Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Vierzehntes Capitel. Von den Differenzialien für besondere Fälle.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52934

Vierzehntes Capitel.

Von den Differenzialien für besondere Fälle.

§. 337.

Wenn y irgend eine Funktion von x ist, und diese veränderliche Größe x um den Zuwachs ω vermehrt wird oder x in $x + \omega$ übergeht, so bekommt dadurch y folgenden Werth:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

und also y den Zuwachs

$$\frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

wie aus dem Obigen bekannt ist. Wird also $\omega = dx$, oder x um das Differenzial dx vermehrt, so wird der Zuwachs von y

$$dy + \tfrac{1}{2}ddy + \tfrac{1}{6}d^3y + \tfrac{1}{24}d^4y + \text{ꝛc.}$$

und dieser Zuwachs ist das vollständige Differenzial von y. Da indeß jedes Glied dieser Reihe zu dem folgenden ein unendliches Verhältniß hat, so verschwinden alle folgende Glieder gegen das erste, so daß dy das gewöhnliche erste Differenzial von y wird. Auf ähnliche Art sind die zweyten, dritten und vierten Differenzialien u. s. f. von y folgende

dd. y

$$dd.y = ddy + \frac{3}{3}d^3y + \frac{7}{3.4}d^4y + \frac{15}{3.4.5}d^5y + \frac{31}{3.4.5.6}d^6y + \text{ꝛc.}$$

$$d^3y = d^3y + \frac{6}{4}d^4y + \frac{25}{4.5}d^5y + \frac{90}{4.5.6}d^6y + \frac{301}{4.5.6.7}d^7y + \text{ꝛc.}$$

$$d^4y = d^4y + \frac{10}{5}d^5y + \frac{65}{5.6}d^6y + \frac{350}{5.6.7}d^7y + \text{ꝛc.}$$

$$d^5y = d^5y + \frac{15}{6}d^6y + \frac{140}{6.7}d^7y + \text{ꝛc.}$$

$$d^6y = d^6y + \frac{21}{7}d^7y + \text{ꝛc.}$$

und man erhält diese Differenzialien aus dem 56sten §. durch die Substitution dx für ω. Diese Differenzialien sind die vollständigen Differenzialien von y, weil darin auch die Glieder beybehalten sind, welche gegen das erste verschwinden. Man findet aber diese Glieder einzeln durch eine fortgesetzte Differenziation von y, indem man dx als beständig betrachtet. Ist z. B. $y = ax - xx$, so sind, weil $dy = adx - 2xdx$, und $ddy = -2dx^2$ wird, die vollständigen Differenzialien von y

$$dy = adx - 2xdx - dx^2$$

$$ddy = -2dx^2$$

und die übrigen $= 0$.

§. 338.

Wenn aber gleich überhaupt die folgenden Glieder in diesen Differenzial-Ausdrücken gegen die ersten verschwinden, so fällt doch in besondern Fällen, wenn das erste Glied selbst verschwindet, der Grund davon hinweg, und es dürfen also dann auch die folgenden Glieder nicht aus der Acht gelassen werden. So ist z. B. in dem vorhergehenden Falle, wo $y = ax - xx$ war, das Differenzial im Allgemeinen zwar $= (a - 2x)dx$, und man hat nicht nöthig $-dx^2$ beyzubehalten, weil dieses Glied unendlich kleiner ist als das erste; allein es liegt dabey die Voraussetzung zum Grunde, daß das erste Glied selbst nicht verschwinde. Wenn daher das Differenzial von $y = ax - xx$ für den Fall gesucht wird, wo $x = \frac{1}{2}a$ ist, so muß man sagen, es sey $= -dx^2$, weil die Funktion y in dem Falle $x = \frac{1}{2}a$, wenn x um dx wächst, um dx^2 abnimmt. Diesen einzigen Fall ausgenommen, ist das Differenzial der Funktion y allemal $= (a - 2x)dx$, denn, wenn nicht $x = \frac{1}{2}a$ wird, läßt man $-dx^2$ mit Recht aus der Acht. Auch kann die Vernachläßigung des Gliedes dx^2 selbst in dem Falle, daß $x = \frac{1}{2}a$ ist, zu keinem Irrthume verleiten. Denn da man die ersten Differenzialien unter sich zu vergleichen pflegt, so ist es, weil $dy = -dx^2$ im Falle $x = \frac{1}{2}a$, gegen die ersten Differenziale dx verschwindet, gleichviel, ob man $dy = 0$, oder $dy = -dx^2$ habe.

§. 339.

Es bedeute y irgend eine Funktion von x, und man erhalte dabey durch eine fortgesetzte Differenziation

$$dy = pdx;\ dp = qdx;\ dq = rdx;\ dr = sdx;\ \text{ꝛc.}$$

so sind die vollständigen Differenzialien von y, wobey nichts aus der Acht gelassen wird,

$$d.y = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \text{ꝛc.}$$
$$ddy = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12}sdx^4 + \tfrac{1}{4}tdx^5 + \text{ꝛc.}$$
$$d^3y = rdx^3 + \tfrac{3}{2}sdx^4 + \tfrac{5}{4}tdx^5 + \text{ꝛc.}$$
$$d^4y = sdx^4 + 2tdx^5 + \text{ꝛc.}$$
$$d^5y = tdx^5 + \text{ꝛc.}$$

Wenn also die ersten Glieder in diesen Ausdrücken nicht verschwinden, so hat man in ihnen allein die Differenzialien von y; wenn aber in irgend einem Falle das erste

Glied

Glied $= 0$ wird, so giebt das folgende das gesuchte Differenzial. Verschwände auch das zweyte Glied, so würde auf ähnliche Art das dritte, und verschwände auch das dritte Glied, so würde das vierte Glied dieses Differenzial geben, u. s. w. Hieraus folgt, daß das erste Differenzial einer Funktion von x eigentlich nie verschwinde. Denn wird auch $p = 0$ in welchem Falle man das Differenzial von y als verschwindend zu betrachten pflegt, so wird dieses Differenzial durch eine höhere Potestät von dx ausgedruckt; z. B. durch $\frac{1}{2}qdx^2$, oder wenn auch q verschwindet, durch $\frac{1}{6}rdx$ u. s. w.

