Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Dreyzehntes Capitel. Von den Kennzeichen der imaginären Wurzeln.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52934

Dreyzehntes Capitel.

Von den Kennzeichen der imaginären Wurzeln.

§. 313.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir die Methode, die Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichungen zu bestimmen, erklärt, so daß darnach entschieden werden kann, ob und wie viel eine gegebene Gleichung reelle oder imaginäre Wurzeln habe. Zwar ist der Gebrauch dieser Methode öfters mit sehr großen Schwierigkeiten verknüpft, weil die Differenzialgleichung häufig so beschaffen ist, daß sich ihre Wurzeln nicht angeben lassen. Wenn nun auch gleich in diesen Fällen eben dieselbe Methode auf die Differenzialgleichungen angewandt, und dadurch die Beschaffenheit ihrer Wurzeln bestimmt werden könnte, so würde doch die Arbeit meistens äußerst mühsam werden. Es ist daher hier oft genug, Kennzeichen zu haben, woraus man sicher auf imaginäre Wurzeln in der Gleichung schließen kann, obgleich aus der Abwesenheit dieser Kennzeichen nicht auf die Realität aller Wurzeln geschlossen werden darf. Bey aller Unvollkommenheit hat die Kenntniß dieser Kennzeichen ihren Nutzen, und es sollen daher dieselben den Gegenstand der Untersuchung in dem gegenwärtigen Capitel ausmachen.

§. 314.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, daß die Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln hat, wenn die Wurzeln der Gleichung

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{ꝛc.} = 0$$

insgesammt reell sind, und zugleich ist gezeigt worden, daß aus der Realität aller Wurzeln der Differenzialgleichung nicht fließt, daß auch die Wurzeln der Hauptgleichung insgesammt reell seyn. Dagegen kann man, wenn die Differenzialgleichung imaginäre Wurzeln hat, behaupten, daß die Gleichung selbst wenigstens eben so viel imaginäre Wurzeln haben werde, ich sage zum wenigsten, denn sie kann dergleichen auch mehrere haben. Auf diese Art läßt sich aus der Differenzialgleichung nichts weiter folgern, als daß die Hauptgleichung, wenn die Differenzialgleichung imaginäre Wurzeln hat, ebenfalls und zum wenigsten auch eben so viel imaginäre Wurzeln haben werde.

§. 315.

Wenn eine gegebene Gleichung durch irgend eine Potestät der unbekannten Größe x^m, wo m eine ganze positive Zahl bedeutet, multiplicirt wird: so hat, weil die neue Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, wenn die Wurzeln der gegebenen insgesammt reell sind, auch die Differenzialgleichung, durch x^{m-1} dividirt, lauter reelle Wurzeln. Wenn daher alle Wurzeln der Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{ꝛc.} = 0$$

reell sind: so hat auch die Gleichung

(m + n)

$$(m+n)x^n-(m+n-1)Ax^{n-1}+(m+n-2)Bx^{n-2}-\text{rc.}=0$$

lauter reelle Wurzeln. Auf ähnliche Art hat auch die Gleichung, welche man durch die fernere Multiplication mit x^k und abermalige Differenziation erhält, oder

$$(m+n)(k+n)x^n-(m+n-1)(k+n-1)Ax^{n-1}+(m+n-2)(k+n-2)Bx^{n-2}-\text{rc.}=0$$

lauter reelle Wurzeln, und zugleich kann man auf diesem Wege so weit fortfahren als man will. Wenn aber eine solche Gleichung imaginäre Wurzeln hat, so kann man bey der Entdeckung dieser Wurzeln sicher behaupten, daß auch die gegebene Gleichung zum wenigsten eben so viel imaginäre Wurzeln haben werde.

§. 316.

Wenn die gegebene Gleichung vor der Differenziation mit keiner Potestät von x multiplicirt wird, so steigt man bey der Beurtheilung von Grad zu Grad ab. Wenn also die Gleichung

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\text{rc.}=0$$

lauter reelle Wurzeln hat, so haben auch ihre Differenzialgleichungen von allen Ordnungen lauter reelle Wurzeln. Es sind demnach auch alle Wurzeln folgender Gleichungen reell.

$$nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}-(n-3)Cx^{n-4}+\text{rc.}=0$$

$$n(n-1)x^{n-2}-(n-1)(n-2)Ax^{n-3}+(n-2)(n-3)Bx^{n-4}-\text{rc.}=0$$

$$n(n-1)(n-2)x^{n-3}-(n-1)(n-2)(n-3)Ax^{n-4}+\text{rc.}=0$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}-(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)Ax^{n-5}+\text{rc.}=0$$

rc.

und

und diese Gleichungen lassen sich auf folgende Form bringen.

$$x^{n-1} - \frac{(n-1)}{n}Ax^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}Bx^{n-3} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$x^{n-2} - \frac{(n-2)}{n}Ax^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}Bx^{n-4} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-5} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$x^{n-3} - \frac{(n-3)}{n}Ax^{n-4} + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}Bx^{n-5} - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-6} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$x^{n-4} - \frac{(n-4)}{n}Ax^{n-5} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}Bx^{n-6} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{n-7} + \text{ꝛc.} = 0$$

ꝛc.

