Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Zwölftes Capitel. Von dem Gebrauch der Differenzialien bey der Erforschung der reellen Wurzeln der Gleichungen.

Zwölftes Capitel.

Von dem Gebrauche der Differenzialien bey der Erforschung der reellen Wurzeln der Gleichungen.

§. 294.

Die Theorie der größten und kleinsten Werthe hat uns den Weg zur Erforschung der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichungen gebahnt, und setzt uns in den Stand zu bestimmen, ob diese Wurzeln reell oder imaginär sind. Es sey nemlich die allgemeine Gleichung

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.} = 0$$

gegeben, und ihre Wurzeln p, q, r, s, t etc., so daß p die kleinste von allen und q, r, s, t etc. in dieser Ordnung immer größer, also $q > p$, $r > q$, $s > r$, $t > s$ etc. sey. Wir wollen aber annehmen, daß alle Wurzeln dieser Gleichung reell sind, wo also der höchste Exponent n auch die Anzahl der Wurzeln p, q, r etc. ist, und zugleich aller Wurzeln als ungleich betrachten. Dies schließt indeß die gleichen Wurzeln nicht aus, weil sich diese als ungleiche mit unendlich kleinen Unterschieden ansehen lassen.

§. 295.

Da der Ausdruck $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} -$ etc. nur dann $= 0$ ist, wenn für x einer von den Werthen p, q, r etc.

gesetzt

gesetzt wird, in allen übrigen Fällen hingegen nicht verschwindet: so sey überhaupt

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = z$$

wo also z als eine Funktion von x angesehen werden kann. Nehmen wir nun an, daß für x nach und nach bestimmte Werthe gesetzt und dabey von dem kleinsten $x = -\infty$ angefangen und stufenweise fortgegangen werde: so ist offenbar, daß z entweder einen positiven oder einen negativen Werth bekommen, und nicht eher verschwinden wird, als bis $x = p$ geworden. Vermehrt man x über p, so werden die Werthe von z wieder positiv oder negativ werden, bis $x = q$ geworden, wo denn wieder $z = 0$ ist. Es muß folglich z zwischen zweyen von seinen Werthen, die $= 0$ sind, einen größten oder einen kleinsten Werth gehabt haben, und zwar einen größten, wenn die Werthe von z, indem x zwischen p und q fiel, positiv, und einen kleinsten, wenn diese Werthe negativ sind. Auf ähnliche Art wird z einen größten oder kleinsten Werth erreichen, wenn x von q bis r vergrößert wird, und zwar einen größten, wenn es vorhin einen kleinsten hatte, und umgekehrt. Denn wir haben oben gesehen, daß die größten und kleinsten Werthe mit einander abwechseln.

§. 296.

Da also die Funktion z allemal durch einen zwischen zwey auf einander folgende Wurzeln von x fallenden Werth ein Größtes oder ein Kleinstes wird, so ist die Anzahl der größten oder kleinsten Werthe, welche der Funktion z zukommen, um 1 kleiner als die Anzahl der Wurzeln, und dabey wechseln diese größte und kleinste Werthe auf die Art mit einander ab, daß jene positiv und diese negativ sind. Hat umgekehrt die Funktion z einen größten oder wenigstens einen positiven Werth, wenn $x = f$ ist, und einen kleinsten oder wenigstens negativen Werth, wenn $x = g$ ist: so muß auch zwischen g und f eine Wurzel von x fallen, weil die Funktion z bey dem Uebergange der Größe x von f zu g vom Positiven zum Negativen übergeht, und dabey nothwendig $= 0$ werden muß. Fehlt aber die Bedingung, daß die größten und kleinsten Werthe von z wechselsweise positiv und negativ sind: so folgt jene Behauptung nicht. Denn giebt es kleinste Werthe von z, welche ebenfalls positiv sind, so kann der Werth von z vom Größten zum folgenden Kleinsten übergehen, ohne bey diesem Uebergange $= 0$ zu werden. Uebrigens erhellet aus dem Gesagten, daß auch in dem Falle, wenn nicht alle Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind, zwischen jeden zweyen ein Größtes oder ein Kleinstes liege. Aber umgekehrt läßt sich dieses nicht behaupten, oder daß zwischen jedes Größte und Kleinste eine reelle Wurzel falle. Dies findet nur statt, wenn die Bedingung hinzukommt, daß der eine Werth von z ein positiver und der andere ein negativer ist.

§. 297.

Da nach dem Obigen die Werthe von x, wobey die Funktion

$$z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \text{etc.}$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird, die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0$$

sind: so ist klar, daß die Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$

insgesammt reell seyn werden, wenn alle Wurzeln der Gleichung $z = 0$, deren Anzahl $= n$ ist, reell sind. Denn da die Funktion z so viel größte oder kleinste Werthe hat, als die Zahl $n - 1$ Einheiten enthält, so muß die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ nothwendig eben so viel reelle Wurzeln haben. Auch erhellet hieraus zugleich, daß bie Funktion z nicht mehr größte oder kleinste Werthe haben könne als $n - 1$, und wir gelangen auf diese Art zu dem allgemeinen Satze: Wenn eine Gleichung $z = 0$ lauter reelle Wurzeln hat, so hat die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ ebenfalls lauter dergleichen Wurzeln. Hieraus ergiebt sich umgekehrt, daß die Wurzeln der Gleichung $z = 0$ nicht insgesammt reell seyn werden, wenn die Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx}$ solches nicht insgesammt sind.

§. 298.

Da sich zwischen jeden zweyen reellen Wurzeln der Gleichung $z = 0$ ein Werth befindet, wobey die Funktion z ein Größtes oder ein Kleinstes wird: so hat die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ nothwendig eine reelle Wurzel, wenn die Gleichung $z = 0$ zwey dergleichen hat. Auf ähnliche Art ist die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ gewiß zwey, wenn die Anzahl eben dieser Wurzeln in der Gleichung $z = 0$ drey ist, und überhaupt ist die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ gewiß, $= m - 1$, wenn die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung

$= m$ ist. Hat daher umgekehrt die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ weniger reelle Wurzeln als $m - 1$, so hat auch umgekehrt die Gleichung $z = 0$ gewiß weniger reelle Wurzeln als m. Aber umgekehrt gilt dieser Satz nicht. Denn wenn auch die Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ zum Theil oder insgesammt reell sind, so folgt daraus doch nicht, daß die Gleichung $z = 0$ reelle Wurzeln habe. Es können nemlich die Wurzeln der Gleichung $z = 0$ insgesammt imaginär seyn, wenn gleich die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ lauter reelle Wurzeln hat.

§. 299.