§. 340.

Ob nun aber gleich in diesen Fällen das Differenzial von y in Vergleichung mit andern ersten Differenzialien mit Recht aus der Acht gelassen wird, so ist es doch gleichwohl öfters nützlich, den Ausdruck desselben zu kennen. So kann man aus dem vollständigen Ausdrucke eines Differenzials sogleich beurtheilen, in welchen Fällen die gegebene Funktion ein Kleinstes oder ein Größtes wird. Ist z. B.

$$d.y = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \text{ꝛc.}$$

so muß, wenn y ein Größtes oder ein Kleinstes werden soll, $p = 0$ seyn. In diesem Falle ist also $dy = \frac{1}{2}qdx^2$, und die Funktion y geht dabey, wenn man für x die Größe $x \pm dx$ setzt, in $y + \frac{1}{2}qdx^2$ über, und wird daher einen kleinsten Werth haben, wenn q positiv, und einen größten, wenn q negativ ist. Wird aber auch $q = 0$, so ist $dy = \frac{1}{6}rdx^3$ und die Funktion y geht durch die Substitution $x \pm dx$ für x in $y \pm \frac{1}{6}rdx^3$ über; es findet aber in diesem Falle weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt. Wird hingegen auch $r = 0$, so erhält man, wenn man $x \pm dx$

 für

für x setzt, $y + \frac{1}{24} s dx^4$ für y, und dieser Ausdruck giebt ein Größtes, wenn s eine negative, und ein Kleinstes, wenn s eine positive Größe ist. Andere Beyspiele von der Nutzbarkeit der vollständigen Differenzialien werden unten vorkommen.

§. 341.

Wir wollen annehmen, p verschwinde, wenn $x = a$ wird, und dies geschieht, wenn $p = (x - a)P$ ist. Es entsteht aber ein solcher Werth, wenn $y = (x - a)^2 P + C$ ist, wo C irgend eine beständige Größe bedeutet. Denn da $pdx = (x - a)^2 dP + 2(x - a)Pdx$ ist, so muß nothwendig $p = 0$ werden, wenn man $x = a$ setzt. Alsdenn wird folglich, da $dpdx = qdx^2 = (x - a)^2 ddP + 4(x - a)dPdx + 2Pdx^2$ ist, $d.y = Pdx^2$, es müßte denn P bey $x = a$ verschwinden, welcher Fall nachher betrachtet werden soll. Der gegenwärtige kann allgemeiner auf folgende Art dargestellt werden. Es sey $z = (x - a)^2 P + C$, und y irgend eine Funktion von z, so daß $dy = Zdz$ werde, wenn Z irgend eine Funktion von $z = (x - a)^2 P + C$ bedeutet. Alsdann ist also

$$dz = (x - a)^2 dP + 2(x - a)Pdx, \text{ und}$$
$$pdx = Z(x - a)^2 dP + 2Z(x - a)Pdx.$$

Dieses Glied wird $= 0$, wenn $x = a$ wird, und läßt man in eben diesem Falle die Glieder weg, welche den Faktor $x - a$ enthalten, so wird $qdx^2 = 2PZdx^2$, und also für $x = a$, nachdem man in PZ allenthalben a für x gesetzt hat, $dy = PZdx^2$. Ist daher y irgend eine Funktion von $z = (x - a)^2 P + C$, so daß $dy = Zdx$ ist, so ist für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^2$. Es wird daher diese Funktion y für $x = a$ ein Größtes, wenn in eben diesem Falle die Größe PZ negativ, und ein Kleinstes, wenn PZ positiv ist.

§. 342.

§. 342.

Wenn $p = (x - a)^2 P$, so verschwindet für $x = a$ auch q; man findet aber einen solchen Werth für p, wenn $y = (x - a)^3 P + C$ ist. Es ist also dann

$$pdx = (x - a)^3 dP + 3(x - a)^2 Pdx$$

$$qdx^2 = (x - a)^3 ddP + 6(x - a)^2 dPdx + 6(x - a) Pdx^2$$

und jedes dieser beyden Glieder verschwindet, wenn $x = a$ wird; das folgende aber ist

$$rdx^3 = (x - a)^3 d^3 P + 9(x - a)^2 ddPdx + 18(x - a) dPdx^2 + 6Pdx^3 = 6Pdx^3$$

wenn $x = a$ ist. Da also p und q für $x = a$ verschwinden, so wird $dy = \frac{1}{6} rdx^3 = Pdx^3$. Auf ähnliche Art findet man, wenn $z = (x - a)^3 P + C$, und y eine Funktion von z und $dy = Zdx$ ist, weil alsdann $dz = (x - a)^3 dP + 3(x - a)^2 Pdx$ ist, $p = 0$ und $q = 0$, und $rdx^3 = 6PZdx^3$; also $dy = PZdx^3$ für $x = a$. Wenn daher gleich für $x = a$, $p = 0$ wird, so hat dennoch die Funktion y weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

§. 343.

Es giebt aber einen leichtern Weg diese Differenzialien zu finden, welcher sich auf die Natur der Differenzialien selbst gründet. Denn da man das Differenzial von y erhält, wenn man y von seinem nächsten Werthe oder dem, welchen es durch die Substitution $x + dx$ für x bekommt, abzieht, so sey, wie im ersten Falle, $y = (x - a)^2 P + C$. Setzt man hier $x + dx$ für x, so wird

$$y' = (x - a + dx)^2 P' + C$$

und folglich

$$dy = (x - a + dx)^2 P' - (x - a)^2 P.$$

Wenn also $x = a$ ist, so wird $dy = P' dx^2$, und, da P' und P im Verhältnisse der Gleichheit stehen, $dy = Pdx^2$.