§. 317.

Auf diese Art läßt sich die Beurtheilung auf Gleichungen, welche um bestimmte Grade niedriger sind, als die gegebene, ausdehnen. Ist z. B. m irgend eine kleinere Zahl als n, so sind, wenn die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, auch alle Wurzeln folgender Gleichung vom Grade m reell,

$$x^m - \frac{m}{n}Ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)}Bx^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)}Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Setzt man m = 2, so bekommt man die Gleichung

x2

$$x^2 - \frac{2}{n}Ax + \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)}B = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung werden reell seyn, wenn die gegebene Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{rc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln hat. Da aber diese quadratische Gleichung keine reelle Wurzeln haben kann, wofern nicht $\frac{AA}{nn} > \frac{2 \cdot 1}{n(n-1)}B$ ist, so folgt auch, daß die gegebene Gleichung nicht lauter reelle Wurzeln haben werde, wofern nicht $AA > \frac{2n}{n-1}B$ ist. Wenn also $AA < \frac{2n}{n-1}B$ ist, so ist dies ein sicheres Kennzeichen, daß die gegebene Gleichung zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln hat.

§. 318.

Hier haben wir also eine Eigenschaft kennen gelernt, welche den Coefficienten der drey ersten Glieder nothwendig zukommen muß, wenn alle Wurzeln der Gleichung reell seyn sollen; und diese Eigenschaft ist eins von den Kennzeichen, deren wir im Anfange dieses Capitels erwähnten. Denn wenn auch aus der Bestimmung $AA > \frac{2n}{n-1}B$ nichts für die Realität der Wurzeln folgt, so ist doch diese, $AA < \frac{2n}{n-1}B$ ein sicheres Kennzeichen der Anwesenheit zweyer imaginären Wurzeln. So muß, wenn man für n nach und nach 2, 3, 4, 5 rc. setzt, wenn alle Wurzeln reell seyn sollen.

bey	seyn
$x^2 - Ax + B = 0$	$A^2 > 4B$
$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$	$A^2 > \frac{6}{2}B$
$x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$	$A^2 > \frac{8}{3}B$
$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$	$A^2 > \frac{10}{4}B$

und wenn also das zweyte Glied fehlt, und der Coefficient des dritten Gliedes oder B positiv, d. h. die Gleichung

$$x^n + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{ꝛc.} = 0$$

ist: so können nicht alle Wurzeln reell, sondern es müssen zum wenigsten zwey imaginär seyn.

§. 319.

Dergleichen Kennzeichen lassen sich auch für die Coefficienten der übrigen Glieder finden, wenn man erwägt, daß die Gleichung

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \text{ꝛc.} = 0$$

eben so viel reelle und imaginäre Wurzeln hat, als die gegebene. Es entsteht nemlich diese Gleichung aus der gegebenen durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$, so daß man durch die Wurzeln dieser Gleichung zugleich die Wurzeln von jener hat. Hat also die gegebene Gleichung und also auch folgende,

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \text{ꝛc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln, so sind auch die Wurzeln der Differenzialgleichung von dieser,

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - \text{ꝛc.} = 0$$

insgesammt reell. Substituirt man nun wieder x für $\frac{1}{y}$, so bekommt man die Gleichung

$$Ax^{n-1} - 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung werden insgesammt reell

seyn,

seyn, wenn die Wurzeln der gegebenen Gleichung solches sind. Hieraus erhellet schon, daß für $n = 3$ nothwendig $BB > 3AC$ seyn muß.

§. 320.

Differenzirt man aber jene Gleichung weiter, so bekommt man

$$Ax^{n-2} - \frac{2(n-2)}{n-1}Bx^{n-3} + \frac{3(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-4} - \text{ꝛc.} = 0$$

$$Ax^{n-3} - \frac{2(n-3)}{n-1}Bx^{n-4} + \frac{3(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-5} - \text{ꝛc.} = 0$$

$$Ax^{n-4} - \frac{2(n-4)}{n-1}Bx^{n-5} + \frac{3(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}Cx^{n-6} - \text{ꝛc.} = 0$$

ꝛc.

also überhaupt, wenn m eine kleinere Zahl als n ist,

$$Ax^{m} - \frac{2m}{n-1}Bx^{m-1} + \frac{3m(m-1)}{(n-1)(n-2)}Cx^{m-2} - \text{ꝛc.} = 0$$

