Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Funfzehntes Capitel. Von den Werthen der Funktionen, die in gewissen Fællen unbestimmt zu seyn scheinen.

Funfzehntes Capitel.

Von den Werthen der Funktionen, die in gewissen Fällen unbestimmt zu seyn scheinen.

§. 355.

Wenn y irgend eine gebrochene Funktion von x, z. B. $\frac{P}{Q}$ ist, deren Zähler und Nenner, wenn man für x einen gewissen Werth setzt, zugleich verschwinden: so wird in diesem Falle der Bruch $\frac{P}{Q}$, welcher den Werth von y ausdruckt, $= \frac{0}{0}$, und kann alsdann eben sowohl eine endliche als eine unendliche, und in diesem Falle eben sowohl eine unendlich große als unendlich kleine Größe anzeigen. Auf diese Art aber läßt sich daraus der Werth von y in diesem Falle gar nicht erkennen, und scheint also unbestimmt zu seyn. Da indeß y in jedem andern Falle einen bestimmten Werth bekommt, wenn man für x eine bestimmte Größe setzt: so ist leicht einzusehen, daß auch in dem beschriebenen Falle keine Unbestimmtheit statt finden könne. Auch überzeugt man sich davon leicht, wenn man $y = \frac{aa - xx}{a - x}$ setzt. Diese Funktion giebt allerdings auch $y = \frac{0}{0}$, wenn

man

man $x = a$ setzt; allein da man Zähler und Nenner durch $a - x$ dividiren kann, und alsdann $y = a + x$ wird: so ist klar, daß für $x = a$, $y = 2a$ werde, so daß in diesem Falle $\frac{0}{0} = 2a$ gesetzt werden muß.

§. 356.

Da wir oben gesehen haben, daß die Nullen zu einander jegliches Verhältniß haben können: so erfordert das Verhältniß, welches der Zähler und Nenner in diesen Fällen zu einander haben, eine besondere Untersuchung. Gleichwohl zeigen die Nullen an sich nichts verschiedenes an, und man muß daher an ihrer Stelle die unendlich kleinen Größen brauchen. Denn wenn diese Größen in ihrer Bedeutung auch nicht von Null verschieden sind, so läßt sich doch aus ihren Funktionen, welche den Zähler und Nenner ausmachen, der Werth des Bruchs leicht schließen. Hat man z. B. den Bruch $\frac{adx}{bdx}$, so ist zwar im Grunde der Zähler sowohl als der Nenner $= 0$: allein gleichwohl fällt in die Augen, daß der Werth dieses Bruchs bestimmt und $= \frac{a}{b}$ sey. Ist hingegen der Bruch $\frac{adx^2}{bdx}$ gegeben, so ist sein Werth allerdings Null, so wie der Werth von $\frac{adx}{bdx^2}$ unendlich groß. Braucht man daher statt der Nullen, die öfters im Calcul vorkommen, die unendlich kleinen Größen, so genießt man davon den Vortheil, daß man das Verhältniß, welches jene Nullen gegen einander haben, zu erforschen im Stande ist, und allen Zweifel wegen der Bedeutung solcher Ausdrücke verschwinden sieht.

§. 357.

§. 357.

Um dies deutlicher zu machen sey $y = \frac{P}{Q}$, so daß Zähler und Nenner verschwinden, wenn man $x = a$ setzt. Um aber diese Nullen, welche sich unter einander nicht vergleichen lassen würden, zu vergleichen, wollen wir $a + dx$ für x schreiben, und dies ist im Grunde eben so viel, als ob man a für x setzte, weil $dx = 0$ ist. Da also durch die Substitution $x + dx$ für x die Funktionen P und Q in $P + dP$ und $Q + dQ$ übergehen: so wird die Substitution $x + dx$ für x schon verrichtet, wenn man in diesen Ausdrücken allenthalben a für x setzt, und in diesem Falle verschwinden, der Voraussetzung gemäß, P und Q. Auf diese Art erhält man aus dem Bruche $\frac{P}{Q}$ durch die Substitution $a + dx$ für x den Bruch $\frac{dP}{dQ}$, und es druckt folglich dieser Bruch den Werth der Funktion $y = \frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$ aus. Es kann aber dieser Ausdruck nicht weiter unbestimmt seyn, wenn man die wahren Differenzialien der Funktionen P und Q nimmt. Denn thut man dieses, so können die Differenzialien dP und dQ nie verschwinden, weil sie durch die Potestäten von dx ausgedruckt werden, wenn solches durch das Differenzial dx selbst nicht geschieht. Findet man demnach $dP = Rdx^m$ und $dQ = Sdx^n$, so ist der Werth der Funktion $y = \frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$ $= \frac{Rdx^m}{Sdx^n}$, und also ein endlicher und $= \frac{R}{S}$, wenn $m = n$, hingegen wenn $m > n$ ist, in der That $= 0$, und $= \infty$ wenn $m < n$ ist.

§. 358.

Wenn daher eine gebrochene Funktion $\frac{P}{Q}$ gegeben ist, deren Zähler und Nenner in einem bestimmten Falle, z. B. wenn $x = a$ gesetzt wird, zugleich verschwinden: so findet man den Werth dieses Bruchs für $x = a$ nach folgender Regel:

Man suche die Differenzialien der Größen P und Q für den Fall $x = a$, und setze dieselben statt der Größen P und Q selbst. Ist dies geschehen, so druckt der Bruch $\frac{dP}{dQ}$ den gesuchten Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ aus.

Wenn die Differenzialien dP und dQ, nach der gewöhnlichen Methode gesucht, weder verschwinden noch unendlich werden, wenn man $x = a$ setzt, so kann man diese Methode beybehalten; werden sie aber entweder beyde $= 0$ oder beyde $= \infty$, so muß man die Methode befolgen, welche in dem vorhergehenden Capitel erklärt worden ist. Oft wird der Calcul beträchtlich abgekürzt, wenn man zuvor $x - a = t$ oder $x = a - t$ setzt, damit man einen Bruch $\frac{P}{Q}$ erhalte, dessen Zähler und Nenner für den Fall $t = 0$ verschwinden. Man findet nemlich alsdann die Differenzialien dP und dQ, wenn man allenthalben dt für t setzt.

Erstes Exempel.

Den Werth der Funktion $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$ für den Fall $t = 0$ zu finden.

Da in diesem Falle Zähler und Nenner verschwinden, so setz man dt für t, wodurch man für den gesuchten Werth der gegebenen Funktion den Ausdruck $\frac{b - \sqrt{(bb - dt^2)}}{dt^2}$ bekommt. Nun ist $\sqrt{(bb - dt^2)} = b - \frac{dt^2}{2b}$ und dadurch verwandelt sich jener Bruch in $\frac{dt^2}{2bdt^2} = \frac{1}{2b}$. Es hat demnach der Bruch $\frac{b - \sqrt{(bb - tt)}}{tt}$, wenn $t = 0$ wird, den Werth $\frac{1}{2b}$.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{\sqrt{(aa + ax + xx)} - \sqrt{(aa - ax + xx)}}{\sqrt{(a + x)} - \sqrt{(a - x)}}$$

für den Fall $x = 0$ zu finden.