Ferner sey $z = (x - a)^2 P + C$, so wird $dz = Pdx^2$. Wenn also y irgend eine Funktion von z, und $dy = Zdz$ ist, so wird für $x = a$

$$dy = PZdx^2.$$

Ist nun $z = (x - a)^3 P + C$, so wird

$$z' = (x - a + dx)^3 P' + C,$$

und daher für $x = a$

$$z' - z = dz = Pdx^3.$$

Ist demnach y irgend eine Funktion von z und $dy = Zdz$, so ist auch für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^3$, vorausgesetzt, daß in den Funktionen P und Z allenthalben a für x substituirt werde. Da aber in diesem Falle $z = C$ und Z eine Funktion von z ist, so wird Z eine beständige Größe, nemlich eine solche Funktion von C als es vorhin von z war.

§. 344.

Wenn also überhaupt $y = (x - a)^n P + C$ ist, so wird, weil dann $y' = (x - a + dx)^n P' + C$ wird, für $x = a$ das Differenzial $dy = Pdx^n$; und wenn also $n > 1$, so verschwindet dieses Differenzial in Vergleichung mit andern ersten Differenzialien, welche dx homogen sind. Nun ist aus dem Vorhergehenden klar, daß die Funktion y für $x = a$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird, wenn n eine gerade Zahl, und dabey P für $x = a$ eine positive, und ein Größtes, wenn P eine negative Größe ist. Man findet demnach auf diese Art die größten und kleinsten Werthe viel leichter als nach der oben beschriebenen Methode, weil man dabey nicht nöthig hat, zu den höhern Differenzialien fortzugehen. Wenn aber $z = (x - a)^n P + C$, und y eine Funktion von z, und $dy = Zdz$ ist: so wird für $x = a$ das Differenzial $dy = PZdx^n$. Es wird aber hier n für eine positive Zahl, oder eine solche, die größer als o ist, genommen; denn wenn n eine negative Zahl wäre, so würde, wenn man $x = o$ setzte, $(x - a)^n$ nicht verschwinden, sondern selbst unendlich groß werden.

§. 345.

Wir haben gesehen, daß auf diese Art das Differenzial viel leichter gefunden wird, als vermittelst der Reihe, wodurch wir vorhin das vollständige Differenzial ausdruckten; denn ist n eine ganze Zahl, so müssen so viel Glieder jener Reihe durchgegangen werden als n Einheiten hat. Aber wenn n ein Bruch ist, so giebt jene Reihe das wahre Differenzial nicht einmal. Es sey z. B. $y = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$, wo in Rücksicht auf die Reihe

$$dy = p\,dx + \tfrac{1}{2} q\,dx^2 + \tfrac{1}{6} r\,dx^3 + \tfrac{1}{24} s\,dx^4 + \text{ꝛc.}$$

$$p = \tfrac{3}{2}\sqrt{(x - a)}; \quad q = \frac{3}{4\sqrt{(x - a)}}$$

$$r = \frac{3}{8(x-a)\sqrt{(x-a)}} \text{ und } s = \frac{9}{16(x-a)^2\sqrt{(x-a)}} \text{ ꝛc.}$$

Wenn man also $x = a$ setzt, so wird zwar $p = o$; allein alle folgenden Glieder q, r, s, ꝛc. gehen ins Unendliche über, und es kann demnach der Werth des Differenzials in diesem Falle gar nicht angegeben werden. Dagegen läßt die auf die Natur der Differenzialien selbst gegründete Methode gar keinen Zweifel übrig. Denn da $x = (x - a)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$ ist, so erhält man durch die Substitution $x + dx$ für x

$$y' = (x - a + dx)^{\frac{3}{2}} + a\sqrt{a}$$

und es ist folglich, wenn $x = a$ gesetzt wird,

$$dy = dx\sqrt{dx}$$

Dieses Differenzial verschwindet gegen dx, aber dagegen verschwinden gegen dasselbe die zweyten Differenzialien, welche dx^2 homogen sind.

§. 346.

Jetzt wollen wir die Fälle etwas genauer betrachten, wo n eine gebrochene Zahl ist, und

$$y = P\surd(x - a) + C$$

setzen. Hier wird, wegen $y' = P'\surd(x - a + dx) + C$

$$dy = P\surd dx$$

für $x = a$, und es hat folglich dieses Differenzial zu dx und allen ihm homogenen Differenzialien ein unendliches Verhältniß. Hieraus erhellet auch, wie in diesem Falle über das Größte und Kleinste zu urtheilen ist. Denn da y, wenn man $x + dx$ für x setzt, in $P\surd(x - a) + C + P\surd dx$ übergeht, so hat, da $\surd dx$ beyde Zeichen zuläßt, die Funktion y einen doppelten Werth, den einen größer als C, und den andern kleiner, so daß sie für $x = a$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes wird. Nimmt man ferner dx negativ, so wird der Werth von y sogar imaginär. Eben dies hat man zu merken, wenn $z = P\surd(x - a) + C$, und y eine Funktion von z und $dy = Zdz$ ist, indem alsdann $dy = PZ\surd dx$ für $x = a$ wird.

§. 347.