Wenn indeß die obige Bedingung hinzukommt, so kann man allerdings aus der Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $z = 0$ mit Gewißheit behaupten. Denn es seyen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, rc. die reellen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$ und α darunter die größte und β, γ, δ, rc. in eben der Ordnung immer kleiner. Setzt man diese Werthe für x, so bekömmt die Funktion z wechselsweise größte und kleinste Werthe. Da also die Funktion $z = \infty$ wird, wenn man $x = \infty$ annimmt, so müssen die Werthe von z ununterbrochen abnehmen, wenn die Werthe von x von ∞ bis zu α vermindert werden, und also z, wenn $x = \alpha$, ein Kleinstes werden. Wenn also in diesem Falle z einen negativen Werth bekommt, so muß es zuvor irgendwo $= 0$ gewesen seyn, und auf diese Art erkennt man, daß die Gleichung $z = 0$ eine reelle Wurzel $x > \alpha$ habe. Wenn aber die

Funk-

Funktion z bey $x = \alpha$ den positiven Werth behält, so kann sie vorher nicht kleiner gewesen seyn, weil es sonst, wider die Voraussetzung auch ein Kleinstes geben müßte, ehe x bis zu α verändert worden, und es kann demnach die Gleichung $z = 0$ keine reelle Wurzel haben, welche größer als α wäre. Nehmen wir also an, daß $z = \mathfrak{A}$ werde, wenn man $x = \alpha$ setzt, so kann man auf folgende Art schließen: Wenn $\mathfrak{A}$ positiv ist, so hat die Gleichung $z = 0$ keine reelle reelle Wurzel, die größer als α wäre; ist aber $\mathfrak{A}$ negativ, so hat die Gleichung $z = 0$ allemal eine reelle Wurzel, die größer als α ist und nicht mehr.

§. 300.

Um dieses Urtheil weiter fortzusetzen sey

$z = \mathfrak{A}$		$x = \alpha$
$z = \mathfrak{B}$		$x = \beta$
$z = \mathfrak{C}$	wenn	$x = \gamma$
$z = \mathfrak{D}$		$x = \delta$
$z = \mathfrak{E}$		$x = \varepsilon$
ꝛc.		ꝛc.

Da also $\mathfrak{A}$ ein Kleinstes war, so wird $\mathfrak{B}$ ein Größtes, und wenn $\mathfrak{A}$ positiv ist, so wird auch $\mathfrak{B}$ positiv seyn, und zwischen die Grenzen α und β keine reelle Wurzel der Gleichung $z = 0$ fallen. Hat daher diese Gleichung keine reelle Wurzel, die größer als α ist, so wird sie auch keine haben, die größer als β wäre. Wenn aber $\mathfrak{A}$ negativ ist, in welchem Falle die Gleichung eine Wurzel $x > \alpha$ hat: so untersuche man, ob der Werth von $\mathfrak{B}$ positiv oder negativ ist. Im ersten Falle giebt es eine Wurzel $x > \beta$, im letzten aber ist keine zwischen den Grenzen α und β enthalten. Auf ähnliche Art ist $\mathfrak{C}$ ein Kleinstes, wenn $\mathfrak{B}$ ein Größtes ist; und wenn also $\mathfrak{B}$ einen negativen Werth hat, so muß

um

um so mehr C negativ sey, und es giebt also in diesem Falle keine reelle Wurzel zwischen den Grenzen β und γ. Ist hingegen B positiv, so giebt es eine reelle Wurzel zwischen den Grenzen β und γ, wenn C negativ ist; ist aber C positiv, so giebt es keine reelle Wurzel zwischen β und γ; und auf ähnliche Art kann man die Beurtheilung weiter fortsetzen.

§. 307.

Die Beurtheilung zu erleichtern, kann folgende Tabelle dienen:

Die Gleichung z hat eine reelle Wurzel, welche enthalten ist zwischen den Grenzen	wenn ist
$x = \infty$ und $x = \alpha$	$A = -$
$x = \alpha$ und $x = \beta$	$A = -$ und $B = +$
$x = \beta$ und $x = \gamma$	$B = +$ und $C = -$
$x = \gamma$ und $x = \delta$	$C = -$ und $D = +$
$x = \delta$ und $x = \varepsilon$	$D = +$ und $E = -$
ꝛc.	ꝛc.

Verwandelt man diese Behauptungen durch die Umkehrung in verneinende, so gelten auch diese in völliger Strenge, und es hat demnach

die Gleichung $z = 0$ keine reelle Wurzel, welche enthalten wäre zwischen den Grenzen	wenn nicht ist
$x = \infty$ und $x = \alpha$	$A = -$
$x = \alpha$ und $x = \beta$	$A = -$ und $B = +$
$x = \beta$ und $x = \gamma$	$B = +$ und $C = -$
$x = \gamma$ und $x = \delta$	$C = -$ und $D = +$
$x = \delta$ und $x = \varepsilon$	$D = +$ und $E = -$
ꝛc.	ꝛc.

Ver-

Vermittelst dieser Regeln lassen sich aus den Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$, diese Wurzeln als bekannt vorausgesetzt, nicht bloß die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $z = 0$, sondern auch die Grenzen finden, zwischen welchen jene Wurzeln enthalten sind.

Exempel.

Es ist die Gleichung: $x^4 - 14xx + 24x - 12 = 0$ gegeben, man soll bestimmen, ob dieselbe reelle Wurzeln habe und wie viel?

Die Differenzial-Gleichung ist

$4x^3 - 28x + 24 = 0$, oder $x^3 - 7 + 6 = 0$

und die Wurzeln dieser Gleichung 1, 2 und -3, nach ihrer Größe geordnet,

sind	und daher
$\alpha = 2$	$\mathfrak{A} = -4$
$\beta = 1$	$\mathfrak{B} = -1$
$\gamma = -3$	$\mathfrak{C} = -129$

Da $\mathfrak{A}$ negativ ist, so hat die gegebene Gleichung eine reelle Wurzel, die > 2 ist, aber weil $\mathfrak{B}$ negativ ist, keine zwischen den Grenzen 2 und 1 und 1 und -3. Da aber, wenn man $x = -3$ setzt, $z = \mathfrak{C} = -129$, und wenn man $x = -\infty$ annimmt, $z = +\infty$ wird, so muß nothwendig zwischen den Grenzen -3 und $-\infty$ eine reelle Wurzel liegen. Es hat demnach die gegebene Gleichung zwey reelle Wurzeln, die eine $x > 2$ und die andere $x < -3$, weswegen die beyden übrigen Wurzeln imaginär sind. Es muß daher aus dem letzten Gliede der gegebenen Gleichung eben so geurtheilt werden, als aus dem ersten allein. Gehört nemlich die gegebene Gleichung zu einer

geraden

geraden Ordnung, so zeigt das letzte Größte oder Kleinste (es ist aber in diesem Falle ein Kleinstes) wenn es negativ ist, eine reelle, und wenn es positiv ist, eine imaginäre Wurzel an. Was die Gleichung der ungeraden Ordnungen betrifft, so zeigt das letzte Größte, weil für $x = -\infty$ auch $z = -\infty$ wird, wenn es positiv ist, eine reelle und dagegen eine imaginäre Wurzel an, wenn es negativ ist.