Hier kann man wieder dx für x setzen, und da

$$\sqrt{(aa + adx + dx^2)} = a + \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a}$$

$$\sqrt{(aa - adx + dx^2)} = a - \tfrac{1}{2}dx + \frac{3dx^2}{8a}$$

und

$$\sqrt{(a + dx)} = \sqrt{a} + \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

$$\sqrt{(a - dx)} = \sqrt{a} - \frac{dx}{2\sqrt{a}}$$

ist: so wird der Zähler $= dx$, und der Nenner $\frac{dx}{\sqrt{a}}$. Hiernach ist der gesuchte wahre Werth des gegebenen Bruchs $= \sqrt{a}$.

Drittes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{(2ax - aa)}}{xx - 2ax - aa + 2a\sqrt{(2ax - xx)}}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Wenn man die Differenzialien auf die gewöhnliche Art sucht und an die Stelle des Zählers und Nenners setzt, so bekommt man

$$\frac{3xx - 8ax + 7a^2 - 2a^3 : \sqrt{(2ax - aa)}}{2x - 2a + 2a(a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}}$$

und der Zähler und Nenner dieses Bruchs verschwinden wieder, wenn man $x = a$ setzt. Man muß daher an ihrer Stelle von neuem die Differenzialien nehmen, wodurch man

$$\frac{6x - 8a + 2a^4 : (2ax - aa)^{\frac{3}{2}}}{2 - 2a^3 : (2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$$

findet. Da aber auch bey diesem Bruche der Zähler sowohl als der Nenner $= 0$ wird, wenn man $x = a$ setzt: so muß man abermals die Differenzialien für sie setzen, und findet dadurch

$$\frac{6 - 6a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{6a^3(a - x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1 - a^5 : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}{a^3(a - x) : (2ax - xx)^{\frac{5}{2}}}$$

Aus gleichem Grunde muß man endlich auch hier so verfahren, und gelangt alsdann zu dem Bruche

$$\frac{5a^6 : (2ax - aa)^{\frac{7}{2}}}{-(5a^5 - 8a^4x + 4a^3xx) : (2ax - xx)^{\frac{7}{2}}}$$

Setzt man nun hier a für x, so bekommt man den bestimmten Bruch $\frac{5 : a}{-1 : a^2} = -5a$, und dieses ist der gesuchte Werth des gegebenen Bruchs.

Bedient

Bedient man sich vor dieser Untersuchung der Substitution $x = a + t$, so wird dadurch der gegebene Bruch in folgenden verwandelt:

$$\frac{2a^3 + 2a^2t - att + t^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2at)}}{-2aa + tt + 2a\sqrt{(aa - tt)}}$$

Da derselbe $= \frac{0}{0}$ wird, wenn man $t = 0$ setzt, so schreibe man dt für t. Diese Behandlung giebt

$$\frac{2a^3 + 2a^2dt - adt^2 + dt^3 - 2a^2\sqrt{(aa + 2adt)}}{-2aa + dt^2 + 2a\sqrt{(aa - dt^2)}}$$

Nun verwandele man die Irrationalgrößen in Reihen, und setze diese Reihen so weit fort, bis die Glieder gegen die rationalen Glieder in dem Bruche verschwinden. Auf diese Art findet man

$$\sqrt{(aa + 2adt)} = a + dt - \frac{dt^2}{2a} + \frac{dt^3}{2aa} - \frac{5dt^4}{8a^3}$$

$$\sqrt{(aa - dt^2)} = a - \frac{dt^2}{2a} - \frac{dt^4}{8a^3}$$

und durch den Gebrauch dieser Werthe

$$\frac{5dt^4 : 4a}{-dt^4 : 4aa} = -5a$$

Dieses ist eben der vorhin schon gefundene Werth des gegebenen Bruchs.

Viertes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{a + \sqrt{(2aa - 2ax)} - \sqrt{(2ax - xx)}}{a - x + \sqrt{(aa - xx)}}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Setzt man in die Stelle des Zählers und Nenners dieses Bruchs die Differenzialien derselben, so bekommt man folgenden für den Fall $x = a$ ihm gleichen Bruch:

$$\frac{-a : \sqrt{(aa - 2ax)} - (a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}}{-1 - x : \sqrt{(aa - xx)}}$$

dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ unendlich werden. Multiplicirt man aber beyde mit $- \sqrt{(a - x)}$, so bekommt man

$$\frac{a : \sqrt{2a} + (a - x)^{\frac{3}{2}} : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(a - x)} + x : \sqrt{(a + x)}}$$

welcher Bruch für den Fall $x = a$ den bestimmten Werth $\frac{a : \sqrt{2a}}{a : \sqrt{2a}} = 1$ giebt, und dies ist demnach der Werth des gegebenen Bruchs für den Fall $x = a$.

§. 359.

Hat man also einen Bruch $\frac{P}{Q}$, dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verschwinden, so läßt sich sein Werth nach den gewöhnlichen Regeln der Differenziation angeben, und man hat nicht nöthig, seine Zuflucht zu den im vorhergehenden Capitel erklärten Differenzialien zu nehmen. Braucht man nemlich die Differenzialien, so wird der Bruch $\frac{P}{Q}$ für den Fall $x = a$ dem Bruche $\frac{dP}{dQ}$ gleich, und wenn der Zähler und Nenner dieses Bruchs endliche Werthe haben, so erkennt man daraus sogleich den Werth des gegebenen Bruchs; wird aber einer davon $= 0$, indem der andere endlich bleibt, so ist der gegebene Bruch entweder $= 0$ oder $= \infty$, je nachdem entweder der Zähler oder der Nenner $= 0$ wird. Werden aber Zähler und Nenner zugleich $= \infty$, und dies geschieht, wenn sie

durch

durch Größen dividirt werden, die in dem Falle $x = a$ verschwinden: so bringt man diese Unbequemlichkeit dadurch weg, daß man den Zähler und Nenner mit diesen Divisoren multiplicirt, wie z. B. im vorhergehenden Exempel. Verschwinden Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ zugleich, so muß man, wie vorhin, von neuem die Differenzialien nehmen, um den Bruch $\frac{ddP}{ddQ}$ zu erhalten, welcher für $x = a$ dem gegebenen noch gleich seyn wird. Sollte auch dieser Bruch $= \frac{0}{0}$ werden, so muß man dafür $\frac{d^3P}{d^3Q}$ nehmen, u. s. w. bis man zu einem Bruche gelangt, der einen bestimmten Werth giebt, einen endlichen entweder oder einen unendlichen, entweder unendlich großen oder unendlich kleinen. So mußte man im dritten Exempel bis zu $\frac{d^4P}{d^4Q}$ fortgehen, ehe man den Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ bestimmen konnte.

§. 360.