Wenn die Funktion, deren Differenzial für den Fall $x = a$ gesucht werden soll,

$$y = (x - a)^{\frac{m}{n}} P + C$$

ist, so wird, wie aus dem Vorhergehenden erkannt werden kann,

$$dy = P dx^{\frac{m}{n}}.$$

Wenn

Wenn daher $m > n$ ist, so verschwindet dieses Differenzial gegen dx, ist aber $m < n$, so wird $\frac{dy}{dx}$ unendlich groß. Ist ferner n eine gerade Zahl, so hat das Differenzial dy einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen; und wenn man daher $a + dx$ für x setzt, so bekommt die Funktion y, die bey $x = a$ den Werth C erhalten haben würde, einen doppelten Werth, einen der größer, und einen, der kleiner ist als C. Setzte man hingegen $x = a - dx$, so würde y imaginär werden, und also in diesem Falle weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn. Nun sey n eine ungerade Zahl, wo denn m entweder gerade oder ungerade seyn wird. Es sey zuvörderst m eine gerade Zahl. Da alsdann dy denselben Werth behält, man mag dx positiv oder negativ nehmen: so erhellet, daß die Funktion y für $x = a$ entweder ein Größtes oder ein Kleinstes seyn werde, je nachdem in diesem Falle P eine negative oder positive Größe ist. Wenn aber sowohl m als n ungerade ist, so geht das Differenzial dx in das entgegengesetzte über, wenn man dx negativ nimmt; und es hat daher in diesem Falle die Funktion y weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

§. 348.

Wenn die Funktion y aus mehrern durch $x - a$ theilbaren Gliedern besteht, und z. B.

$$y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$$

ist: so ist ihr Differenzial für den Fall $x = a$

$$dy = P dx^m + Q dx^n.$$

Ist in diesem Ausdrucke $n > m$, so verschwindet das zweyte Glied gegen das erste, und man behält bloß $dy = Pdx^m$. Ist aber n ein Bruch mit einem geraden Nenner, so darf man

man Qdx^n, ob es gleich in Vergleichung mit Pdx^m verschwindet, gleichwohl nicht aus der Acht lassen. Es erhellet nemlich daraus, daß dy negativ wird, wenn man dx negativ nimmt, welches man aus Pdx^m nicht erkennen kann. Da also, wenn n ein Bruch mit einem geraden Nenner ist, dx nicht negativ genommen werden kann, das Glied Qdx^n aber, wenn man dx positiv nimmt, einen doppelten Werth hat: so wird die Funktion

$$y = (x - a)^m P + (x - a)^n Q + C$$

welche für $x = a$ der beständigen Größe C gleich wird, durch die Substitution $x + dx$ für x

$$y = C + Pdx^m \pm Qdx^n$$

und da diese beyden Werthe entweder größer oder kleiner als C sind, je nachdem P eine positive oder negative Größe ist: so hat die Funktion y im Falle $x = a$ weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

§. 349.

In diesen Fällen lassen sich also die wahren Differenzialien der Funktionen nicht nach den gewöhnlichen Regeln finden, weil diese bloß gelten, wenn die dx homogenen Differenzialien der Funktionen gesucht werden. Wenn hingegen in irgend einem besondern Falle das Differenzial einer Funktion durch die Potestät dx^n ausgedruckt wird, so findet man dafür nach jener Regel o, wenn n größer als 1, und ∞, wenn n kleiner als 1 ist. Ist z. B. $y = \sqrt{(a - x)}$ und soll das Differenzial von y für den Fall $x = a$ gesucht werden; so erhält man, da $dy = -\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$ ist, für $x = a$, $dy = -\frac{dx}{o}$. Und wollte man die folgenden Differenzialien zu Hülfe nehmen, so würden auch diese,

weil

weil sie einen o gleichen Nenner hätten, insgesammt unendlich Große seyn. Wir haben aber gesehen, daß $dy = \sqrt{-dx}$, und also sogar imaginär ist. Setzt man hingegen $x - dx$ für x, so wird $dy = \sqrt{dx}$, und also unendlich gegen dx, so daß dx gegen dy verschwindet. Es leitet daher die gewöhnliche Methode auch hier zu keinem Irthume, indem sie den Werth von dy unendlich groß angiebt.

§. 350.

Man muß also die gewöhnliche Methode zu differenziiren verlassen, so oft in der Reihe $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ 2c. wodurch das vollständige Differenzial der Funktion y ausgedruckt wird, das erste Glied p entweder $= 0$ oder $= \infty$ wird, und alsdann das Differenzial nach den ersten Grundsätzen der Differenziation suchen. So oft daher das Differenzial der Funktion y für einen gewissen Werth von x gefunden werden soll, wobey p entweder unendlich groß oder unendlich kein wird: so oft muß man zu den ersten Gründen der Differenziation zurückgehen. In allen übrigen Fällen, wo weder $p = 0$ noch $p = \infty$ wird, giebt die gewöhnliche Methode die wahren Werthe des Differenzials. Doch darf der Fall §. 348. nicht aus der Acht gelassen werden, wenn y ein Glied $(x - a)^n Q$ enthält, und n einen Bruch mit einem geraden Nenner bedeutet. Denn wenn es in diesem Falle gleich niedrigere Differenzialien giebt, gegen welche Qdx^n verschwindet: so werden doch, wenn dx negativ und also Qdx^n imaginär ist, durch das Glied Qdx^n alle übrige Glieder imaginär, und dieser Umstand ist bey den Linien wichtig. Dergleichen besondere Fälle, wo das wahre Differenzial nach der gewöhnlichen Methode nicht gefunden werden kann, wollen wir nun durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = a + x - \sqrt{(xx + ax - x)}\sqrt{(2ax - xx)}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Daß man das Differenzial dieser Funktion nicht nach der gewöhnlichen Regel finde, erhellet aus der Differenziation. Dadurch bekommt man

$$dy = dx - \frac{xdx - \tfrac{1}{2}adx + \tfrac{1}{2}dx\sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)})}}$$

$$+ \frac{(axdx - xxdx) : \sqrt{(2ax - xx)}}{\sqrt{(xx + ax - x\sqrt{(2ax - xx)})}}$$

und also, wenn man $x = a$ setzt,

$$dy = dx - \frac{adx}{a} = 0.$$

Um also von den ersten Grundsätzen der Differenziation auszugehen, so wird, wenn man $x + dx$ für x schreibt,