§. 302.

Diese Regel zur Beurtheilung der reellen und imaginären Wurzeln läßt sich bequem auf folgende Art ausdrukken. Ist eine Gleichung $z = 0$ gegeben, so betrachte man die Differenzialgleichung davon, setze die Wurzeln derselben nach ihrer Größe geordnet, α, β, γ, δ, rc. und dabey

$$\text{wenn } x = \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta, \text{ rc.}$$
$$z = \mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \mathfrak{E},\ \mathfrak{F}, \text{ rc.}$$

Sind nun die Zeichen $- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$

so hat die Gleichung $z = 0$ so viel reelle Wurzeln als man Buchstaben α, β, γ, δ rc. hat, und eine drüber. Wenn aber einer von den Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, rc. nicht das unter ihm stehende Zeichen hat, so ist dies ein Merkmal zweyer imaginärer Wurzeln. Wenn also $\mathfrak{A}$ das Zeichen $+$ hätte, so gäbe es keine Wurzel zwischen den Grenzen ∞ und β. Wenn $\mathfrak{B}$ das Zeichen $-$ hätte, so gäbe es keine Wurzel zwischen α und γ, und wenn $\mathfrak{C}$ das Zeichen $+$ hätte, so gäbe es keine Wurzel zwischen den Grenzen β und δ, u. s. f. Ueberhaupt aber hat die Gleichung $z = 0$ außer den auf diese Art angezeigten noch eben so viel imaginäre Wurzeln, als die Gleichung $\frac{dz}{dx} = 0$.

§. 303.

Ereignet es sich, daß einer von den Werthen A, B, C, D, ꝛc. verschwindet, so hat daselbst die Gleichung $z=0$ zwey gleiche Wurzeln. Verschwindet nemlich A, so hat sie zwey α gleiche, und verschwindet B, so hat sie zwey β gleiche Wurzeln. In diesem Falle hat nemlich die Gleichung $z=0$ mit der Gleichung $\frac{dz}{dx}=0$ eine Wurzel gemein, und wir haben oben gezeigt, daß dies ein Kennzeichen zweyer gleicher Wurzeln ist. Wenn aber die Gleichung $\frac{dz}{dx}=0$ zwey oder mehr gleiche Wurzeln hat, so hat man an der geraden Anzahl der Wurzeln ein Kennzeichen, daß weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt findet; und man kann daher für die gegenwärtige Absicht die gleichen Wurzeln in gerader Anzahl aus der Acht lassen. Ist hingegen die Anzahl der gleichen Wurzeln der Gleichung $\frac{dz}{dx}=0$ eine ungerade Zahl, so hat man bey der Beurtheilung bloß auf eine von ihnen zu sehen, es müßte denn die Funktion z in diesem Falle selbst verschwinden. Denn ereignet sich dieses, so hat die Gleichung $z=0$ ebenfalls gleiche Wurzeln, und zwar noch eine mehr als die Gleichung $\frac{dz}{dx}=0$. Ist z. B. $\frac{dz}{dx}=(x-\zeta)^{n}R$, so daß diese Gleichung n, ζ gleiche Wurzeln hat, so hat auch, wenn z bey $x=\zeta$ verschwindet, die Gleichung $z=0$, $n+1$ einander und ζ gleiche Wurzeln.

§. 304.

Wir wollen diese Regeln auf die einfachern Gleichungen anwenden, und von der quadratischen anfangen. Es sey also

$$z = x^2 - Ax + B = 0$$

wovon die Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 2x - A$$

ist, welche $= 0$ gesetzt,

$$x = \tfrac{1}{2}A, \text{ oder } \alpha = \tfrac{1}{2}A$$

giebt. Setzt man diesen Werth für x, so wird

$$z = -\tfrac{1}{4}AA + B = \mathfrak{A},$$

und hieraus läßt sich schließen, daß die Gleichung $xx - Ax + B = 0$ zwey reelle Wurzeln haben werde, wenn $\mathfrak{A}$ negativ, oder $AA > 4B$ ist, und daß die eine von diesen Wurzeln größer, und die andere kleiner als $\frac{1}{2}A$ sey. Wenn hingegen der Werth von $\mathfrak{A}$ positiv oder $AA < 4B$ ist, so sind beyde Wurzeln der Gleichung imaginär. Ist endlich $\mathfrak{A} = 0$, oder $AA = 4B$, so hat die Gleichung zwey gleiche Wurzeln, jede $= \frac{1}{2}A$. Diese Sätze sind schon aus der Theorie der quadratischen Gleichung bekannt, und dienen daher zur Bestätigung der Richtigkeit und Brauchbarkeit der hier erklärten Methode.

§. 305.

Wir wollen daher die cubischen Gleichungen auf ähnliche Art untersuchen. Es sey die Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = z = 0$$

gegeben, deren Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 3xx - 2Ax + B$$

ist. Setzt man diese letztere $= 0$, so wird

$$xx = \frac{2Ax - B}{3}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind entweder beyde imaginär,

ginär, oder beyde reell, und in diesem Falle entweder einander gleich oder nicht. Da nun daraus

$$x = \frac{A \pm \sqrt{(A^2 - 3B)}}{3}$$

wird, so sind beyde Wurzeln imaginär wenn $AA < 3B$ ist. In diesem Falle hat die cubische Gleichung nothwendig eine reelle Wurzel, wovon sich aber weiter keine Grenzen als $+\infty$ und $-\infty$ angeben lassen. Sind beyde Wurzeln einander gleich, oder $A^2 = 3B$, so ist $x = \frac{A}{3}$. Wenn also nicht auch zugleich $z = 0$ wird, so hat man auf diese beyden Wurzeln weiter keine Rücksicht zu nehmen, und es hat daher die Gleichung, wie vorhin, nur eine einzige reelle Wurzel. Wird aber bey $x = \frac{A}{3}$ auch zugleich $z = 0$, und dies ereignet sich, wenn

$$- \tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB - C = 0, \text{ oder}$$
$$C = \tfrac{1}{3}AB - \tfrac{2}{27}A^3, \text{ d. h. wenn entweder}$$
$$B = \tfrac{1}{3}A^2, \text{ oder } C = \tfrac{1}{27}A^3$$

ist: so hat die Gleichung drey gleiche Wurzeln, jede $= \frac{1}{3}A$. Was den dritten Fall betrifft, wo die beyden Wurzeln der Differenzialgleichung reell und ungleich sind: so findet derselbe statt, wenn

$$AA > 3B$$

ist. Es sey daher

$$AA = 3B + ff, \text{ oder } B = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff$$

und also jene Wurzeln

$$x = \frac{A \pm f}{3}$$

Hier wird

$$\alpha = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}f, \text{ und } \beta = \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}f.$$