Der Nutzen dieser Untersuchung zeigt sich bey der Bestimmung der Summen der Reihen, welche wir oben im zweyten Capitel §. 22. gefunden haben, für den Fall, wenn $x = 1$ gesetzt wird. Nach dem angeführten Orte ist nemlich

$$x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$$

$$x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n-1} = \frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$$

$$x + 3x^3 + 5x^5 + \ldots + (2n - 1)x^{2n-1}$$
$$=$$
$$\frac{x + x^3 - (2n + 1)x^{2n+1} + (2n - 1)x^{2n+3}}{(1 - xx)^2}$$

$$x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2 x$$
$$=$$
$$\frac{x + x^2 - (n + 1)^2 x^{n+1} + (2nn + 2n - 1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{1 - x^3}$$

rc.

Sollen nun die Summen dieser Reihen für den Fall gefunden werden, wenn $x = 1$ ist, so verschwinden in den Ausdrücken dafür sowohl der Zähler als der Nenner, und es lassen sich daher diese Summen nach der erklärten Methode finden. Da sie schon sonst bekannt sind, so kann man sie als Bestätigungs-Beyspiele der erwähnten Methode betrachten.

Erstes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Es giebt aber dieser Bruch die Summe der Reihe $1 + 1 + 1 + 1 \ldots + 1$, wenn sie aus n Gliedern besteht, und ist daher allemal $= n$.

Da für $x = 1$ Zähler und Nenner verschwinden, so setze man dafür die Differenzialien, wodurch man

$$\frac{1 - (n + 1)x^n}{-1}$$

bekommt, welcher Ausdruck für $x = 1$ die Zahl n giebt.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x - x^{2n+1}}{1 - xx}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Es ist aber derselbe als die Summe der Reihe $1 + 1 + 1 \ldots + 1$, wenn dieselbe bis zum nten Gliede fortgesetzt wird, $= n$.

Durch die Substitution der Differenzialien bekommt man statt des gegebenen Bruchs

$$\frac{1 - (2n + 1)x^{2n}}{- 2n}$$

und der Werth dieses Bruchs ist n, wenn man $x = 1$ nimmt.

Drittes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x - (n + 1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1 - x)^2}$ für den Fall $x = 1$ zu finden. Da dieser Bruch die Summe der Reihe $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$ vorstellt, so ist jener Werth bekanntermaßen $= \frac{nn + n}{2}$.

Durch die Substitution der Differenzialien bekommt man den Bruch

$$\frac{1 - (n + 1)^2x^n + n(n + 2)x^{n+1}}{- 2(1 - x)}$$

Da indeß der Zähler und Nenner dieses Bruchs für den Fall $x = 1$ verschwinden, so muß man von neuem die Differenzialien nehmen. Dadurch bekommt man

$$- \frac{n(n + 1)^2x^{n-1} + n(n + 1)(n + 2)x^n}{2}$$

also für den Fall $x = 1$, $\frac{n(n + 1)}{2} = \frac{nn + n}{2}$.

Viertes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x + x^3 - (2n + 1)x^{2n+1} + (2n - 1)x^{2n+3}}{1 - xx^2}$$

für den Fall $x = 1$ zu finden. Da dieser Bruch die Summe der Reihe $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1)$ ausdruckt, so ist, wie bekannt, jener Werth $= nn$.

Durch die Substitution der Differenzialien bekommt man den Bruch

$$\frac{1 + 3xx - (2n + 1)^2 x^{2n} + (2n - 1)(2n + 3)x^{2n+2}}{-4x(1 - xx)}$$

und da derselbe, wenn man $x = 1$ setzt, $= \frac{0}{0}$ wird, so muß man von neuem die Differenzialien nehmen. Hierdurch bekommt man

$$\frac{6x - 2n(2n + 1)^2 x^{2n-1} + (2n - 1)(2n + 2)(2n + 3)x^{2n+1}}{-4 + 12xx}$$

und dieser Bruch wird, wenn man $x = 1$ setzt,

$$\frac{6 - 2n(2n + 1)^2 + (2n - 1)(2n + 2)(2n + 3)}{8} = nn.$$

Fünftes Exempel.

Den Werth des Bruchs:

$$\frac{x + x^2 - (n + 1)^2 x^{n+1} + (2nn + 2n - 1)x^{n+2} - nnx^{n+3}}{(1 - x)^3}$$

für den Fall $x = 1$ zu finden. Da derselbe die Summe der Reihe $1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$ ausdruckt, so ist er, wie bekannt, $= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Nimmt man die Differenzialien des Zählers und Nenners, so erhält man

$1 +$

$$\left.\begin{matrix} 1 + 2x - (n + 1)^3 x^n \\ + (n + 2)(2nn + 2n - 1) x^{n+1} \\ - nn(n + 3) x^{n+2} \end{matrix}\right\} : -3(1 - x)^2$$

und da in diesem Bruche Zähler und Nenner $= 0$ werden, wenn man $x = 1$ setzt, so muß man von neuem die Differenzialien nehmen. Allein der Bruch, welchen man dadurch erhält, nemlich

$$\left.\begin{matrix} 2 - n(n + 1) x^{n-1} \\ + (n + 1)(n + 2)(2nn + 2n - 1) x^n \\ - n^2(n + 2)(n + 3) x^{n+1} \end{matrix}\right\} : 6(1 - x)$$

hat eben die Unbequemlichkeit, und man muß daher durch abermalige Substitution der Differenzialien zu dem Bruche

$$\left.\begin{matrix} - n(n - 1)(n + 1)^3 x^{n-2} \\ + n(n + 1)(n + 2)(2nn + 2n - 1) x^{n-1} \\ - n^2(n + 1)(n + 2)(n + 3) x^n \end{matrix}\right\} : -6$$

zu gelangen suchen, der durch die Substitution $x = 1$ in

$$\frac{-n(n - 1)(n + 1)^3 + n(n + 1)(n + 2)(nn - n - 1)}{-6} =$$

$$\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$

übergeht, welches eben der Werth ist, den man schon auf andern Wegen als den wahren Werth kennen gelernt hat.

Sechstes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\dfrac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}}$ für den Fall $x = 1$ zu finden.

Da dieser Bruch ein Produkt aus den beyden Brüchen $\dfrac{x^m}{1 + x^p} \cdot \dfrac{1 - x^n}{1 - x^p}$ ist, und der erste für den Fall $x = 1$ den Werth $\frac{1}{2}$ hat: so braucht man nur den Werth des andern Bruchs für eben den Fall zu suchen. Da man dafür beym Gebrauch der Differenzialien $\frac{nx^{n-1}}{px^{p-1}} = \frac{n}{p}$ erhält, so ist der gesuchte Werth des gegebenen Bruchs $= \frac{n}{2p}$. Eben diesen Werth findet man, wenn man unmittelbar von dem gegebenen Bruche die Differenzialien nimmt. Dadurch erhält man nemlich

$$\frac{mx^{m-1} - (m + n)x^{m+n-1}}{-2px^{2p-1}}$$

und dieser Bruch giebt, wenn man $x = 1$ setzt, $\frac{-n}{-2p} = \frac{n}{2p}$ wie vorhin.