$$y' = a + x + dx - \sqrt{(xx + 2xdx + dx^2 + ax + adx -}$$
$$(x + dx)\sqrt{(2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2)})$$

und wenn man $x = a$ setzt,

$$y' = 2a + dx - \sqrt{(2aa + 3adx + dx^2 - (a + dx)\sqrt{(aa - dx^2)})}$$

Da also $\sqrt{(aa - dx^2} = a - \frac{dx^2}{2a}$ ist, indem die folgenden Glieder sicher aus der Acht gelassen werden können, so wird

$$y' = 2a + dx - \sqrt{(aa + 2adx + \tfrac{3}{2}dx^2)}$$

und wenn man die Quadratwurzel auszieht,

$$y' = 2a + dx - (a + dx + \frac{dx^2}{4a} = a - \frac{dx^2}{4a}.$$

Nun ist aber, wenn $x = a$ gesetzt wird, $y = a$, also da $y' = y + dy$ ist, $dy = -\frac{dx^2}{4a}$; und hieraus erhellet zu-

gleich,

gleich, daß die Funktion y ein Größtes wird, wenn man $x = a$ nimmt.

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = 2ax - xx + a\sqrt{(aa - xx)}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Differenziirt man auf die gewöhnliche Art, so wird

$$dy = 2adx - 2xdx - \frac{axdx}{\sqrt{(aa - xx)}}$$

und dieser Ausdruck wird unendlich groß, wenn man $x = a$ annimmt, und ist folglich unbrauchbar. Es werden aber auch die Differenzialien der folgenden Ordnungen unendlich große Größen, so daß man auch aus ihnen nach der Reihe $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ ꝛc. das wahre Differenzial nicht findet. Man setze also $x + dx$ für x, so wird

$$y' = 2ax - xx + 2adx - 2xdx - dx^2$$
$$+ a\sqrt{(aa - xx - 2xdx - dx^2}$$

und wenn man $x = a$ nimmt,

$$y' = aa - dx^2 + a\sqrt{(- 2adx - dx^2)}$$

Nun wird aber in diesem Falle auch $y = aa$; folglich

$$dy = - dx^2 + a\sqrt{-2adx}$$

und da dx^2 gegen $\sqrt{- 2adx}$ verschwindet,

$$dy = a\sqrt{- 2adx}.$$

Wenn demnach dx positiv ist, so wird dy imaginär; setzt man aber $x - dx$ für x, so erhält man

$$dy = a\sqrt{2adx},$$

und da dieser Ausdruck einen doppelten Werth hat, einen positiven nemlich und einen negativen: so ist die Funktion in dem Falle $x = a$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

Drit-

Drittes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = 3aax - 3axx + x^3 + (a - x)^2\sqrt[3]{(a^3 - x^3)}$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Da diese Funktion sich auf die Form bringen läßt:

$$y = a^3 - (a - x)^3 + (a - y)^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{(aa + ax + xx)}$$

so wird, wenn man $x = a + dx$ setzt,

$$y' = a^3 + dx^3 - dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3aa}$$

und in eben diesem Falle ist $y = a^3$. Demnach ist

$$dy = dx^3 - dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3aa}$$

und da dx^3 gegen $dx^{\frac{7}{3}}$ verschwindet, so wird

$$dy = - dx^{\frac{7}{3}}\sqrt[3]{3aa}.$$

Wenn also $x = a$ genommen wird, so hat die Funktion y weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

Viertes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3} = (1 + \sqrt[4]{x})\sqrt{x}$$

für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da $x = 0$ seyn soll, und dabey $y = 0$ wird, so schreibe man bloß dx für x, wodurch man

$$dy = dx^{\frac{1}{2}} + dx^{\frac{3}{4}} \text{ oder } dy = (1 + \sqrt[4]{dx})\sqrt{dx}$$

bekömmt; woraus zuvörderst erhellet, daß dx nicht negativ genommen werden darf. Ferner kann auch $\sqrt{dx}$, ob es gleich sonst einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen, hat, weil $\sqrt[4]{dx}$ vorkommt, bloß positiv genom-

men

men werden. Aber $\sqrt[4]{dx}$ läßt einen doppelten Werth zu, und so wird

$$dy = \sqrt{dx} \pm \sqrt[4]{dx^3}, \text{ und}$$
$$y' = 0 + \sqrt{dx} \pm \sqrt{dx^3}$$

weil $y = 0$ ist. Da also beyde Werthe von y' größer sind als der von y, so ist y für $x = 0$ ein Kleinstes. Daß aber die Funktion $y = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ die Funktion $y = -\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$ nicht in sich begreife, erhellet, wenn man beyde rational macht. Verwandelt man nemlich die erste in $y - \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$, und erhebt beyde Seiten zum Quadrate, so wird

$$y^2 - 2y\sqrt{x} + x = x\sqrt{x}, \text{ oder } y^2 + x = (x + 2y)\sqrt{x}$$

und quadrirt man beyde Hälften dieser Gleichung von neuem, so bekömmt man

$$y^4 - 2yyx - 4xxy + xx - x^3 = 0.$$

Die andere aber oder $y + \sqrt{x} = \sqrt[4]{x^3}$ giebt quadrirt

$$y^2 + x = (x - 2y)\sqrt{x}$$

und wenn diese Gleichung von neuem quadrirt wird, so findet man

$$y^4 - 2yyx + 4xxy + xx - x^3 = 0$$

eine Gleichung, welche von der vorhergehenden verschieden ist. Aber das andere Glied $\sqrt[4]{x^3}$ behält das doppelte Zeichen. Es ist daher dieser Umstand wohl zu merken, daß, wenn auch gleich die geraden Wurzeln beyde Zeichen + und − zulassen, doch bloß das erste beybehalten werden kann, wenn in eben dem Ausdrucke eben derselben Wurzeln fernere gerade Wurzeln vorkommen, denn diese würden imaginär werden, wenn man jene negativ nähme. Und hieraus lassen sich die größten und kleinsten Werthe der andern Art erkennen, wenn dergleichen nicht statt zu haben scheinen.