Setzt man nun $m = 2$, so bekommt man die Gleichung

$$Ax^{2} - \frac{4}{n-1}Bx + \frac{6}{(n-1)(n-2)}C = 0$$

wo, wenn die Wurzeln reell seyn sollen,

$$\frac{4BB}{(n-1)^2} > \frac{6AC}{(n-1)(n-2)}$$

seyn muß. Soll also die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln haben, so muß

$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

seyn. Ist hingegen

BB

$$BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

so ist dies ein sicheres Kennzeichen, daß die Gleichung zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln hat. Ist also

$n = 3$ so hat man an $BB > 3AC$

$n = 4$ „ „ „ „ $BB > \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2}AC$

$n = 5$ „ „ „ „ $BB > \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 3}AC$

u. s. f.

ein Merkmal.

§. 321.

Um diese Kennzeichen auf die folgenden Coefficienten auszudehnen, wollen wir die vorhin gefundene Differenzialgleichung

$$-A + 2By - 3Cy^2 + 4Dy^3 - 5Ey^4 + \text{etc.} = 0$$

wieder zur Hand nehmen, und sie von neuem differenziiren, wodurch wir

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - 20Ey^3 + \text{etc.} = 0$$

bekommen. Setzen wir hierin wieder $\frac{1}{x}$ für y, so wird

$$Bx^{n-2} - 3Cx^{n-3} + 6Dx^{n-4} - 10Ex^{n-5} + \text{etc.} = 0$$

und durch fernere Differenziation dieser Gleichung bekommen wir

$$Bx^{n-3} - \frac{3(n-3)}{n-2}Cx^{n-4} + \frac{6(n-3)(n-4)}{(n-2)(n-3)}Dx^{n-5} - \text{etc.} = 0$$

und überhaupt

$$Bx^m - \frac{3m}{n-2}Cx^{m-1} + \frac{6m(m-1)}{(n-2)(n-3)}Dx^{m-2} - \text{etc.} = 0.$$

Nimmt man $m = 2$, so entsteht die quadratische Gleichung

$$Bx^2 - \frac{2 \cdot 3}{n-2}Cx + \frac{6 \cdot 2}{(n-2)(n-3)}D = 0$$

deren Wurzeln reell seyn werden, wenn

$$\frac{9CC}{(n-2)^2} > \frac{6 \cdot 2BD}{(n-2)(n-3)} \text{ oder } CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$$

ist. Wenn also die gegebene Gleichung lauter reelle Wurzeln haben soll, so muß $CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$ seyn, und wenn dies nicht ist, so hat sie zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln.

§. 322.

Wenn wir die Gleichung

$$2B - 6Cy + 12Dy^2 - \text{ꝛc.} = 0$$

von neuem differenziiren, so wird

$$-6C + 24Dy - 60Ey^2 + \text{ꝛc.} = 0$$

oder

$$C - 4Dy + 10Ey^2 - 20Fy^3 + \text{ꝛc.} = 0.$$

Setzt man hierin wieder x für $\frac{1}{y}$, so erhält man

$$Cx^{n-3} - 4Dx^{n-4} + 10Ex^{n-5} - 20Fx^{n-6} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Differenziirt man diese Gleichung von neuem, so wird

$$Cx^{n-4} - \frac{4(n-4)}{(n-3)}Dx^{n-5} + \frac{10(n-4)(n-5)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-6} - \text{ꝛc.} = 0$$

$$Cx^{n-5} - \frac{4(n-5)}{(n-3)}Dx^{n-6} + \frac{10(n-5)(n-6)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-6} - \text{ꝛc.} = 0$$

und überhaupt

$$Cx^m - \frac{4m}{n-3}Dx^{m-1} + \frac{10m(m-1)}{(n-3)(n-4)}Ex^{n-2} - \text{etc.}$$
$$= 0.$$

Setzt man $m = 2$, so sind

$$Cx^2 - \frac{2 \cdot 4}{n-3}Dx + \frac{2 \cdot 10}{(n-3)(n-4)}E = 0$$

und wenn die Wurzeln dieser Gleichung reell seyn sollen, so muß

$$\frac{4 \cdot 4}{(n-3)^2}DD > \frac{2 \cdot 10}{(n-3)(n-4)}CE, \text{ oder}$$

$$DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$$

seyn.

§. 323.