§. 361.

Eben dieselbe Methode muß man befolgen, wenn entweder der Zähler oder Nenner des Bruchs $\frac{P}{Q}$, oder beyde transcendente Größen sind. Auch dieses wollen wir an einigen Beyspielen erläutern.

Erstes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{a^n - x^n}{la - lx}$ für den Fall $x = a$ zu finden.

Durch die Substitution der Differenzialien erhält man sogleich den Bruch $-\frac{nx^{n-1}}{-1 : x} = nx^n$, und der Werth desselben für $x = a$ ist na^n.

Zwey-

Zweytes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ für den Fall $x=1$ zu finden.

Nimmt man die Differenzialien des Zählers und Nenners, so bekommt man $\frac{1:x}{-1:2\sqrt{(1-x)}} = \frac{-2\sqrt{(1-x)}}{x}$; und da der Werth dieses Bruchs, wenn man $x=1$ setzt, $=0$ wird, so folgt, daß der Bruch $\frac{lx}{\sqrt{(1-x)}}$ für den Fall $x=1$ verschwinde.

Drittes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{a-x-ala+alx}{a-\sqrt{(2ax-xx)}}$ für den Fall $x=a$ zu finden, in welchem der Zähler und Nenner $=0$ werden.

Durch die Substitution der Differenzialien in dem Zähler und Nenner findet man

$$\frac{-1+a:x}{-(a-x):\sqrt{(2ax-xx)}} = \frac{(a-x)\sqrt{(2ax-xx)}}{-x(a-x)}$$

Nun wird zwar auch der Zähler und Nenner dieses Bruchs $=0$, wenn man $x=a$ setzt; allein da beyde durch $a-x$ theilbar sind, so erhält man dafür durch die Division mit $a-x$

$$-\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

und da der Werth dieses Bruchs für $x=a$, $=-1$ wird, so ist auch für eben diesen Fall der Werth des gegebenen Bruchs $=-1$.

Viertes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{e^x - e^{-x}}{l(1+x)}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Durch die Substitution der Differenzialien bekommt man den Bruch $\frac{e^x + e^{-x}}{1:(1+x)}$, welcher für $x = 0$ den Werth 2 giebt.

Fünftes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{e^x - 1 - l(1+x)}{xx}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Setzt man statt des Zählers und Nenners die Differenzialien, so erhält man den Bruch $\frac{e^x - 1:(1+x)}{2x}$, welcher aber, wenn man $x = 0$ setzt, $= \frac{0}{0}$ wird. Man muß also durch abermalige Substitution der Differenzialien den Bruch $\frac{e^x + 1:(1+x)^2}{2}$ suchen, welcher für $x = 0$ den Bruch $\frac{1+1}{2} = 1$ giebt. Eben dieses findet man, wenn man sogleich $0 + dx$ für x setzt. Da nemlich $e^{dx} = 1 + dx + \frac{1}{2}dx^2 +$ 2c. und $l(1+dx) = dx - \frac{1}{2}dx^2 +$ 2c. ist: so erhält man auf diesem Wege

$$\frac{e^{dx} - 1 - l(1+dx)}{dx^2} = \frac{dx^2}{dx^2} = 1.$$

Sechs-

Sechstes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x^n}{lx}$ für den Fall $x = \infty$ zu finden.

Um diesen Bruch auf die Form zu bringen, wobey er in dem angenommenen Falle in $\frac{0}{0}$ übergeht, schreibe man ihn auf diese Art $\frac{1 : lx}{1 : x^n}$. Ferner setze man $x = \frac{1}{y}$, so daß für den Fall $x = \infty$, $y = 0$ werde. Hiedurch bekommt man den Bruch $-\frac{1 : ly}{y^n}$ für den Fall $y = 0$ zu untersuchen. Nimmt man nun die Differenzialien, so findet man $\frac{1 : y(ly)^2}{ny^{n-1}} = \frac{1 : (ly)^2}{ny^n}$. Allein dieser Bruch wird $= \frac{0}{0}$, wenn man $y = 0$ setzt, und eben dieses findet bey den Brüchen $\frac{-2 : (ly)^3}{n^2 y^n}$ und $\frac{6 : (ly)^4}{n^3 y^n}$ u. s. f. statt, welche man durch fortgesetzte Substitution der Differenzialien erhält. Um also gleichwohl den gesuchten Werth zu finden, sey $s = -\frac{1 : ly}{y^n}$, wenn man $y = 0$ setzt. Da in diesem Falle auch $s = \frac{1 : (ly)^n}{ny^n}$ wird; so erhält man aus jener Gleichung $ss = \frac{1 : (ly)^2}{y^{2n}}$, und diese Gleichung durch die zweyte dividirt giebt $s = \frac{ny^n}{y^{2n}} = \frac{n}{y^n}$. Hieraus erkennt man, daß $s = \infty$ wird, wenn y in 0 übergeht, und es ist daher der Werth des Bruchs $-\frac{1 : ly}{y^n}$ unendlich groß,

wenn

wenn $y = 0$ wird, so daß, wenn man $y = dx$ setzt, $\frac{1}{ldx}$ zu dx^n ein unendliches Verhältniß hat, wie bereits oben berührt worden ist.

Siebentes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x^n}{e^{-1:x}}$ für den Fall $x = 0$ zu finden, in welchem sowohl der Zähler als der Nenner verschwindet.

Es sey für den erwähnten Fall $\frac{x^n}{e^{-1:x}} = s$, so wird, wenn man die Differenzialien nimmt, $s = \frac{nx^{n-1}}{e^{-1:x}:xx}$ und da dieser Bruch, so wie auch alle übrige, welche man durch die Substitution der Differenzialien finden kann, für den Fall $x = 0$, $= \frac{0}{0}$ wird: so muß man wieder zu dem vorhin gebrauchten Hülfsmittel seine Zuflucht nehmen. Nun giebt die erste Gleichung

$$x^n = e^{-1:x}s, \text{ und } x^{n(n+1)} = e^{-(n+1):x}s^{n+1}$$

die andere aber

$$x^{n+1} = e^{-1:x}s : n, \text{ also } x^{n(n+1)} = e^{-n:x}s^n : n^n$$

und aus diesen beyden Gleichungen erhält man

$$e^{-1:x}sn^n = 1, \text{ und also } s = \frac{1}{n^n e^{-1:x}} = \infty$$

wenn $x = 0$ gesetzt wird. Setzt man demnach $x = dx$, so hat dx^n zu $e^{-1:dx}$ ein unendliches Verhältniß, was man auch für n für eine endliche Zahl setzen mag, und es ist daher $e^{-1:dx}$ eine unendlich kleine Größe und dx^m homogen, wenn m eine unendlich große Zahl bedeutet.