Fünftes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = a + \sqrt{(x-f)} + (x-f)\sqrt[4]{(x-f)} + (x-f)^2\sqrt[8]{(x-f)}$$

für den Fall $x = f$ zu finden.

Es sey $x - f = t$. Da alsdann $y = a + \sqrt{t} + t\sqrt[4]{t} + tt\sqrt[8]{t}$ wird, so ist das Differenzial hiervon für den Fall $t = 0$ zu finden, und in diesem Falle also $y = a$. Setzt man also $t + dt$ oder $0 + dt$ für t: so wird

$$y' = y + dy = a + \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$$

und folglich

$$dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} + dt^2\sqrt[8]{dt}$$

Hier ist zuvörderst klar, daß das Differenzial dt nicht negativ genommen werden kann, wofern nicht dy imaginär werden soll. Ja es kann nicht bloß $\sqrt{dt}$, sondern nicht einmal $\sqrt[4]{dt}$ negativ genommen werden, weil sonst $\sqrt[8]{dt}$ imaginär werden würde, und es hat daher das Differenzial dy bloß einen doppelten Werth, nemlich

$$dy = \sqrt{dt} + dt\sqrt[4]{dt} \pm dt^2\sqrt[8]{dt}$$

und da beyde größer sind als 0, so folgt, daß die Funktion y ein Kleinstes der zweyten Art werde, wenn man $t = 0$ oder $x = f$ setzt. Wenn also auch gleich in diesen Fällen die Glieder $dt\sqrt[4]{dt}$ und $dt^2\sqrt[8]{dt}$ gegen das erste $\sqrt{dt}$ verschwinden, so darf man sie doch nicht aus der Acht lassen, wenn die Menge der Werthe bestimmt werden soll, so daß die imaginären Größen nicht in Anschlag kommen.

Sechs-

Sechstes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = ax + bxx + (x - f)^n + (x - f)^{m + \frac{1}{2}n}$$

für den Fall $x = f$ zu finden.

Wenn man $x = f$ setzt, so wird $y = af + bff$, und schreibt man $x + dx$ oder $f + dx$ für x, so findet man für den nächsten Werth

$$y' = af + bff + adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^{m + \frac{1}{2}n}$$

und folglich

$$dy = adx + 2bfdx + bdx^2 + dx^n + dx^m\sqrt{dx^n}.$$

Wofern also nicht n eine gerade Zahl ist, so kann auch dx nicht negativ genommen werden. Es hat aber das letzte Glied $dx^m\sqrt{dx^n}$ ein doppeltes Zeichen, und es wird daher der Werth von y' doppelt und größer als y, wenn $a + 2bf$ eine positive Größe, und die Exponenten n und $m + \frac{1}{2}n$ größer als 1 sind. Es wird also die Funktion y für den Fall $x = f$ ein Kleinstes, und dies geschieht, n mag eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, wenn nur der Zähler in diesem und die Zahl in jenem nicht gerade ist.

§. 351.

Vorzüglichen Nutzen hat diese Methode die Differenzialien nach den ersten Gründen der Differenziation zu bestimmen, in den transcendenten Funktionen, wenn in gewissen Fällen das auf die gewöhnliche Art gefundene Differenzial entweder zu verschwinden oder unendlich groß zu werden scheint. Es kommen aber hier Arten von unendlich großen und unendlich kleinen Größen vor, welche bey den algebraischen Funktionen nie angetroffen werden. Bedeutet z. B. i eine unendlich große Zahl, so ist zwar li auch unendlich groß, hat aber doch gegen i, und gegen jede Potestät i^n, so klein man auch den Exponenten n annehmen mag, ein unendlich kleines Verhältniß, und es ist daher der Bruch $\frac{li}{i^n}$ eine unendlich kleine Größe, und kann nicht eher eine endliche Größe werden, bis der Exponent n unendlich klein wird. Es ist daher li homogen i^n, wenn n unendlich klein ist. Nun sey $i = \frac{1}{\omega}$, so daß ω eine unendlich kleine Größe bedeute: so ist $-l\omega$ homogen $\frac{1}{\omega^n}$, wenn n unendlich klein ist, und folglich $-\frac{1}{l\omega}$ homogen ω^n; folglich $-\frac{1}{ldx}$ ein unendlich Kleines, welches mit dx^n verglichen werden kann, wenn n einen unendlich kleinen Bruch bedeutet. Ist daher $y = -\frac{1}{lx}$, so ist das Differenzial von y für den Fall $x = 0$, $= -\frac{1}{ldx} = dx^n$, und es hat folglich dy zu dx und jede Potestät von dx ein unendliches Verhältniß, und es verschwinden gegen $-\frac{1}{ldx}$ alle Potestäten von dx, so klein auch ihre Exponenten seyn mögen.

§. 352.

Auch haben wir gesehen, daß a^i, wenn a eine Zahl, die größer als 1 ist, und i eine unendlich große Zahl bedeutet, ein unendlich großes von einem so hohen Grade ist, daß dagegen nicht nur i, sondern selbst jede Potestät von i verschwindet, und es wird nicht eher i^n homogen a^i, als bis n unendlich geworden ist. Nun sey $i = \frac{1}{\omega}$, so daß

ω eine unendlich kleine Größe bedeute, so ist $a^{\frac{1}{\omega}}$ homogen $\frac{1}{\omega^n}$, wenn n eine unendlich große Zahl ist; und folglich $a^{\frac{-1}{\omega}}$ oder $\frac{1}{a^{1:\omega}}$ ein unendlich Kleines, welches mit ω^n in Vergleichung zu setzen ist. Hiernach ist $\frac{1}{a^{1:dx}}$ ein unendlich Kleines, welches aber gegen jede Dignität von dx verschwindet, da es dx^n homogen ist, wenn n eine unendlich große Zahl bedeutet. Wird daher das Differenzial von $y = \frac{1}{a^{1:x}}$ für den Fall $x = 0$ gesucht, so ist, da $y = 0$ wird, $dy = \frac{1}{a^{1:dx}}$ und also unendlichmal kleiner als jede noch so hohe Potestät von dx.

