}$$

und dieser Ausdruck giebt, wenn man ihn differenziirt,

$$\frac{dS}{S} = dxlX + \tfrac{1}{2}d.lX + \frac{\mathfrak{A}dd.lX}{1.2dx} - \frac{\mathfrak{B}d^4.lX}{1.2.3.4dx^3}$$

$$+ \frac{\mathfrak{C}d^6.lX}{1.2\ldots6dx^5} - \frac{\mathfrak{D}d^8.lX}{1.2.3\ldots8dx^7} + \text{etc.}$$

Ist daher $X = x$, oder

$$S = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . x$$

so wird

$$\frac{dS}{S} = dxlx + \frac{dx}{2x} - \frac{\mathfrak{A}dx}{2xx} + \frac{\mathfrak{B}dx}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}dx}{6x^6} + \text{etc.}$$

und diese Formel wird, wenn x eine sehr große Zahl ist, mit mehrerer Bequemlichkeit gebraucht, als diejenigen, welche wir vorher gefunden haben.