Hieraus läßt sich schon das Verhältniß aller Coefficienten hinlänglich beurtheilen. Soll also überhaupt die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5}$$
$$+ \text{etc.} = 0$$

lauter reelle Wurzeln haben, so muß

$$AA > \frac{2n}{1(n-1)}B$$
$$BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$
$$CC > \frac{4(n-2)}{3(n-3)}BD$$
$$DD > \frac{5(n-3)}{4(n-4)}CE$$
$$EE > \frac{6(n-4)}{5(n-5)}DG$$
$$\text{etc.}$$

 seyn.

seyn. Fehlt eine von diesen Bedingungen, so hat die Gleichung zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln. Wenn ferner diese Kennzeichen nicht von einander abhängen, so ist auch leicht einzusehen, daß die Gleichung eben so viel Paar imaginäre Wurzeln haben werde, als von ihnen nicht statt finden. Dagegen können alle erwähnte Bedingungen bey einer Gleichung angetroffen werden, ohne daß daraus eine gänzliche Abwesenheit der imaginären Wurzeln geschlossen werden dürfte; ja es kann dabey eine Gleichung lauter imaginäre Wurzeln haben. Man muß daher diese Kennzeichen auch nicht weiter ausdehnen, als sie nach den Quellen, woraus sie abgeleitet sind, ausgedehnt werden dürfen.

§. 324.

Man erkennt aber bald, daß nicht ein jedes fehlende Kennzeichen des vorhergehenden §. zwey imaginäre Wurzeln anzeigen könne. Hat nemlich eine Gleichung n Dimensionen, und folglich $n + 1$ Glieder; so giebt jedes davon, das erste und letzte ausgenommen, und also alle $n - 1$ Kennzeichen; aber wenn auch alle fehlen, so kann doch die Gleichung nicht $2n - 2$ imaginäre Wurzeln haben, da sie in allem nur n haben kann. Fehlt eins von diesen Kennzeichen, so ist man gewiß, daß die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln hat; da aber auch die Abwesenheit zweyer ebenfalls nur zwey imaginäre Wurzeln anzeigen kann, so muß man dabey untersuchen, ob sie unmittelbar auf einander folgen oder nicht. Im ersten Falle wird die Anzahl der imaginären Wurzeln nicht größer, im andern Falle aber zeigt jedes zwey imaginäre Wurzeln an. Ist daher z. B. gleich

$$AA < \frac{2n}{n-1}B \text{ und } BB < \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$$

so folgt doch daraus nicht nothwendig, daß die Gleichung vier imaginäre Wurzeln habe; aber dagegen hat man Recht dieses zu behaupten, wenn

$$AA < \frac{2n}{n-1}B \text{ und } CC < \frac{4(n-1)}{3(n-3)}BD$$

bey $BB > \frac{3(n-1)}{2(n-2)}AC$ ist.

§. 325.

Aus zweyen unmittelbar auf einander folgenden Kennzeichen der imaginären Wurzeln folgt also nicht mehr als aus einem, aber wenn diese Kennzeichen in unterbrochener Ordnung auf einander folgen, so daß zwischen je zweyen eines oder mehrere fallen, so zeigt jedes die Anwesenheit zweyer imaginären Wurzeln an. Hierdurch gelangt man zu folgender Regel. Man schreibe über die Glieder der gegebenen Gleichung, das erste und letzte ausgenommen, die vorhin gefundenen Coefficienten der Kennzeichen

$$\begin{array}{ccccccc} & \frac{2n}{n-1} & \frac{3(n-1)}{2(n-2)} & \frac{4(n-2)}{3(n-3)} & \frac{5(n-3)}{4(n-4)} & \text{ꝛc.} & \\ x^n & -Ax^{n-1} & +Bx^{n-2} & -Cx^{n-3} & +Dx^{n-4} & -\text{ꝛc.} & =0 \\ + & .. & .. & .. & .. & \text{ꝛc.} & \end{array}$$

Dann untersuche man die Quadrate der Coefficienten, und überlege, ob sie größer oder kleiner sind, als das Produkt aus dem darüber stehenden Bruche in die angrenzenden Coefficienten, und schreibe im ersten Falle das Zeichen +, im andern aber das Zeichen — unter das Glied, unter das erste und letzte aber allemal +. Ist dies geschehen, so hat die Gleichung wenigstens eben so viel imaginäre Wurzeln als bey den untergeschriebenen Zeichen Abwechselungen angetroffen werden.

§. 236.