Man suche die dazu gehörigen Werthe für z, oder $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Da jene beyden Wurzeln in der Gleichung

$$xx = \tfrac{2}{3}Ax - \tfrac{1}{3}B$$

enthalten sind, so wird

$$z = -\tfrac{1}{3}Axx + \tfrac{2}{3}Bx - C = -\tfrac{2}{9}AAx + \tfrac{1}{9}AB + \tfrac{2}{3}Bx - C$$

und folglich, da $B = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff$ ist

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB - \tfrac{2}{27}A^2f + \tfrac{2}{9}Bf - C$$
$$= \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 - C$$
$$\mathfrak{B} = -\tfrac{2}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}AB + \tfrac{2}{27}A^2f - \tfrac{2}{9}Bf - C$$
$$= \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3 - C$$

Ist demnach $\mathfrak{A}$ eine negative Größe, oder

$$C > \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3$$

oder

$$C = \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 + gg$$

so hat, wie wir gesehen haben, die cubische Gleichung eine reelle Wurzel, welche größer als $\tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}f$ ist. Wie die übrigen Wurzeln beschaffen seyn werden, muß man aus dem Werthe von $\mathfrak{B}$ beurtheilen. Nun ist $\mathfrak{B} = \tfrac{4}{27}f^3 - gg$; und ist dieser Werth positiv, so hat die Gleichung außerdem noch zwey reelle Wurzeln, davon die eine zwischen den Grenzen α und β, d. h. zwischen

$$\tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}f \text{ und } \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}f$$

enthalten, die andere aber kleiner als $\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}f$ ist. Ist hingegen $gg > \tfrac{4}{27}f^3$ oder $\mathfrak{B}$ negativ, so hat die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln. Ist $\mathfrak{B} = 0$, oder $\tfrac{4}{27}f^3 = gg$, so werden beyde Wurzeln einander gleich und $= \beta = \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}f$. Wenn endlich der Werth von $\mathfrak{A}$ positiv oder

$$C < \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{3}Aff - \tfrac{2}{27}f^3$$

ist: so hat die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln, und die dritte ist reell und $< \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}f$; und ist $\mathfrak{A} = 0$, so hat sie zwey gleiche Wurzeln $= \alpha$ und die dritte ebenfalls kleiner als $\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}f$.

§. 306.

Wenn also die cubische Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

drey reelle Wurzeln haben soll, so müssen folgende drey Bedingungen statt finden. Einmal muß

$$B < \tfrac{1}{3}AA, \text{ oder } B = \tfrac{1}{3}AA - \tfrac{1}{3}ff$$

zum andern

$$C > \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3$$

und drittens

$$C < \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{2}{27}f^3$$

Die beyden letzten Bedingungen laufen darauf hinaus, daß C zwischen den Grenzen

$$\tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff - \tfrac{2}{27}f^3 \text{ und } \tfrac{1}{27}A^3 - \tfrac{1}{9}Aff + \tfrac{1}{27}f^3$$

oder

$$\tfrac{1}{27}(A + f)^2(A - 2f) \text{ und } \tfrac{1}{27}(A - f)^2(A + 2f)$$

enthalten sey. Wenn daher eine von diesen Bedingungen fehlt, so hat die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln. Ist z. B. $A = 3$, und $B = 2$, so ist $\tfrac{1}{3}ff = \tfrac{1}{3}AA - B = 1$ nnd $ff - 3$, und es kann folglich die Gleichung $x^3 - 3xx + 2x - C = 0$ nicht lauter reelle Wurzeln haben, wofern nicht C zwischen den Grenzen $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ und $+\frac{2\sqrt{3}}{9}$ liegt. Ist demnach $C < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, oder $C < -0{,}3849$, oder $C > \frac{2\sqrt{3}}{9}$ oder $C > 0{,}3849$, oder $CC > \tfrac{4}{27}$, so hat die Gleichung nur eine reelle Wurzel.

§. 307.

Da man aus jeder Gleichung das zweyte Glied wegschaffen kann, so wollen wir $A = 0$ setzen, wodurch wir die cubische Gleichung

$$x^3 + Bx - C = 0$$

bekommen. Wenn diese Gleichung lauter reelle Wurzeln haben soll, so muß zuvörderst $B < 0$ oder B eine negative Größe seyn. Es sey also $B = -kk$, wodurch $ff = 3kk$ wird. Ferner muß C zwischen den Grenzen

$$-\tfrac{2}{27}f^3 \text{ und } +\tfrac{2}{27}f^3$$

oder

$$-\tfrac{2}{9}kk\sqrt{3kk} \text{ und } +\tfrac{2}{9}kk\sqrt{3kk}$$

enthalten, und also $C < \frac{4}{27}k^6$ oder

$$CC < -\tfrac{4}{27}B^3$$

seyn. Man kann also alle Bedingungen, welche erfordert werden, damit eine cubische Gleichung lauter reelle Wurzeln habe, auf die einzige zurückführen, daß

$$4B^3 + 27CC$$

eine negative Größe sey; indem hierin enthalten ist, daß B negativ sey, weil sonst $4B^3$ nicht negativ werden könnte. Wir behaupten daher auch allgemein, daß die cubische Gleichung $x^3 + Bx \pm C = 0$ lauter reelle Wurzeln hat, wenn $4B^3 + 27CC$ eine negative Größe ist. Ist hingegen $4B^3 + 27CC$ eine positive Größe, so kommt jener Gleichung nur eine reelle Wurzel zu, und ist $4B^3 + 27CC = 0$, so sind zwar alle Wurzeln reell, aber auch zwey einander gleich.

§. 308.

Wir gehen zu den biquadratischen Gleichungen fort, und nehmen auch da an, daß das zweyte Glied fehle. Es sey also

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0.$$

Setzt man $x = \frac{1}{u}$, so wird

$$1 + Bu^2 - Cu^3 + Du^4 = 0$$

und

und die Differenzialgleichung hiervon ist

$$2Bu - 3Cu^2 + 4Du^3 = 0.$$

Diese Gleichung hat eine Wurzel $u = 0$, und außerdem ist

$$uu = \frac{6Cu - 4B}{8D}$$

und daher

$$u = \frac{3C \pm \surd(9CC - 32BD)}{8D}$$

Sollen also alle vier Wurzeln reell seyn, so wird zuvörderst erfordert, daß

$$9CC > 32BD$$

sey. Wir wollen $9CC = 32BD + 9ff$ setzen, wo

$$u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$$

wird. Hier können wir C allezeit positiv annehmen; weil sonst $u = -v$ werden würde. Nun werden wir nachher beweisen, daß nicht alle Wurzeln reell seyn können, wofern nicht B eine negative Größe ist. Es sey also

$$B = -gg$$

so ist

$$9CC = 9ff - 32ggD, \text{ und } u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$$

Hier sind zwey Fälle zu erwägen, nachdem D entweder positiv oder negativ ist.