Achtes

Achtes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{1 - \sin.x + \cos.x}{\sin.x + \cos.x - 1}$ für den Fall zu finden, wenn $x = \frac{\pi}{2}$ oder ein Bogen von 90° wird.

Durch die Substitution der Differenzialien erhält man den Bruch $-\frac{\cos.x - \sin.x}{\cos.x - \sin.x}$, welcher für den Fall, wenn $x = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, da alsdenn $\sin.x = 1$, und $\cos.x = 0$, in 1 übergeht, so daß 1 der gesuchte Werth des gegebenen Bruchs ist. Eben dieses erkennet man ohne Differenziation. Denn da $\cos.x = \sqrt{(1 + \sin.x)} + \sqrt{(1 - \sin.x)}$ ist, so erhält man dadurch statt des gegebenen Bruchs $\frac{\sqrt{(1 - \sin.x)} + \sqrt{(1 + \sin.x)}}{\sqrt{(1 + \sin.x)} - \sqrt{(1 - \sin.x)}}$, und dieser Bruch wird offenbar $= 1$, wenn $\sin.x = 1$ wird.

Neuntes Exempel.

Den Werth des Bruchs $\frac{x^x - x}{1 - x + lx}$ für den Fall $x = 1$ zu finden.

Setzt man statt des Zählers und Nenners die Differenzialien, so bekommt man den Bruch

$$\frac{x^x(1 + lx) - 1}{-1 + 1 : x} = \frac{0}{0} \text{ für } x = 1.$$

Dagegen giebt die abermalige Substitution der Differenzialien $\frac{x^x(1 + lx)^2 + x^x : x}{-1 : xx}$, und dieser Bruch wird $= -2$, wenn man $x = 1$ setzt, daher denn auch der

Werth

Werth des gegebenen Bruchs $= -2$ ist, wenn $x = 1$ angenommen wird.

§. 362.

Da es hier unsere Absicht ist, alle Ausdrücke zu betrachten, die in gewissen Fällen unbestimmt zu seyn scheinen: so müssen wir außer den Brüchen $\frac{P}{Q}$, deren Zähler und Nenner in gewissen Fällen verschwinden, auch derer Erwähnung thun, deren Zähler und Nenner in gewissen Fällen unendlich groß werden, weil die Werthe dieser Brüche ebenfalls unbestimmt zu seyn scheinen können. Sind nemlich P und Q solche Funktionen von x, daß sie beyde für einen bestimmten Fall $x = a$ unendlich werden: so bekommt der Bruch $\frac{P}{Q}$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$; und da die unendlichen Größen eben sowohl als die Nullen jedes Verhältniß zu einander haben können, so läßt sich daraus der Werth des Bruchs $\frac{P}{Q}$ auf keine Weise erkennen. Indeß läßt sich dieser Fall auf den vorhergehenden zurückführen, wenn man den Bruch $\frac{P}{Q}$ durch $\frac{1 : Q}{1 : P}$ ausdruckt, wo der Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verschwinden, und also der Werth dieses Bruchs nach der beschriebenen Methode gefunden werden kann. Aber es ist deswegen diese Verwandlung nicht schlechterdings nothwendig. Denn setzt man für x nicht a sondern $a + dx$, so bekommt man die unendlichen Werthe nicht durch ∞ ausgedruckt, sondern in Darstellungen, wie $\frac{1}{dx}$ oder $\frac{A}{dx^n}$; und ob gleich diese Ausdrücke ebenfalls unendliche Größen anzeigen, so lassen sie sich doch unter einander vergleichen, und also auch aus ihnen der wahre Werth der Funktion $\frac{P}{Q}$ leicht finden.

§. 363.

Eben so gehören hieher die Produkte aus zwey Faktoren, wovon der eine, wenn man $x = a$ setzt, verschwindet, und der andere unendlich wird. Denn da man jede Größe durch das Produkt $0 . \infty$ darstellen kann, so hat man darin allerdings keinen bestimmten Werth. Ist aber PQ ein Produkt, wo, wenn man $x = a$ setzt, $P = 0$ und $Q = \infty$ wird, so findet man den Werth desselben nach den erklärten Regeln, wenn man $Q = \frac{1}{R}$ setzt, weil alsdann das Produkt PQ in den Bruch $\frac{P}{R}$ verwandelt wird, dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = a$ verschwinden. Sollte z. B. der Werth des Produkts $(1 - x)\text{tang.}\frac{\pi x}{2}$ für den Fall $x = 1$, wo $1 - x = 0$, und $\text{tang.}\frac{\pi x}{2} = \infty$, wird, gesucht werden: so verwandele man dieses Produkt in den Bruch $\frac{1 - x}{\text{cot.}\frac{1}{2}\pi x}$, dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = 1$ verschwinden. Da das Differenzial des Zählers $= -dx$, und das Differenzial des Nenners $= -\frac{\pi dx : 2}{(\text{sin.}\frac{1}{2}\pi x)^2}$ ist, so wird der Werth des gegebenen Bruchs für den Fall $x = 1$

$$\frac{2}{\pi}\text{sin.}\frac{\pi x}{2} . \text{sin.}\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$$

weil $\text{sin.}\frac{\pi}{2} = 1$ ist.

§. 364.

Insbesondere aber gehören hieher die Ausdrücke, welche bey einem bestimmten Werthe für x die Form $\infty - \infty$ annehmen. Denn da zwey unendliche Größen um jede endliche Größe von einander unterschieden seyn können, so erhellet, daß jene Ausdrücke nicht eher einen bestimmten Werth anzeigen, als bis man diesen Unterschied angeben kann. Es findet aber ein Fall dieser Art statt, wenn eine Funktion $P - Q$ gegeben ist, wo, wenn man $x = a$ setzt, sowohl P als Q unendlich wird, und hier ist es nicht gleich leicht, den gesuchten Werth nach den erklärten Regeln zu finden. Denn nimmt man auch $P - Q = f$, und setzt $e^{P-Q} = e^f$, so daß $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$ wird, wo für $x = a$ sowohl der Zähler e^{-Q} als der Nenner e^{-P} verschwindet: so erhält man nach der erklärten Methode $e^f = \frac{e^{-Q}dQ}{e^{-P}dP}$ und also, da $e^f = \frac{e^{-Q}}{e^{-P}}$ ist, $1 = \frac{dQ}{dP}$, woraus sich aber der Werth von f nicht finden läßt. Sind P und Q algebraische Größen, so können diese nicht anders unendlich werden, als wenn sie Brüche mit verschwindenden Nennern sind; und findet dieses bey P und Q statt, so lassen sich die Brüche $P - Q$ in einen zusammenziehen, dessen Nenner ebenfalls verschwindet. Wird nun in diesem Falle auch der Zähler $= 0$, so kann man die bereits beschriebene Methode brauchen; verschwindet aber der Zähler nicht, so ist der gesuchte Werth eine unendliche Größe im eigentlichen Verstande. Soll z. B. der Werth des Ausdrucks $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-xx}$ für den Fall $x = 1$ gesucht werden,

so

so erhält man für diesen Ausdruck $\frac{1 - x}{1 - xx} = \frac{-1}{1 + xx}$, und darnach ist der gesuchte Werth $= -\frac{1}{2}$.