Dies ist die Regel, welche Newton zur Entdeckung der imaginären Wurzeln der Gleichung gegeben hat; man muß aber die Bemerkung dabey nicht aus der Acht lassen, daß eine Gleichung mehr imaginäre Wurzeln haben kann, als man durch sie zu entdecken im Stande ist. Dieses Umstandes wegen hat man sich Mühe gegeben, andere ähnliche aber weiter reichende Regeln zu erfinden. Unter diesen ist vorzüglich die von Campbell merkwürdig, welche man der Ausgabe von Newtons Arithmetica universali angehängt findet, und auf folgenden Lehnsatze beruht:

Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, 2c. Größen bedeuten, ihre Anzahl $= m$, und

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{2c.} = S, \text{ und}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{2c.} = V$$

ist: so ist offenbar $V > 0$. Da aber auch

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \text{2c.} = \frac{SS - V}{2}$$

ist, so wird

$$(m - 1)V > SS - V, \text{ oder } mV > SS.$$

Denn nimmt man die Quadrate der Differenzen zwischen je zweyen von diesen Größen, so ist ihre Summe

$$=$$
$$(\alpha-\beta)^2 + (\alpha-\gamma)^2 + (\alpha-\delta)^2 + (\beta-\gamma)^2 + (\beta-\delta)^2 + \text{2c.}$$
$$=$$
$$(m-1)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{2c.}) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \text{2c.})$$
$$=$$
$$(m - 1)V - 2\frac{(SS - V)}{2} = mV - SS.$$

Da

Da also die Summe der Quadrate reeller Größen allemal positiv ist, so ist $mV - SS > 0$, und also $mV > SS$.

§. 327.

Diesen Lehnsatz vorausgesetzt, sey die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} + Fx^{n-6} - \text{rc.} = 0$$

gegeben. Sind alle Wurzeln dieser Gleichung reell, so ist die Anzahl derselben $= n$, und wenn man die Wurzeln a, b, c, d, e, nennt, nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Natur der Gleichungen

	Zahl der Glieder
$A = a + b + c + d + e + \text{rc.}$	n
$B = ab + ac + ad + bc + bd + \text{rc.}$	$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
$C = abc + abd + abe + acd + bcd + \text{rc.}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
$D = abcd + abce + dbde + \text{rc.}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
rc.	

Nimmt man nun von den Gliedern dieser Reihe die Quadrate, und setzt dabey

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{rc.}$$
$$Q = a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2\ b^2c^2 + \text{rc.}$$
$$R = a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + \text{rc.}$$
$$S = a^2b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2e^2 + a^2b^2d^2e^2 + \text{rc.}$$

rc.

so ist nach der Lehre von den Combinationen

$$P = A^2 - 2B$$
$$Q = B^2 - 2AC + 2D$$
$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F$$
$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H$$

rc.

§. 328.

Nach diesem Lehnsatze haben wir

$$nP > AA$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}Q > BB$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}R > CC$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}S > DD$$

ꝛc.

und setzen wir daher für P, Q, R, ꝛc. die vorhin gefundenen Werthe, so bekommen wir folgende Eigenschaften der reellen Wurzeln

$$nAA - 2nB > AA, \text{ oder } AA > \frac{2n}{n-1}B$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}B - \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2}AC + \frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2}D > BB$$

oder

$$BB > \frac{\frac{2n(n-1)}{1 \cdot 2}}{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - 1}(AC - D)$$

Auf ähnliche Art geben die folgenden Gleichungen

$$CC > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1}(BD - AE + F)$$

$$DD > \frac{\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 1}(CE - BF + AG - H)$$

Hier wird also das Quadrat der Coefficienten nicht bloß mit dem Produkte der angrenzenden Coefficienten vergli- chen, sondern auch mit dem Produkte derjenigen, die auf beyden Seiten gleich weit abstehen, so doch, daß diese Pro- dukte wechselsweise positiv und negativ genommen werden.

§. 329.

Man muß demnach über die Glieder der Gleichung, das erste und letzte ausgenommen, die Brüche schreiben, deren Zähler die Coefficienten eines Binomius in derselben Dignität, und die Nenner eben diese Coefficienten um eins vermindert sind. Behandelt man auf diese Art die quadratischen, cubischen, biquadratischen Gleichungen rc.; so ist

für die quadratischen Gleichungen

$$x^2 - \overset{\frac{4}{1}}{A}x + B = 0;\quad A^2 > B$$

für die cubischen Gleichungen

$$x^3 - \overset{\frac{6}{2}}{A}x^2 + \overset{\frac{6}{2}}{B}x - C = 0$$

$$A^2 > 3B \text{ und } B > 3AC.$$

für die biquadratischen Gleichungen

$$x^4 - \overset{\frac{8}{3}}{A}x^3 + \overset{\frac{12}{5}}{B}x^2 - \overset{\frac{8}{3}}{C}x + D = 0$$

$$A^2 > \tfrac{8}{3}B;\ B^2 > \tfrac{12}{5}(AC - D);\ C^2 > \tfrac{8}{3}BD.$$

für die Gleichungen des fünften Grades

$$x^5 - \overset{\frac{10}{4}}{A}x^4 + \overset{\frac{20}{9}}{B}x^3 - \overset{\frac{20}{9}}{C}x^2 + \overset{\frac{10}{4}}{D}x - E = 0$$