1. Ist D positiv, so ist $f < C$, und die drey Wurzeln von u sind nach ihrer Größe geordnet

$$u = \frac{3C + 3f}{8D}$$

$$u = 0$$

$$u = \frac{3C - 3f}{8D}$$

 Braucht

Braucht man diese Werthe für u in der Gleichung

$$u^4 - \frac{Cu^3}{D} + \frac{Bu^2}{D} + \frac{1}{D} = 0$$

so giebt dieselbe folgende Werthe

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C + f)^3(C - 3f)}{4096 D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C - f)^3(C + 3f)}{4096 D^4} + \frac{1}{D}$$

davon der erste und dritte negativ seyn müssen, und beyde sind, weil C positiv und $C < f$ ist, kleiner als $\frac{1}{D}$. Es muß also

$$\frac{1}{D} < \frac{27(C + f)^3(3f - C)}{4096 D^4}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{D} < \frac{27(f - C)^3(C + 3f)}{4096 D^4}, \text{ oder}$$

$$4096 D^3 < 27(f + C)^3(3f - C) \text{ und}$$

$$4096 D^3 < 27(f - C)^3(C + 3f)$$

seyn. Aber die erste Größe ist allemal weit größer als die andere, und es ist daher genug, wenn

$$D^3 < \frac{27}{4096}(f - C)^3(C + 3f)$$

und dabey $B = \frac{9CC - 9ff}{32 D}$, und $f > C$ und $D > 0$ ist. Wenn also D eine positive Größe, C positiv und B negativ ist, so daß

$$f > C, \text{ und } D^3 < \frac{27}{4096}(f - C)^3(C + 3f)$$

d. h.

D <

$$D < \frac{3}{16}(f - C)\sqrt[3]{(3f + C)}$$

ist: so hat die Gleichung lauter reelle Wurzeln. Wenn aber

$$D > \frac{3}{16}(f - C)\sqrt[3]{(3f + C)}$$

und doch

$$D < \frac{3}{16}(f + C)\sqrt[3]{(3f - C)}$$

ist, so sind zwey Wurzeln reell und zwey imaginär. Ist endlich

$$D > \frac{3}{16}(f + C)\sqrt[3]{(3f - C)}$$

so sind alle vier Wurzeln imaginär.

2. Wenn D eine negative Größe $= -F$ ist, C aber positiv und B negativ bleibt, so ist, wegen

$$B = \frac{9CC - 9ff}{32D} = \frac{9ff - 9CC}{32F}$$

$C > f$. Da also

$$u = \frac{3C \pm 3f}{8D} = -\frac{3C \mp 3f}{8F}$$

ist: so sind die drey Werthe von u nach ihrer Größe geordnet

$$u = 0$$

$$u = -\frac{3C + 3f}{8F}$$

$$u = -\frac{3C - 3f}{8F}$$

und sie geben folgende Werthe

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C - f)^3(C + 3f)}{4096\,F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{27(C + f)^3(C - 3f)}{4096\,F^4} - \frac{1}{F}$$

Da also $\mathfrak{A}$ eine negative Größe ist, so hat die Gleichung gewiß eine, und folglich auch zwey reelle Wurzeln. Sollen aber alle Wurzeln reell seyn, so muß $\mathfrak{B}$ eine positive Größe, und folglich

$$27(C - f)^3(C + 3f) > 4096\,F^3$$

seyn. Ferner ist nöthig, daß $\mathfrak{C}$ negativ, oder

$$27(C + f)^3(C - 3f) < 4096\,F^3$$

werde. Sollen daher alle Wurzeln reell seyn, so muß F^3 zwischen die Grenzen

$$\frac{27}{4096}(C + f)^3(C - 3f) \text{ und}$$

$$\frac{27}{4096}(C - f)^3(C + 3f)$$

oder zwischen

$$\frac{3}{16}(C + f)\sqrt[3]{(C - 3f)} \text{ und}$$

$$\frac{3}{16}(C - f)\sqrt[3]{(C + 3f)}$$

fallen, und wenn dieses nicht ist, so sind zwey Wurzeln imaginär.

3. Nun sey B eine positive Größe, und auch D positiv, so ist $C > f$, weil $B = \frac{9CC - 9ff}{32D}$. Da ferner

$$u = \frac{3C \pm 3f}{8D}$$

so

so sind die Wurzeln nach ihrer Größe geordnet

$$u = \frac{3(C + f)}{8D}$$

$$u = \frac{3(C - f)}{8D}$$

$$u = 0$$

und hieraus wird

$$\mathfrak{A} = \frac{27(C + f)^3(C - 3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{27(C - f)^3(C + 3f)}{4096\,D^4} + \frac{1}{D}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{D}$$

wo, da $\mathfrak{C}$ eine positive Größe ist, wenigstens zwey Wurzeln imaginär sind. Ist indeß $\mathfrak{A}$ negativ, welches statt findet, wenn

$$4096\,D^3 < 27(C + f)^3(3f - C)$$

ist, so sind die übrigen beyden Wurzeln reell; ist aber

$$4096\,D^3 > 27(C + f)^3(3f - C)$$

so sind alle vier Wurzeln imaginär.

4. Es bleibe B positiv, D aber sey negativ, und $= -F$. Da $B = \frac{9ff - 9CC}{32F}$, so ist $f > C$, und da

$$u = \frac{3C \mp 3f}{8F}$$

ist, so sind die Wurzeln von u nach ihrer Größe geordnet

$$u = \frac{3(f - C)}{8F}$$

$$u = 0$$

$$u = \frac{3(C + f)}{8F}$$

Diese

Diese Werthe geben

$$\mathfrak{A} = -\frac{27(f - C)^3(C + 3f)}{4069F^4} - \frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{1}{F}$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{27(C + f)^3(3f - C)}{4096F^4} - \frac{1}{F}$$

wo, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ negativ sind, die Gleichung gewiß zwey reelle Wurzeln hat; die übrigen beyden sind, weil $\mathfrak{B}$ negativ ist, imaginär.

§. 309.

Wenn also die Buchstaben B, C, D positive Größen bedeuten, so sind folgende Fälle zu beurtheilen, wobey es, wegen $f = \sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)}$ auf nachstehendes ankommt.

1. Wenn die Gleichung

$$x^4 - Bx^2 \pm Cx + D = 0$$

ist, so sind alle Wurzeln reell, wenn

$$D < \frac{3}{16}(\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C)}$$

$$D < \frac{3}{16}(\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C)}$$

ist. Hingegen sind zwey Wurzeln reell und zwey imaginär, wenn

$$D > \frac{3}{16}(\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C)}$$

aber

$$D < \frac{3}{16}(\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} + C)\sqrt[3]{(3\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} - C)}$$

ist; und insgesammt imaginär, wenn

D <

$$D > \frac{3}{16}(\sqrt{}(CC + \frac{32}{9}BD) + C)\sqrt[3]{}(3\sqrt{}(CC + \frac{32}{9}BD) - C)$$

ist.