§. 365.

Wenn aber P und Q transcendente Funktionen sind, so ist diese Verwandlung meistens mit sehr beschwerlichen Rechnungen verknüpft. In diesem Falle bedient man sich daher besser der directen Methode, und setzt statt $x = a$, wobey beyde Größen P und Q unendlich werden würden, $x = a + \omega$, so daß ω eine unendlich kleine Größe bedeutet und mit dx verwechselt werden kann. Wird hierdurch $P = \frac{A}{\omega} + B$, und $Q = \frac{A}{\omega} + C$, so ist offenbar, daß $P - Q = B - C$ ist, und diese Differenz ist eine endliche Größe. Diese Art den Werth von dergleichen Funktionen zu finden, mögen folgende Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $\frac{x}{x - 1} - \frac{1}{lx}$ für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ gesetzt wird.

Da sowohl $\frac{x}{x - 1}$ als $\frac{1}{lx}$ unendlich werden, wenn man $x = 1$ nimmt, so setze man $x = 1 + \omega$, wodurch der gegebene Ausdruck in folgenden verwandelt wird

$$\frac{1 + \omega}{\omega} - \frac{1}{l(1 + \omega)}$$

Nun ist

$l(1 + \omega) = \omega - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{3}\omega^3 - rc. = \omega(1 - \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\omega^2 - rc.)$

 und

und man hat also

$$\frac{(1+\omega)(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{etc.})-1}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{etc.}} = \frac{\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{6}\omega^2+\text{etc.}}{\omega(1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{etc.})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\omega+\text{etc.}}{1-\frac{1}{2}\omega+\frac{1}{3}\omega^2-\text{etc.}}$$

Nimmt man folglich ω unendlich klein oder $=0$, so wird offenbar der gesuchte Werth $=\frac{1}{2}$.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ für den Fall $x=0$ zu finden, vorausgesetzt, daß e die Zahl bedeute, deren hyperbolischer Logarithme $=1$ ist, und π das Verhältniß des halben Umfangs des Kreises zum Halbmesser desselben ausdrucke.

Der Ausdruck $\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ ist der Ausdruck der Summe der Reihe

$$\frac{1}{1+xx}+\frac{1}{4+xx}+\frac{1}{9+xx}+\frac{1}{16+xx}+\frac{1}{25+xx}+\text{etc.}$$

und man muß also, wenn man $x=0$ setzt, die Summe der Reihe

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

finden, welche, wie bekannt $=\frac{\pi\pi}{6}$ ist. Setzt man aber $x=0$, so scheint der Ausdruck $\frac{\pi x - 1}{2xx} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}$ höchst unbestimmt zu seyn, weil beyde Glieder desselben unendlich werden. Man setze daher $x=\omega$, wodurch $\frac{\pi x - 1}{2xx}$

in $-\frac{1}{2\omega^2} + \frac{\pi}{2\omega}$ übergeht. Da ferner $e^{2\pi\omega} - 1 = 2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 +$ ꝛc. ist, so erhält man für das andere Glied $\frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}$

$$\frac{\pi}{\omega(2\pi\omega + 2\pi^2\omega^2 + \frac{4}{3}\pi^3\omega^3 + \text{ꝛc.})} = \frac{1}{2\omega^2(1 + \pi\omega + \frac{2}{3}\pi^2\omega^2 + \text{ꝛc.})}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{1 + \pi\omega + \frac{2}{3}\pi^2\omega^2 + \text{ꝛc.}} = 1 - \pi\omega + \frac{1}{3}\pi^2\omega^2 + \text{ꝛc.}$$

und es wird folglich das letzte Glied $= \frac{1}{2\omega^2} - \frac{\pi}{2\omega} + \frac{1}{6}\pi^2$ — ꝛc. und addirt man hierzu das erste Glied, so bekommt man $\frac{1}{6}\pi^2$, welches der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 0$ ist.

Eben diesen Werth kann man nach der Methode finden, welche wir bey den Brüchen gebraucht haben, deren Zähler und Nenner in gewissen Fällen verschwinden, indem sich der gegebene Ausdruck in folgenden Bruch verwandeln läßt,

$$\frac{\pi x e^{2\pi x} - e^{2\pi x} + \pi x + 1}{2xxe^{2\pi x} - 2xx}$$

dessen Zähler und Nenner für $x = 0$ ebenfalls $= 0$ werden. Nimmt man also die Differenzialien, so bekommt man

$$\frac{\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x} - 2\pi e^{2\pi x} + \pi}{4xe^{2\pi x} + 4\pi xxe^{2\pi x} - 4x}$$

oder

$$\frac{\pi - \pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi x e^{2\pi x}}{4xe^{2\pi x} + 4xxe^{2\pi x} - 4x}$$

wo aber für $x = 0$ Zähler und Nenner wieder verschwinden. Man muß daher nochmals die Differenzialien substituiren, und findet alsdann

$$\frac{-2\pi\pi e^{2\pi x} + 2\pi\pi e^{2\pi x} + 4\pi^3 x e^{2\pi x}}{4e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi x e^{2\pi x} + 8\pi^2 x x e^{2\pi x} - 4}$$

oder

$$\frac{\pi^3 x e^{2\pi x}}{e^{2\pi x} + 4\pi x e^{2\pi x} + 2\pi^2 x^2 e^{2\pi x} - 1}$$

oder

$$\frac{\pi^3 x}{1 + 4\pi x + 2\pi^2 x^2 - e^{-2\pi x}}$$

Da auch hier für $x = 0$ Zähler und Nenner $= 0$ werden, so nehme man nochmals die Differenzialien, wodurch man

$$\frac{\pi^3}{4\pi + 4\pi^2 x + 2\pi e^{-2\pi x}}$$

bekommt, und dieser Bruch geht, wenn man $x = 0$ setzt, in $\frac{\pi}{6}$ über, welches der vorhin gefundene Werth ist.

Drittes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks: $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$ zu finden, wenn $x = 0$ ist, und π und e die vorige Bedeutung behalten.

Der gegebene Ausdruck läßt sich in den Bruch $\frac{\pi e^{\pi x} - \pi}{4xe^{\pi x} + 4x}$ verwandeln, dessen Zähler und Nenner für den Fall $x = 0$ verschwinden. Man setze daher $x = u$, und da

$$e^{\pi\omega} = 1 + \pi\omega + \tfrac{1}{2}\pi^2\omega^2 + \tfrac{1}{6}\pi^3\omega^3 + \text{ꝛc.}$$

ist, so erhält man dadurch für den gegebenen Ausdruck

$$\frac{\pi^2\omega + \frac{1}{2}\pi^3\omega^2 + \frac{1}{6}\pi^4\omega^3 + \text{ꝛc.}}{8\omega + 4\pi\omega^2 + 2\pi^2\omega^3 + \text{ꝛc.}}$$

und dieser Ausdruck wird $= \frac{1}{8}\pi^2$, wenn man $\omega = 0$ nimmt. Auch ist $\frac{1}{8}\pi^2$ der Werth des gegebenen Ausdrucks für den Fall $x = 0$. Uebrigens stellt die Formel $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$ die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1+xx} + \frac{1}{9+xx} + \frac{1}{25+xx} + \frac{1}{49+xx} + \text{ꝛc.}$$

dar, und es ist bekannt, daß diese Reihe, wenn $x = 0$ angenommen wird $= \frac{1}{8}\pi^2$ ist.