$$AA > \tfrac{10}{4}B;\ B^2 > \tfrac{20}{9}(AC - D);\ C^2 > \tfrac{20}{9}(BD - AE);$$

$$D^2 > \tfrac{10}{9}CE,$$

für die Gleichungen des sechsten Grades

$$x^6 - \overset{\frac{12}{5}}{A}x^5 + \overset{\frac{30}{14}}{B}x^4 - \overset{\frac{40}{19}}{C}x^3 + \overset{\frac{30}{14}}{D}x^2 - \overset{\frac{12}{9}}{E}x + F = 0$$

$$A^2 > \tfrac{12}{5}B;\ B^2 > \tfrac{30}{14}(AC - D);\ C^2 > \tfrac{40}{19}(BD - AE + F);$$
$$D^2 > \tfrac{30}{14}(CE - BF);\ E^2 > \tfrac{12}{5}DF.$$

u. s. w.

§. 330.

Fehlt eins von diesen Kennzeichen, so erkennt man daran, daß die gegebene Gleichung zum wenigsten zwey imaginäre Wurzeln hat, fehlen aber mehrere, so muß man, da die Gleichung nicht zweymal so viel imaginäre Wurzeln haben kann als es Kennzeichen giebt, einen ähnlichen Weg einschlagen, als vorhin bey der Newtonianischen Methode. Ist nemlich das Quadrat des Coefficienten eines Gliedes größer als das Produkt aus dem über dem Coefficienten stehenden Bruche in die Produkte der anliegenden und auf beyden Seiten gleichweit abstehenden Coefficienten, so setzt man das Zeichen †, und im entgegenstehenden Falle das Zeichen — darunter. Ist dies geschehen, so zeigt jede Abwechselung der Zeichen eine imaginäre Wurzel an. Wenn daher diese Regel auf mehr imaginäre Wurzeln führt als die Newtonische, so kommt sie der Wahrheit näher; es kann aber die gegebene Gleichung mehr imaginäre Wurzeln haben, als man nach beyden Methoden findet.

§. 331.

Man würde sich demnach irren, wenn man diese Kennzeichen als so vollkommen betrachten wollte, daß dadurch alle reelle und imaginäre Wurzeln entdeckt werden könnten, und die Folgen davon würden mit dem Grade der Gleichung zunehmen. Bey der quadratischen Gleichung sind sie vollkommen zureichend, aber schon die cubische Gleichung kann zwey imaginäre Wurzeln haben, wenn man gleich

gleich durch keine von jenen Methoden darauf geführt wird. Um diese Fälle kennen zu lernen, sey die Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

gegeben, wo die gedachten Methoden, wenn $AA > 3B$ und $BB > 3AC$ ist, keine imaginäre Wurzel anzeigen. Nach §. 306. muß aber auch, wenn keine imaginäre Wurzel statt finden soll, $B < \frac{1}{3}AA$ seyn, und eben dieses heischen jene Methoden. Setzt man also $B = \frac{1}{3}AA - \frac{1}{3}ff$, so muß C zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 \text{ und } \tfrac{1}{27}A^3 - Aff + \tfrac{2}{27}f^3$$

enthalten seyn, und die erwähnten Methoden fordern bloß, daß $C < \frac{BB}{3A}$, oder $C < \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A}$ sey. Diese Bedingung kann statt finden, wenn gleich C nicht zwischen den angezeigten Grenzen liegt.

§. 332.

Ist nemlich $C = \frac{1}{27}A^3 - \frac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg$, so nimmt man nach jenen Regeln keine imaginäre Wurzeln wahr, und dennoch werden zwey imaginäre Wurzeln statt finden, wenn

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg < \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3$$

oder

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{2}{27}Aff + \frac{f^4}{27A} - gg > \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3$$

ist. Wenn also entweder $gg > \frac{(ff + Af)^2}{27A}$ oder $gg < \frac{(Af - ff)^2}{27A}$ ist, so hat die cubische Gleichung zwey imaginäre Wurzeln, wenn auch keine der beschriebenen Metho-

den

den dergleichen anzeigen. Wir haben aber A positiv angenommen, weil die Gleichung im entgegenstehenden Falle durch die Substitution $x = -y$ so verwandelt werden kann, daß A positiv wird. Hiernach lassen sich unzählige cubische Gleichungen machen, welche zwey imaginäre Wurzeln haben, die man nach den beschriebenen Methoden nicht entdeckt. Denn setzt man

$$gg = \frac{(ff + Af)^2}{27A} + hh, \text{ so wird}$$

$$C = \frac{(ff - AA)^2}{27A} - gg = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 - hh$$