2. Wenn die Gleichung

$$x^4 - Bx^2 \pm Cx - D = 0$$

ist, so sind allemal zwey Wurzeln reell, und die beyden übrigen sind solches auch, wenn D zwischen die Grenzen

$$\frac{3}{16}(\sqrt{}(CC + \frac{32}{9}BD) + C)\sqrt[3]{}(C - 3\sqrt{}(CC - \frac{32}{9}BD))$$

und

$$\frac{3}{16}(\sqrt{}(C - \sqrt{}(CC - \frac{32}{9})BD))\sqrt[3]{}(C + 3\sqrt{}(CC + \frac{32}{9}BD))$$

fällt; ist dies nicht, so sind dieselben imaginär.

3. Wenn die Gleichung

$$x^4 + Bx^2 \pm Cx + D = 0$$

ist, so sind allemal zwey Wurzeln imaginär. Die übrigen beyden sind reell, wenn

$$D < \frac{3}{16}(\sqrt{}(CC - \frac{32}{9}BD) + C)\sqrt[3]{}(3\sqrt{}(CC - \frac{32}{9}BD) - C)$$

und imaginär, wenn

$$D > \frac{3}{16}(\sqrt{}(CC - \frac{32}{9}BD) + C)\sqrt[3]{}(3\sqrt{}(CC - \frac{32}{9}BD) - C)$$

ist.

4. Wenn die Gleichung

$$x^4 + Bx^2 \pm Cx - D = 0$$

ist, so sind allemal zwey Wurzeln reell und zwey imaginär.

Erstes

Erstes Exempel.

Es ist die Gleichung $x^4 - 2xx + 3x + 4 = 0$, gegeben, man soll finden, ob die Wurzeln derselben reell oder imaginär sind.

Da dies Exempel zu dem ersten Falle gehört, so ist

$$B = 2;\ C = 3 \text{ und } D = 4$$

also

$$CC + \frac{32}{9}BD = 9 + \frac{32\cdot 8}{9} = \frac{337}{9}$$

und

$$\sqrt{(CC + \frac{32}{9}BD)} = \frac{\sqrt{337}}{3}.$$

Sollen also alle Wurzeln reell seyn, so muß

$$4 < \frac{3}{16}\left(3 + \frac{\sqrt{337}}{3}\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337}-3)} = \frac{1}{16}(9+\sqrt{337})\sqrt[3]{(\sqrt{337}-3)}$$

$$4 < \frac{3}{16}\left(\frac{\sqrt{337}}{3} - 3\right)\sqrt[3]{(\sqrt{337}+3)} = \frac{1}{16}(\sqrt{337}-9)\sqrt[3]{(\sqrt{337}+3)}$$

seyn. Man muß daher auf dem Wege der Näherung suchen, ob $4 < \frac{69}{16}$ und $4 < \frac{24}{16}$ sey, und da bloß das erste ist, so hat die gegebene Gleichung zwey reelle Wurzeln und zwey imaginäre.

Zweytes Exempel.

Es ist die Gleichung gegeben:

$$x^4 - 9xx + 12x - 4 = 0$$

Da diese Gleichung zum zweyten Falle gehört, so hat sie zwey reelle Wurzeln. Was die beyden übrigen betrifft, so ist, wegen

$$B = 9,\ C = 12 \text{ und } D = 4$$

$$\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{(144 - 32 \cdot 4)} = 4.$$

Man muß demnach untersuchen, ob

$$4 > \frac{3}{16} \cdot 16 \cdot \sqrt[3]{3}, \text{ d. h. } 4 > 0$$

und

$$4 < \frac{3}{16} \cdot 8\sqrt[3]{24}, \text{ d. h. } 4 < 3\sqrt[3]{3}$$

ist, und da beydes statt findet, so hat die gegebene Gleichung vier reelle Wurzeln.

Drittes Exempel.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^4 + xx - 2x + 6 = 0.$$

Da diese Gleichung zum dritten Falle gehört, so hat sie gewiß zwey imaginäre Wurzeln. Dann ist

$$B = 1, C = 2 \text{ und } D = 6$$

also

$$\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{(4 - \frac{64}{3})}$$

und da dieses eine imaginäre Größe ist, so sind auch die beyden übrigen Wurzeln imaginär.

Viertes Exempel.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 20 = 0.$$

Schafft man das zweyte Glied weg, indem man $x = y + 1$ setzt, so wird

$$\begin{array}{rcrrrrr}
x^4 & = & y^4 & + 4y^3 & + 6yy & + 4y & + 1 \\
-4x^3 & = & & -4y^3 & -12yy & -12y & -4 \\
+8x^2 & = & & & +8yy & +16y & +8 \\
-16x & = & & & & -16y & -16 \\
+20 & = & & & & & +20 \\
\hline
\text{also } & & y^4 & & +2yy & -8y & +9 = 0
\end{array}$$

und diese Gleichung hat, da sie zu dem dritten Falle gehört, zwey imaginäre Wurzeln. Da ferner

$$B = 2, \quad C = 8, \quad D = 9$$

ist, so wird

$$\sqrt{(CC - \frac{32}{9}BD)} = \sqrt{(64 - 64)} = 0$$

Man vergleiche also $D = 9$ mit $\frac{3}{16} \cdot 8\sqrt[3]{-8} = -3$.

Da $D = 9 > -3$ ist, so sind auch die beyden übrigen Wurzeln imaginär.

Fünftes Exempel.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 34x - 24 = 0$$

Schafft man das zweyte Glied durch die Substitution $x = y + 1$ weg, so wird

$$y^4 - 13yy + 12y + 0 = 0$$

wo also durch die Vergleichung mit dem zweyten Falle

$$B = 13, \quad C = 12 \text{ und } D = 0$$

wird. Es muß demnach, wenn alle Wurzeln reell seyn sollen, $D > \frac{3}{16} \cdot 24 \cdot \sqrt[3]{-24}$, oder $0 > -9\sqrt[3]{3}$ und $D < 0$ seyn. Da also D nicht größer als 0 ist, so ist dies ein Merkmal, daß die Gleichung vier reelle Wurzeln hat.

Denn

Denn wenn $D = 0$ ist, so geht die andere Gleichung in $D < \frac{3}{16}\left(\frac{16BD}{9C}\right)\sqrt[3]{4C}$, oder $1 < \frac{B}{3C}\sqrt[3]{4C}$, oder $27CC < 4B^3$ über. Es ist aber $27 \cdot 144 < 4 \cdot 13^3$ oder $36 \cdot 27 < 13^3$

§. 310.