Viertes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\mathrm{tang.}\,\pi x}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Die Formel $\frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x\,\mathrm{tang.}\,\pi x}$ druckt die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{ꝛc.}$$

aus, und es muß daher, wenn man $x = 0$ setzt, die Summe der Reihe

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \text{ꝛc.}$$

sich ergeben, wovon man weiß, daß sie $= \frac{1}{6}\pi\pi$ ist. Da nun $\mathrm{tang.}\,\pi x = \frac{\mathrm{sin.}\,\pi x}{\mathrm{cos.}\,\pi x}$ ist, so hat man

$$\frac{1}{2xx} - \frac{\pi\,\mathrm{cos.}\,\pi x}{2x\,\mathrm{sin.}\,\pi x} = \frac{\mathrm{sin.}\,\pi x - \pi x\,\mathrm{cos.}\,\pi x}{2xx\,\mathrm{sin.}\,\pi x}$$

und der Zähler und Nenner dieses Bruchs verschwinden, wenn man $x = 0$ setzt. Man nehme also $x = 0$, so geht der gegebene Ausdruck, da

$$\sin.\varpi x = \varpi\omega - \tfrac{1}{6}\varpi^3\omega^3 + \text{ꝛc.}$$
$$\cos.\varpi x = 1 - \tfrac{1}{2}\varpi^2\omega^2 + \text{ꝛc.}$$

ist, in folgenden Bruch

$$\frac{\varpi\omega - \frac{1}{6}\varpi^3\omega^3 + \text{ꝛc.} - \varpi\omega + \frac{1}{2}\varpi^3\omega^3 - \text{ꝛc.}}{2\varpi\omega^3 - \frac{1}{3}\varpi^3\omega^5 + \text{ꝛc.}}$$
$$=$$
$$\frac{\frac{1}{3}\varpi^3\omega^3 - \text{ꝛc.}}{2\varpi\omega^3 - \text{ꝛc.}}$$

über, welcher, wenn man ω unendlich klein annimmt, $\frac{1}{6}\varpi^2$ giebt.

Fünftes Exempel.

Da die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe:

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{25-xx} + \frac{1}{49-xx} + \text{ꝛc.} = \frac{\varpi\sin.\frac{1}{2}\varpi x}{4x\cos.\frac{1}{2}\varpi x}$$

ist: den Werth dieser Summe für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varpi x = \tfrac{1}{2}\varpi x - \tfrac{1}{48}\varpi^3 x^3 + \text{ꝛc. und}$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}\varpi x = 1 - \tfrac{1}{8}\varpi^2 x^2 + \text{ꝛc.}$$

ist: so wird der gegebene Ausdruck =

$$\frac{\frac{1}{2}\varpi^2 x - \frac{1}{48}\varpi^4 x^3 + \text{ꝛc.}}{4x - \frac{1}{2}\varpi^2 x^3 + \text{ꝛc.}} = \frac{\frac{1}{2}\varpi^2 - \frac{1}{48}\varpi^4 x^2 + \text{ꝛc.}}{4 - \frac{1}{2}\varpi^2 x^2 + \text{ꝛc.}}$$

und also offenbar $= \frac{1}{8}\varpi^2$, wenn man $x = 0$ setzt. Es ist aber $\frac{1}{8}\varpi^2$ der Werth der Reihe $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{ꝛc.}$, wie oben auf mehrere Arten gezeigt worden, dagegen die gegebene Reihe allemal $= 0$ wird, wenn man für x irgend eine gerade Zahl setzt.

§. 366.

In diesen Reihen, welche in den beyden letzten Exempeln vorkommen, so wie auch in andern die veränderliche Größe x enthaltenden Reihen, können dieser Größe x auch solche Werthe beygelegt werden, daß einige Glieder, und folglich alsdann auch die Summe der ganzen Reihe unendlich wird. Setzt man z. B. in der Reihe

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{4}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{cc.}$$

für x irgend eine ganze Zahl: so wird allemal ein Glied derselben, wegen des verschwindenden Nenners, und also auch die Summe der Reihe unendlich. Läßt man aber dieses unendliche Glied aus der Reihe weg, so ist der übrige Theil der Summe eine endliche Größe, und läßt sich durch die Differenz zwischen dem Unendlichen, welches die ganze Summe ausdruckt, und dem gedachten unendlichen Gliede, also durch $\infty - \infty$ ausdrucken. Was für ein bestimmter Werth in dergleichen Fällen statt finde, läßt sich nach der erklärten Methode entdecken, und folgende Beyspiele mögen zur Erläuterung dienen.

Erstes Exempel.

Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx} + \frac{1}{4-xx} + \frac{1}{9-xx} + \frac{1}{16-xx} + \text{ꝛc.}$$

für den Fall zu finden, wenn $x = 1$ genommen, und das erste Glied weggelassen wird, welches bey $x = 1$ ins Unendliche übergeht.

Da überhaupt genommen die Summe dieser Reihe $= \frac{1}{2xx} - \frac{\pi}{2x \operatorname{tang.} \pi x}$ ist: so ist die gesuchte Summe

$$= \frac{1}{2xx} - \frac{\varpi}{2x\,\text{tang.}\varpi x} - \frac{1}{1 - xx}$$

für $x = 1$. Man setze $x = 1 + \omega$, so wird diese Summe

$$= \frac{1}{2(1 + 2\omega + \omega\omega)} - \frac{\varpi}{2(1 + \omega)\,\text{tang.}(\varpi + \omega\varpi)} + \frac{1}{2\omega + \omega\omega}$$

Nun ist

$$\text{tang.}(\varpi + \omega\varpi) = \text{tang.}\,\omega\pi = \varpi\omega + \tfrac{1}{3}\varpi^3\omega^3 + \text{etc.}$$

und da das erste Glied $\frac{1}{2xx}$ für $x = 1$ den bestimmten Werth $\frac{1}{2}$ bekommt, so braucht man nur auf die beyden übrigen zu sehen. Diese sind, wenn ω eine unendlich kleine Größe bedeutet,

$$\frac{1}{\omega(2 + \omega)} - \frac{\varpi}{2\omega(1 + \omega)(\varpi + \frac{1}{3}\varpi^3\omega^2)} =$$

$$\frac{1}{\omega(2 + \omega)} - \frac{1}{\omega(2 + 2\omega)(1 + \frac{1}{3}\varpi^2\omega^2)}$$

Aber wenn ω unendlich klein ist, kann man selbst $\frac{1}{3}\varpi^2\omega^2$ aus der Acht lassen, und dadurch bekommt man

$$\frac{\omega}{\omega(2 + \omega)(2 + 2\omega)} = \frac{1}{4}$$

wenn man $\omega = 0$ setzt. Es ist aber $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ die Summe der Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} +$ etc. wie aus andern Gründen bekannt ist.