und

$$A = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff,$$

und setzt man

$$gg = \frac{(Af - ff)^2}{27A} - hh$$

so daß $hh < \frac{(Af - ff)^2}{27A}$ ist, so wird

$$C = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3 + hh, \text{ und}$$
$$B = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff;$$

in beyden Fällen aber bekommt man eine Gleichung mit zwey imaginären Wurzeln, welche sich durch jene Regeln nicht entdecken lassen. Es sey z. B. $A = 4$, $f = 1$; so wird $B = 5$, und, da hierdurch $gg = \frac{25}{108} + hh$ wird, $C = \frac{225}{108} - \frac{25}{108} - hh = \frac{50}{27} - hh$. Ist daher $C < \frac{50}{27}$, so hat die Gleichung $x^3 - 4x^2 + 5x - C = 0$ allemal zwey imaginäre Wurzeln. Nimmt man aber $gg = \frac{1}{12} - hh$, so muß $hh < \frac{1}{12}$ seyn, und es wird $C = \frac{25}{12} - \frac{1}{12} + hh = 2 + hh$. Es sey $hh = \frac{1}{16}$, so hat die Gleichung $x^3 -$

$4xx + 5x - \frac{33}{16} = 0$ zwey imaginäre Wurzeln, obgleich die öfters erwähnten Regeln auf keine führen.

§. 333.

Ja es lassen sich auch allgemeine Gleichungen machen, wobey diese Methoden keine imaginären Wurzeln angeben, ob dieselben gleich öfters zwey und mehrere imaginäre Wurzeln enthalten. Dies findet allemal statt, wenn in der Gleichung stets zwey ähnliche Zeichen auf einander folgen, wie in diesem

$$x^n - Ax^{n-1} - Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - Ex^{n-5} - Fx^{n-6} + \text{ꝛc.} = 0$$

oder

$$x^n + Ax^{n-1} - Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + Ex^{n-5} - \text{ꝛc.} = 0.$$

Daß aber diese Gleichungen imaginäre Wurzeln haben können, erhellet schon aus der cubischen Gleichung

$$x^3 - Ax^2 - Bx + C = 0$$

welche allemal zwey imaginäre Wurzeln hat, wenn $ff = AA + 3B$ gesetzt wird, und $-C$ zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 \text{ und } \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3$$

liegt. Indeß lassen sich diese Fälle aus jenen Regeln ableiten, wenn man die Gleichung durch eine Substitution auf eine andere Form bringt. Denn setzt man

$x = y + k$, so wird

$$\left.\begin{array}{llll} y^3 & + 3kyy & + 3kky & + k^3 \\ & - Ayy & - 2Aky & - Akk \\ & & - By & - Bk \\ & & & + C \end{array}\right\} = 0$$

und diese Gleichung nach den beschriebenen Methoden untersucht, ist zuvörderst, wie sogleich in die Augen fällt,

$$(3k - A)^2 > 3(kk - 2Ak - B)$$

und wenn

(3kk

$$(3kk - 2Ak - B)^2 > 3(3k - A)(k^3 - Akk - Bk + C)$$

seyn soll, wie das andere Kennzeichen mit sich bringt, so ist nothwendig, daß

$$BB + 3AC + (AB - 9C)k + (AA + 3B)kk > 0$$

sey, was auch k für einen Werth habe. Man nehme demnach k so, daß dieser Ausdruck einen kleinsten Werth erhalte, d. h. man setze $k = \frac{9C - AB}{2(AA + 3B)}$, wo es, wenn dieser Ausdruck noch > 0 ist, wahrscheinlich wird, daß keine imaginäre Wurzel statt finde. Es wird aber

$$BB + 3AC - \frac{(AB - 9C)^2}{2(AA + 3B)} + \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)} > 0$$

oder

$$BB + 3AC > \frac{(AB - 9C)^2}{4(AA + 3B)}.$$

Da also $B = \frac{1}{3}ff - \frac{1}{3}AA$ ist, so wird

$$4ff(\tfrac{1}{9}f^4 - \tfrac{2}{9}AAff + \tfrac{1}{9}A^4 + 3AC) > (\tfrac{1}{3}Aff - \tfrac{1}{3}A^3 - 9C)^2$$

oder

$$4f^6 - A8^2f^4 + 4A^4ff + 108ACff$$

$$>$$

$$A^2f^4 - 2A^4f^2 - 54ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$$

oder

$$4f^6 > 9A^2f^4 - 6A^4ff - 162ACff + A^6 + 54A^3C + 729CC$$

und wenn man also die Faktoren nimmt, so muß seyn

$$(2f^3 + A^3 - 3Af + 27C)(2f^3 - A^3 + 3Af - 27C) > 0$$

Es zeigen demnach jene Regeln imaginäre Wurzeln an, wenn

$$C > \tfrac{1}{27}A^3 + \tfrac{1}{9}Af - \tfrac{2}{27}f^3, \text{ und}$$
$$C > \tfrac{1}{27}A^3 + \tfrac{1}{9}Af + \tfrac{2}{27}f^3, \text{ oder}$$
$$C < \tfrac{1}{27}A^3 + \tfrac{1}{9}Af - \tfrac{2}{27}f^3, \text{ und}$$
$$C < \tfrac{1}{27}A^3 + \tfrac{1}{9}Af + \tfrac{2}{27}f^3$$

ist, und dies sind eben die Bedingungen, welche wir oben gefunden haben.