Es würde sehr mühsam und schwer seyn, diese Methode auch auf die höhern Gleichungen auszudehnen, weil dabey die Wurzeln der Differenzial-Gleichungen meistens nicht angegeben werden können; so oft dies möglich ist, läßt sich nach dem Gesagten bestimmen, wie viel reelle und wie viel imaginäre Wurzeln die gegebene Gleichung hat. Wenn also eine Gleichung nur aus drey Gliedern besteht, so läßt sich allemal finden, ob ihre Wurzeln reell oder imaginär sind. Es sey die allgemeine Gleichung

$$x^{m+n} + Ax^n + B = 0 = z$$

gegeben, wovon die Differenzial-Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = (m+n)x^{m+n-1} + nAx^{n-1}$$

ist. Setzt man diese $= 0$, so ist zuvörderst $x^{n-1} = 0$, und wenn also n eine ungerade Zahl ist, so findet keine Wurzel statt, welche ein Größtes oder ein Kleinstes gäbe; ist aber n eine gerade Zahl, so hat man eine Wurzel, nemlich $x = 0$, worauf Rücksicht genommen werden muß. Dann ist aber $(m+n)x^m + nA = 0$, und diese Gleichung hat, wenn m eine gerade Zahl und A positiv ist, keine reelle Wurzel, so daß folgende Fälle zu überlegen sind.

1. Ist m eine gerade und n eine ungerade Zahl, so gilt die Wurzel $x = 0$ nicht. Wenn also A eine positive Größe ist, so hat man gar keine Wurzel, welche ein Größtes oder ein Kleinstes gäbe, und es hat daher die gegebene

Gleichung, weil $m + n$ eine ungerade Zahl ist, nur eine einzige reelle Wurzel. Ist aber A eine negative Größe $= -E$, so ist

$$x = \pm \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}},$$

und daher

$$\alpha = + \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}} \text{ und } \beta = - \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}$$

Diese Werthe geben

$$\mathfrak{A} = (x^m - E)x^n + B = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

und

$$\mathfrak{B} = + \frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

Wenn also $\mathfrak{A}$ eine negative Größe oder

$$\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} > B$$

ist, so hat die Gleichung eine reelle Wurzel, die $> \alpha$ ist. Ist überdem

$$B > -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m}$$

oder, um beyde Bedingungen zusammen zu fassen,

$$(m+n)^{m+n}B^m < m^m n^n E^{m+n}$$

so hat die Gleichung drey reelle Wurzeln, und wenn diese Bedingung nicht statt findet, nicht mehr als eine. Dies gilt von der Gleichung $x^{m+n} - Ex^n + B = 0$, wenn m eine ungerade Zahl ist. Ist darin E negativ, so hat dieselbe allemal eine reelle Wurzel.

2. Es seyen beyde Zahlen m und n ungerade, also $m + n$ eine gerade Zahl, und es komme keine Wurzel $x = 0$ in Rechnung. Da

$(m+n)x^m$

$$(m + n)x^m + nA = 0$$

ist, so wird

$$x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m + n}}$$

und setzt man diese einzige Wurzel $= \alpha$, so wird

$$\mathfrak{A} = -\frac{mA}{m + n} x^n + B = -\frac{mA}{m + n}\left(\frac{mA}{m + n}\right)^{n:m} + B$$

Ist dieser Werth negativ, so hat die Gleichung zwey reelle Wurzeln, sonst keine. Es hat also die Gleichung

$$x^{m+n} + Ax^n + B = 0$$

zwey reelle Wurzeln, wenn

$$m^m n^n A^{m+n} > (m + n)^{m+n} B^m$$

und keine, wenn

$$m^m n^n A^{m+n} < (m + n)^{m+n} B^m$$

ist.

3. Es seyen beyde Zahlen m und n, also auch $m + n$ gerade; so giebt eine Wurzel $x = 0$ ein Größtes oder ein Kleinstes, und sie ist eine einzige, wenn A eine positive Größe ist, woher, wenn man $\alpha = 0$ setzt, $\mathfrak{A} = B$ wird. Ist also B auch eine positive Größe, so hat die Gleichung keine reelle Wurzel; ist aber B negativ, so finden zwey reelle Wurzeln statt, aber auch nicht mehr, indem A positiv ist. Setzt man aber A negativ $= -E$, so ist

$$x = \pm\sqrt[m]{\frac{nE}{m + n}}$$

und man hat drey Größte oder Kleinste, nemlich

$$\alpha = +\sqrt[m]{\frac{nE}{m + n}}$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = -\sqrt[m]{\frac{mE}{m + n}}$$

Diese Werthe geben für $z = x^{m+n} - Ex^n + B = 0$

$$\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

$$\mathfrak{B} = B$$

$$\mathfrak{C} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

Ist also B eine negative Größe, so hat die Gleichung nur zwey reelle Wurzeln, weil $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ negativ, und auch $\mathfrak{B} = B$ solches ist. Ist hingegen B positiv, so hat die Gleichung vier reelle Wurzeln, wenn

$$(m+n)^{m+n}B^m < m^m n^n E^{m+n}$$

und keine reelle Wurzel, wenn

$$(m+n)^{m+n}B^m > m^m n^n E^{m+n}$$

ist.

4. Ist m eine ungerade und n eine gerade Zahl, so giebt die Gleichung $x = 0$ ein Größtes oder ein Kleinstes, und außerdem ist

$$x = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$$

Ist also A eine positive Zahl, so wird

$$\alpha = 0,\ \beta = -\sqrt[m]{\frac{nA}{m+n}}$$

und also

$$\mathfrak{A} = B, \text{ und}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{mA}{m+n}\left(\frac{nA}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

Ist also B eine negative Größe $= -F$, und außerdem

$$m^m n^n A^{m+n} > (m+n)^{m+n}F^m$$

so hat die Gleichung drey reelle Wurzeln, sonst aber nur eine. Ist aber A eine negative Größe $= -E$, so wird

x =

$$x = + \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}}, \text{ und daher}$$

$$\alpha = \sqrt[m]{\frac{nE}{m+n}} \text{ und } \beta = 0$$

also

$$\mathfrak{A} = -\frac{mE}{m+n}\left(\frac{nE}{m+n}\right)^{n:m} + B$$

$$\mathfrak{B} = B.$$

Es hat demnach die Gleichung drey reelle Wurzeln, wenn B eine positive Größe, und

$$m^m n^n E^{m+n} > (m+n)^{m+n} B^m$$

ist, und nur eine einzige, wenn diese Bedingung nicht statt findet.

§. 311.

Wenn alle Coefficienten $= 1$ sind, und μ und ν ganze Zahlen bedeuten, so kann man folgende Gleichungen auf nachstehende Art beurtheilen.