§. 353.

Ist aber a kleiner als 1, so ist $\frac{1}{a}$ größer als 1, und so wird die Frage auf den vorhergehenden Fall zurückgeführt. Hat man nemlich den Ausdruck $a^{\frac{1}{\omega}}$, so setze man $a = \frac{1}{b}$ wodurch man $b^{-\frac{1}{\omega}}$ oder $\frac{1}{b^{1:\omega}}$ bekommt, einen Ausdruck, der, da $b > 1$ ist, ω^n homogen wird, wenn n eine unendlich große Zahl bedeutet. Dies vorausgesetzt, können wir uns zu folgenden Exempeln wenden.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = xx - \frac{1}{lx}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, so erhalten wir, wenn wir $x + dx$ oder $0 + dx$ für x setzen,

$$y' = dy = dx^2 - \frac{1}{ldx}.$$

Da aber $-\frac{1}{ldx}$ homogen ist dx^n, wenn n eine unendlich kleine Zahl bedeutet: so verschwindet dagegen dx^2, und es wird

$$dy = -\frac{1}{ldx} = dx^n$$

Da ferner die Logarithmen der negativen Zahlen imaginär sind, so kann dx nicht negativ genommen werden, und es ist demnach y für den Fall $x = 0$ ein Kleinstes, welches aber weder zu der ersten noch zu der andern Art gehört. Zur ersten Art gehört es auch nicht, weil y keine nächste vorhergehende Werthe hat, sondern bloß kleiner ist, als die folgenden, wenn x größer als 0 angenommen wird. Zur andern Art aber gehört es auch nicht, weil die folgenden Werthe, mit welchen es verglichen wird, nicht doppelt sind. Und auf diese Art entsteht eine dritte Gattung der größten und kleinsten Werthe, welche bloß bey den logarithmischen und transcendenten Funktionen statt hat, bey den algebraischen aber nie angetroffen wird, und wovon in der Lehre von den Curven oft die Rede ist.

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der Funktion:

$$y = (a - x)^n - x^n(la - lx)^n$$

für den Fall $x = a$ zu finden.

Das Differenzial dieser Funktion kann man, wenn n eine ganze Zahl ist, aus der allgemeinen Formel $dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ ꝛc. finden. Es wird nemlich

$$pdx = -n(a-x)^{n-1}dx - nx^{n-1}dx(la - lx)^n + nx^{n-1}(la - lx)^{n-1}dx$$

und dieser Werth verschwindet allerdings, wenn man $x = a$ setzt; denn wenn auch $n = 1$ ist, so wird doch $pdx = -dx + dx = 0$. Gehen wir also weiter fort, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}qdx^2 = {} & \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a-x)^{n-2}dx^2 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^n \\ & + \frac{n^2}{2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-1} \\ & - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2(la-lx)^{n-2}.\end{aligned}$$

Ist daher $n = 1$, so wird $\frac{1}{2}qdx^2 = \frac{dx^2}{2a}$, wenn man $x = a$ setzt. Auf ähnliche Art muß man, wenn $n = 2$ ist, das Glied $\frac{1}{6}rdx^3$ u. s. w. finden. Leichter wird es daher immer seyn, wenn wir zu den ersten Gründen der Differenziation zurückkehren, und da, wenn man $x = a$ setzt, $y = 0$ wird, so bekommt man durch die Substitution $x + dx$ oder $a + dx$ für x

$$y' = (-dx)^n - (a + dx)^n(la - l(a + dx))^n = y + dy = dy$$

weil $y = 0$ ist. Nun ist aber

$$l(a + dx) = la + \frac{dx}{a} - \frac{dx^2}{2a^2} + \frac{dx^3}{3a^3} - \text{etc.}$$

und also

$$dy = (-dx)^n -$$

$$\left(a^n + na^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}dx^2\right)\left(-\frac{dx}{a} + \frac{dx^2}{2a^2} - \frac{dx^3}{3a^3}\right)^n$$

$$= \frac{n}{2a}(-dx)^{n+1}.$$

Wenn also $x = a$ ist, so ist das gesuchte Differenzial

wenn	
$n = 1$	$dy = \frac{dx^2}{2a}$, wie vorhin
$n = 2$	$dy = -\frac{2dx^3}{2a}$
$n = 3$	$dy = \frac{3dx^4}{2a}$
$n = 4$	$dy = \frac{4dx^5}{2a}$
etc.	etc.

Wenn daher n eine ungerade Zahl ist, so wird die Funktion y in dem Falle $x = a$ ein Kleinstes; ist aber n eine gerade Zahl, so ist sie weder ein Größtes noch ein Kleinstes, und eben dieses findet statt, wenn n einen Bruch mit einem ungeraden Nenner bedeutet. Ist hingegen n ein Bruch mit einem geraden Nenner, so muß dx negativ genommen werden, damit man keine imaginäre Größen bekomme, und wegen der Zweydeutigkeit der Zeichen ist die Funktion weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

Drittes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = x^x$ für den Fall $x = \frac{1}{e}$ zu finden, wenn e die Zahl bedeutet, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist.