§. 334.

Hierauf läßt sich auch der Beweis des Harriottischen Satzes gründen, daß jede Gleichung so viel reelle positive Wurzeln habe, als in der Gleichung Abwechselungen, und so viel negative, als darin Folgen gleicher Zeichen vorkommen. Angenommen nemlich, daß die Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{rc.} = 0$$

lauter reelle und positive Wurzeln habe, so werden nicht nur auch alle Wurzeln der Differenzialgleichung

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \text{rc.} = 0$$

reell und positiv, sondern zugleich die Grenzen der Wurzeln von jener Gleichung seyn. Ferner hat alsdann auch die durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ entstehende Gleichung

$$1 - Ay + By^2 - Cy^3 + Dy^4 - \text{rc.} = 0$$

lauter reelle und positive Wurzeln, welche aber die reciproken Größen von den Wurzeln der Grundgleichung und also Größte sind, wenn diese zu den Kleinsten gehören, und umgekehrt. Dies vorausgesetzt differenziire man die gegebene Gleichung, bis man zu der einfachen Gleichung $x - \frac{1}{n} = 0$ gelangt, wo die Wurzel positiv ist, und der Coefficient des zweyten Gliedes negativ, wie wir angenommen haben. Hätte hingegen dieser Coefficient das Zeichen $+$, so würde folgen, daß die Gleichung nicht lauter positive, sondern zum wenigsten eine negative Wurzel hätte.

§. 335.

Wenn die gegebene Gleichung in ihre reciproke Gleichung verwandelt und differenziirt, dann aber x wieder eingeführt, und die Differenziation so lange fortgesetzt wird, bis man nach §. 320. auf die einfache Gleichung $Ax - \frac{2}{n-1}B = 0$ kommt, so wird auch die Wurzel dieser Gleichung positiv seyn, wenn die gegebene Gleichung lauter reelle und positive Wurzeln hat, und das zweyte und dritte Glied dieser Gleichung daher verschiedene Zeichen haben. Haben also diese Glieder einerley Zeichen, so ist solches ein Kennzeichen von wenigstens einer und zwar von der vorigen verschiedenen negativen Wurzel, so daß, wenn die drey ersten Glieder einerley Zeichen haben, dieses ein Kennzeichen von der Anwesenheit zweyer negativen Wurzeln ist.

§. 336.

Setzt man auf ähnliche Art die Verwandlung und Differenziation nach §. 321. fort, bis man auf die einfache Gleichung $Bx - \frac{3}{n-2}C = 0$ kommt, so muß auch die Wurzel dieser Gleichung positiv seyn, wenn alle Wurzeln der gegebenen Gleichung solches sind; und wenn also das dritte und vierte Glied einerley Zeichen haben, so ist dies wieder ein Kennzeichen einer negativen Wurzel. Ueberhaupt ergiebt sich auf diese Art allemal eine negative Wurzel, wenn zwey auf einander folgende Glieder einerley Zeichen haben, und es müssen daher in jeder Gleichung so viel negative Wurzeln seyn, als sie Folgen gleicher Zeichen enthält. Nähme man an, daß die gegebene Gleichung lauter

ter negative Wurzeln hätte, so würden, weil die Wurzeln aller aus ihr hergeleiteten Differenzialgleichungen ebenfalls negativ wären, alle Glieder einerley Zeichen haben müssen. Wenn also zwey auf einander folgende Glieder verschiedene Zeichen hätten, so wäre dieses ein Merkmal von der Anwesenheit einer positiven Wurzel, und auf ähnliche Art müßte man der Gleichung zum wenigsten so viel positive Wurzeln beylegen, als sie Abwechselungen der Zeichen enthielte. Da nun jede Gleichung gerade so viel Wurzeln hat, als es darin Folgen von zwey unmittelbar neben einander stehenden Zeichen giebt: so folgt auch, daß jede Gleichung, deren Wurzeln insgesammt reell sind, darunter so viel positive haben werde, als sie Abwechselungen, und so viel negative, als sie Folgen gleicher Zeichen enthält.