Zweytes Exempel.

Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1 - xx} + \frac{1}{4 - xx} + \frac{1}{9 - xx} + \frac{1}{16 - xx} + \text{etc.}$$

für den Fall zu finden, wenn x irgend einer ganzen Zahl n gleich gesetzt, und das alsdann ins Unendliche über-gehende Glied $\frac{1}{nn - xx}$ weggelassen wird.

Die gesuchte Summe läßt sich auf folgende Art ausdrucken:

$$\frac{1}{2xx} - \frac{\varpi}{2x\,\mathrm{tang.}\varpi x} - \frac{1}{nn - xx}$$

vorausgesetzt, daß $x = n$ angenommen werde, wo denn das erste Glied $\frac{1}{2xx} = \frac{1}{2nn}$, die beyden andern aber unendlich werden. Man setze also $x = n + \omega$, so hat man für die gesuchte Summe, da $\mathrm{tang.}(\varpi n + \varpi\omega) = \mathrm{tang.}\varpi\omega = \varpi\omega$ ist, wenn man ω unendlich klein annimmt, den Ausdruck

$$\frac{1}{2nn} - \frac{\varpi}{2(n + \omega)\varpi\omega} + \frac{1}{2n\omega + \omega\omega}$$

oder

$$\frac{1}{2nn} - \frac{1}{\omega(2n + 2\omega)} + \frac{1}{\omega(2n + \omega)} =$$

$$\frac{1}{2nn} + \frac{1}{(2n + 2\omega)(2n + \omega)}$$

und wird demnach $\omega = 0$, so bekommt man

$$\frac{1}{2nn} + \frac{1}{4nn} = \frac{3}{4nn}.$$

Es ist folglich

$$\frac{3}{4nn} = \frac{1}{1 - nn} + \frac{1}{4 - nn} + \frac{1}{9 - nn} \ldots + \frac{1}{(n-1)^2 - nn}$$

$$+ \frac{1}{(n+1)^2 - nn} + \frac{1}{(n+2)^2 - nn} + \text{rc. ohne Ende}$$

oder

$$\frac{1}{(n+1)^2 - nn} + \frac{1}{(n+2)^2 - nn} + \frac{1}{(n+3)^2 - nn} + \text{rc.}$$

$$=$$

$$\frac{3}{4nn} + \frac{1}{nn - 1} + \frac{1}{nn - 4} + \ldots + \frac{1}{nn - (n-1)^2}$$

Drittes Exempel.

Den Werth der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\text{etc.}$$

für den Fall zu finden, wenn $x=1$ gesetzt, und das alsdann ins Unendliche übergehende Glied $\frac{1}{1-xx}$ weggelassen wird.

Da die Summe dieser Reihe überhaupt genommen $=\frac{\varpi \sin.\frac{1}{2}\varpi x}{4x\cos.\frac{1}{2}\varpi x}$ ist: so wird die gesuchte Summe

$$=\frac{\varpi \sin.\frac{1}{2}\varpi x}{4x\cos.\frac{1}{2}\varpi x}-\frac{1}{1-xx}$$

für den Fall $x=1$. Da beyde Glieder für $x=1$ unendlich werden, so setze man $x=1-\omega$. Hierdurch bekommt man, da

$$\sin.(\tfrac{1}{2}\varpi-\tfrac{1}{2}\varpi\omega)=\cos.\tfrac{1}{2}\varpi\omega=1-\tfrac{1}{8}\varpi^2\omega^2, \text{ und}$$
$$\cos.(\tfrac{1}{2}\varpi-\tfrac{1}{2}\varpi\omega)=\sin.\tfrac{1}{2}\varpi\omega=\tfrac{1}{2}\varpi\omega$$

ist, indem ω eine unendlich kleine Größe bedeutet, den Ausdruck

$$\frac{\varpi(1-\frac{1}{8}\varpi^2\omega^2)}{4(1-\omega)\frac{1}{2}\varpi\omega}-\frac{1}{2\omega-\omega\omega}=\frac{1}{\omega(2-2\omega)}-\frac{1}{2(2-\omega)}$$

der $=\frac{1}{4}$ wird, wenn man $\omega=0$ annimmt, und es ist demnach

$$\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{24}+\tfrac{1}{48}+\tfrac{1}{80}+\tfrac{1}{120}+\text{etc.}$$

Viertes Exempel.

Die Summe der Reihe:

$$\frac{1}{1-xx}+\frac{1}{9-xx}+\frac{1}{25-xx}+\frac{1}{49-xx}+\text{etc.}$$

zu finden, wenn x irgend einer ungeraden Zahl $2n-1$

gleich

gleich gesetzt, und das Glied $\frac{1}{(2n-1)^2 - xx}$, welches in diesem Falle ins Unendliche übergeht, weggelassen wird.

Die gesuchte Summe ist $= \frac{4\sin.\frac{1}{2}\varpi x}{4x\cos.\frac{1}{2}\varpi x} - \frac{1}{(2n-1)^2 - xx}$ wenn $x = 2n - 1$ genommen wird. Man setze demnach $x = 2n - 1 - \omega$, und lasse ω eine unendlich kleine Größe bedeuten. Alsdann wird

$$\sin.\tfrac{1}{2}\varpi x = \sin.\left(\frac{2n-1}{2}\varpi - \tfrac{1}{2}\varpi\omega\right) = \pm\cos.\tfrac{1}{2}\varpi\omega$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn n eine ungerade, und das untere, wenn n eine gerade Zahl ist. Auf ähnliche Art wird

$$\cos.\tfrac{1}{2}\varpi x = \cos.\left(\frac{2n-1}{2}\varpi - \tfrac{1}{2}\varpi\omega\right) = \pm\sin.\tfrac{1}{2}\varpi\omega,$$

und folglich, n mag eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeuten,

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}\varpi x}{\cos.\frac{1}{2}\varpi\omega} = \frac{1}{\mathrm{tang}.\frac{1}{2}\varpi\omega} = \frac{1}{\frac{1}{2}\varpi\omega}$$

Dies vorausgesetzt läßt sich die gesuchte Summe auf diese Art:

$$\frac{1}{2\omega(2n-1-\omega)} - \frac{1}{\omega(2(2(2n-1)-\omega))}$$

ausdrucken, und ist demnach $= \frac{1}{4(2n-1)^2}$. Ist z. B. $n = 2$, so wird

$$\tfrac{1}{36} = -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{40} + \tfrac{1}{72} + \tfrac{1}{112} + \text{ꝛc.}$$

und die Richtigkeit dieser Summe ist aus andern Gründen bekannt.

Sechs-