Da überhaupt $dy = x^x dx(lx + 1)$ ist, so verschwindet dieses Differenzial in dem Falle $x = \frac{1}{e}$, oder $lx = -1$. Vergleicht man demnach dieses Differenzial mit der allgemeinen Formel $pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 +$ 2c., so wird

$$p = x^x(lx + 1) \text{ und } q = x^x(lx + 1)^2 + x^{x-1}$$

und wenn man $x = \frac{1}{e}$, oder $lx = -1$ annimmt,

$$q = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1-e}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$$

Hiernach ist das gesuchte Differenzial $dy = \frac{1}{2} e^{(e-1):e} dx^2$ und die Funktion $y = x^x$ wird ein Kleinstes, wenn man $x = \frac{1}{e}$ setzt.

Viertes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = x^n + e^{-1:x}$ für den Fall $x = 0$ zu finden.

Da bey $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so wird, wenn man $0 + dx$ für x setzt, $y' = dy = dx^n + \frac{1}{e^{1:dx}}$. Nun haben wir gesehen, daß $\frac{1}{e^{1:dx}}$ der Potestät dx^∞ homogen ist, und folglich gegen dx^n verschwindet. Also ist $dy = dx^n$.

§. 354.

Was bey den ersten Differenzialien in gewissen Fällen sich ereignet, daß sich nemlich dieselben nach der gewöhnlichen Methode nicht finden lassen, das hat auch bey den zweyten und höhern Differenzialien statt, wenn in dem vollständigen Differenzial-Ausdrucke

$$dy = pdx + \tfrac{1}{2}qdx^2 + \tfrac{1}{6}rdx^3 + \tfrac{1}{24}sdx^4 + \text{rc.}$$

von den Größen r, q, s rc. einige entweder $= 0$ oder $= \infty$ werden. Da nemlich

$$dd.y = qdx^2 + rdx^3 + \tfrac{7}{12}sdx^4 + \text{rc.}$$

ist: so wird in dem Falle, wenn $q = 0$ ist, $ddy = rdx^3$, und verschwindet alsdann auch r, so wird $ddy = \frac{7}{12}sdx^4$ u. s. f. Wird aber q oder r oder s unendlich, so läßt sich das zweyte Differenzial aus jener Reihe gar nicht finden, sondern man muß zu den ersten Gründen der Differenziation zurückgehen. Man setzt nemlich $x + dx$ für x, und sucht y', dann $x + 2dx$ für x, um y'' zu erhalten. Ist dies geschehen, so ist der wahre Werth des zweyten Differenzials

$$ddy = dy' - dy = y'' - 2y' + y.$$

Auf ähnliche Art findet man den wahren Werth des dritten Differenzials, wenn man noch $x + 3dx$ für x setzt, und dadurch y''' sucht, indem $d^3y = y''' - 3y'' + 3y' - y$ ist, u. s. f. Auch dieses wollen wir durch einige Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ für den Fall $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ zu finden.

Sucht man das vollständige Differenzial von y aus der Formel

$dy = pdx + \frac{1}{2}qdx^2 + \frac{1}{6}rdx^3 + \frac{1}{24}sdx^4 +$ 2c.
so findet man für p, q, r, 2c. folgende Werthe:

$$p = -\frac{4aax}{(aa + xx)^2};$$

$$q = -\frac{4a^4 + 12aaxx}{(aa + xx)^3}$$

$$r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa + xx)^4}$$

Da nun $ddy = qdx^2 + rdx^3 + \frac{7}{12}sdx^4 +$ 2c. ist, so wird, da für $x = \frac{}{\sqrt{3}}$ $q = 0$ und $r = \frac{27\sqrt{3}}{8a^3}$ ist, das gesuchte Differenzial

$$ddy = \frac{27dx^3\sqrt{3}}{8a^3}$$

Zweytes Exempel.

Das Differenzial der Funktion $y = \frac{aa - xx}{aa + xx}$ für den Fall $x = a$ zu finden.

Sucht man wie vorhin das vollständige Differenzial so wird, da $d^3y = rdx^3 + \frac{3}{2}sdx^4$ ist, wegen $r = \frac{48a^4x - 48aax^3}{(aa + xx)^4}$ für den Fall $x = a$, $r = 0$, und man muß daher zu dem Werthe s fortgehen. Dieser ist

$$s = \frac{48a^4 - 144aaxx}{(aa + xx)^4} - \frac{8x(48a^4x - 48aax^3)}{(aa + xx)^5}$$

Setzt man demnach $x = a$, so wird $s = -\frac{96a^4}{2^4a^8} = -\frac{6}{a^4}$,

und es ist also für diesen Fall $d^3y = -\frac{9dx^4}{a^4}$.

Drittes Exempel.

Das Differenzial der in Ansehung des Grades unbestimmten Funktion: $y = ax^m + bx^n$, für den Fall $x = 0$ zu finden.

Setzt man nach und nach $x + dx$, $x + 2dx$, $x + 3dx$, rc. für x, so erhält man folgende Werthe für y

$$y' = a(x + dx)^m + b(x + dx)^n$$
$$y'' = a(x + 2dx)^m + b(x + 2dx)^n$$
$$y''' = a(x + 3dx)^m + b(x + 3dx)^n$$

rc.

Setzt man daher $x = 0$, so wird $y = 0$, und die Differenzialien werden

$$dy = adx^m + bdx^n$$
$$ddy = (2^m - 2)adx^m + (2^n - 2)bdx^n$$
$$d^3y = (3^m - 3.2^m + 3)adx^m + (3^n - 3.2^n + 3)bdx^n$$
$$d^4y = (4^m - 4.3^m + 6.2^m - 4)adx^m + (4^m - 4.3^n + 6.2^n - 4)bdx^n$$

rc.

Ist also der Exponent n größer als m, so verschwinden die zweyten Glieder in diesen Ausdrücken gegen die ersten. Gleichwohl muß man darauf Rücksicht nehmen, wenn n eine gebrochene Zahl ist, damit man die Fälle, in welchen diese Differenzialien entweder imaginär werden oder beyde Zeichen haben, bestimmen kann. Die weitere Auseinandersetzung dieser letztern Fälle aber muß der Lehre von den Curven vorbehalten bleiben.