$x^{2\mu+2\nu-1} + x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$ hat eine einzige reelle Wurzel.

$x^{2\mu+2\nu-1} - x^{2\nu-1} \pm 1 = 0$ hat drey reelle Wurzeln, wenn

$$(2\mu + 2\nu - 1)^{2\mu+2\nu-1} < (2\mu)^{2\mu}(2\nu - 1)^{2\nu-1}$$

ist, und da dies nie statt finden kann, so hat man auch nie mehr als eine reelle Wurzel.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} - 1 = 0$ hat zwey reelle Wurzeln.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu-1} + 1 = 0$ hat keine reelle Wurzel.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} + 1 = 0$ hat keine reelle Wurzel.

$x^{2\mu+2\nu} \pm x^{2\nu} - 1 = 0$ hat zwey reelle Wurzeln.

$x^{2\mu+2\nu+1} + x^{2\nu} \pm 1 = 0$ hat eine reelle Wurzel.

$x^{2\mu+2\nu+1} - x^{2\nu} \pm 1 = 0$ hat eine reelle Wurzel.

Da im dritten Falle die Exponenten gerade Zahlen sind, so kann man die Gleichung durch die Substitution $xx = y$ auf eine einfachere Form bringen, und so kann dieser Fall auch weggelassen werden. Wenn also eine Gleichung aus drey Gliedern besteht, so kann dieselbe nicht mehr als drey reelle Wurzeln haben.

Exempel.

Man soll die Fälle bestimmen, in welchen die Gleichung

$$x^5 \pm Ax^2 \pm B = 0$$

drey reelle Wurzeln hat.

Da diese Gleichung zum vierten Falle gehört, so ist klar, daß die Größen A und B entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Findet also dieses nicht statt, so hat die Gleichung auch nicht mehr als eine reelle Wurzel. Hat aber die Gleichung die Form

$$x^5 \pm Ax^2 \mp B = 0,$$

so muß, wenn sie drey reelle Wurzeln haben soll, nothwendig

$$3^3 2^2 A^5 > 5^5 B^3 \text{ oder } A^5 > \frac{3125}{108} B^3$$

seyn. Ist also $B = 1$, so muß

$$A^5 > \frac{3125}{108} \text{ oder } A > 1{,}960132$$

seyn. Es sey also $A = 2$, so hat die Gleichung

$$x^5 - 2x^2 + 1 = 0$$

drey reelle Wurzeln, und da die eine dieser Wurzeln $x = 1$ ist, so folgt, daß die biquadratische Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

zwey reelle Wurzeln habe. Man erkennt dieses theils aus den im gegenwärtigen Capitel gegebenen Vorschriften, theils ist es daraus klar, weil jede Gleichung von einer geraden Ordnung, wenn das absolute Glied negativ ist, allemal zwey reelle Wurzeln hat.

§. 312.

Auch Gleichungen von vier Gliedern lassen sich hiernach beurtheilen, wenn die Exponenten von x in den drey ersten oder den drey letzten Gliedern in einer arithmetischen Progression stehen.

Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung: $x^7 - 2x^5 + x^3 - a = 0$ gegeben.

Setzt man $z = x^7 - 2x^5 + x^3 - a$, so ist

$$\frac{dz}{dx} = 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$$

und diese Gleichung $= 0$ gesetzt, giebt einmal $x^2 = 0$, worauf man aber, weil es ein doppelter Werth ist, weiter keine Rücksicht zu nehmen hat. Ferner ist

$$7x^4 - 10x^2 + 3 = 0$$

woraus $x^2 = \frac{5 \pm 2}{7}$ wird, und vier Werthe von x fließen, welche nach ihrer Größe geordnet, folgende Werthe für z geben:

$\alpha = 1$	$\mathfrak{A} = -a$
$\beta = +\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\mathfrak{B} = \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$
$\gamma = -\sqrt{\frac{3}{7}}$	$\mathfrak{C} = \frac{-48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} - a$
$\delta = -1$	$\mathfrak{D} = -a$

Ist also a eine positive Zahl, so ist entweder

$$a > \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ oder } a < \frac{48}{343}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Im ersten Falle hat die Gleichung, weil die Größen A, B, C und D insgesammt positiv sind, nur eine einzige reelle Wurzel. Im andern Falle hingegen hat sie drey reelle Wurzeln, die eine > 1, die zweyte zwischen den Grenzen 1 und $\sqrt{\frac{3}{7}}$, und die dritte zwischen den Grenzen $+\sqrt{\frac{3}{7}}$ und $-\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Wenn a eine negative Größe wird, indem man $x = -y$ setzt, so wird die Gleichung auf die vorige Form gebracht. Sollen also drey Wurzeln reell seyn, so muß nothwendig $a < 0{,}0916134$, oder $a < \frac{1}{11}$ seyn.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung gegeben:

$$ax^8 - 3x^6 + 10x^3 - 12 = 0.$$

Da hier die Exponenten der drey letzten Glieder in einer arithmetischen Progression stehen, so setze man $x = \frac{1}{y}$. Hierdurch erhält man

$$a - 3y^2 + 20y^5 - 12y^8 = 0$$

Man setze also

$$z = 12y^8 - 10y^5 + 3y^2 - a = 0$$

so ist die Differenzialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = 96y^7 - 50y^4 + 6y = 0$$

und hieraus wird zuvörderst $y = 0$, und dann

$$y^6 = \frac{50y^2 - 6}{96}, \text{ und } y^3 = \frac{25 \pm 7}{96}$$

also entweder

$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \text{ oder } y = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}.$$

Ordnet man diese drey Wurzeln nach ihrer Größe, so sind die zugehörigen Werthe von z

$\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$	$\mathfrak{A} = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - a$
$\beta = \sqrt[3]{\frac{3}{16}}$	$\mathfrak{B} = \frac{99}{64}\sqrt[3]{\frac{9}{256}} - a = \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}} - a$
$\gamma = 0$	$\mathfrak{C} = -a$

Ist also $a > \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, so hat die gegebene Gleichung zwey reelle Wurzeln, die eine $> \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, und die andere $\lessgtr 0$. Ausserdem werden ihr noch zwey reelle Wurzeln zukommen, wenn $\mathfrak{B}$ eine positive Größe, d. h. $a < \frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ ist. Wenn daher a zwischen den Grenzen $\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ und $\frac{99}{256}\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$ oder zwischen 0,48075... und 0,50674 enthalten ist, so hat die Gleichung vier reelle Wurzeln. Setzt man also $a = \frac{1}{2}$, so hat die Gleichung

$$x^8 - 6x^6 + 20x^3 - 24 = 0$$

vier reelle Wurzeln zwischen den Grenzen ∞; $\sqrt[3]{\frac{16}{3}}$; $\sqrt[3]{3}$, 0; $-\infty$, und es sind also davon drey positiv und eine negativ.
