Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Eilftes Capitel. Von den größten und kleinsten Werthen der vielförmigen Funktionen un der Funktionen mehrerer veränderlichen Größen.

Eilftes Capitel.

Von den größten und kleinsten Werthen der vielförmigen Funktionen und der Funktionen mehrerer veränderlichen Größen.

§. 273.

Wenn y eine vielförmige Funktion von x ist, und also für jeden Werth von x mehrere reelle Werthe bekommt: so stehen die bey der Veränderung von x entspringende mehrere Werthe von y in einer solchen Verbindung unter einander, daß sie mehrere Reihen successiver Werthe geben. Denn betrachtet man y als die Applicate einer Curve, deren Abscisse durch x bezeichnet wird, so gehören zu einer und derselben Abscisse x so viele Schenkel einer und derselben Curve, als y reelle Werthe hat, und man muß daher die successiven Werthe von y, welche einerley Schenkel geben, als zu einander gehörig, und die, welche verschiedene Schenkel bilden, als von einander getrennt betrachten. Man hat also in diesem Falle so viele Reihen mit einander verbundener Werthe von y, als dasselbe bey jedem Werthe von x reelle Werthe bekommt, und in jeder dieser Reihen werden die Werthe von y, wenn man x größer werden läßt, entweder wachsen oder abnehmen, oder wenn sie eine Zeitlang gewachsen sind, wieder abnehmen und umgekehrt. Hieraus erhellet, daß es in jeder Reihe mit einander verbundener Werthe eben so größte oder kleinste Werthe giebt,

als

als dergleichen bey den einförmigen Funktionen statt fanden.

§. 274.

Zur Bestimmung dieser größten und kleinsten Werthe kann man sich eben der Methode bedienen, welche das vorhergehende Capitel für die Erfindung der größten und kleinsten Werthe der einförmigen Funktionen enthält. Denn da die Funktion y, wenn man x um das Increment ω vergrößert, allemal in

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \text{rc.}$$

übergeht, so muß, wenn ein größter oder ein kleinster Werth statt finden soll, das Glied $\frac{\omega dy}{dx} = 0$ werden. Es zeigen also die Wurzeln der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ diejenigen Werthe von x an, welchen in den Reihen der mit einander verbundenen Werthe von y größte oder kleinste Werthe zugehören. Auch bleibt nicht zweifelhaft, in was für einer Reihe der mit einander verbundenen Werthe der größte oder kleinste Werth statt finde. Denn da die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ beyde veränderliche Größen x und y enthält, so lassen sich die Werthe von x nicht anders bestimmen, als wenn vermittelst einer Gleichung, welche das Verhältniß zwischen y und x enthält, die veränderliche Größe y weggeschaft wird. Ehe dieses aber geschiehet, gelangt man zu einer Gleichung, worin der Werth von y durch eine rationale oder einförmige Funktion von x ausgedruckt wird. Hat man hieraus die Werthe von x gefunden, so giebt ein jeder einen zugehörigen Werth von y, und dieser ist in der

Reihe

Reihe der mit einander verbundenen Werthe, zu welcher er gehört, entweder ein größter oder ein kleinster.

§. 275.

Ob diese Werthe größte oder kleinste Werthe von y sind? läßt sich auf die vorhin beschriebene Art erforschen. Man sucht nemlich den Werth von $\frac{ddy}{dx^2}$ in endlichen Größen, und setzt darin nach und nach jeden der gefundenen Werthe von x und zugleich für y den Werth, der ihm für jeden Werth von x zukommt. Hat man dieses gethan, so untersucht man, ob $\frac{ddy}{dx^2}$ einen positiven oder einen negativen Werth bekommt. Im ersten Fall hat man daran ein Kennzeichen eines kleinsten, so wie an dem andern ein Merkmal eines größten Werths. Verschwindet aber $\frac{ddy}{dx^2}$ so muß man die Formel $\frac{d^3y}{dx^3}$ zu Rathe ziehen. Verschwindet diese nicht, so giebt es weder ein Größtes noch ein Kleinstes, verschwindet aber dieselbe ebenfalls, so muß man zu der Formel $\frac{d^4y}{dx^4}$ fortgehen, und dabey eben so verfahren, als bey der Formel $\frac{ddy}{dx^2}$ vorgeschrieben worden ist. Wenn auch $\frac{d^4y}{dx^4}$ verschwände, so müßte man zu dem fünften Differenz,iale von y fortgehen; man mag aber fortgehen so weit man will, so muß man bey den Differenzialien der ungeraden Ordnungen eben so schließen, als bey der Formel $\frac{d^3y}{dx^3}$ gelehret worden ist. In diesen Fällen muß

man

man nemlich in der Reihe der Formeln $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ꝛc. so weit fortgehen, bis man zu einer gelangt, die nicht verschwindet. Gehört diese zu einer ungeraden Ordnung, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt; gehört sie aber zu einer geraden Ordnung, so zeigt ihr positiver Werth ein Kleinstes, ihr negativer Werth aber ein Größtes an.

§. 276.

Es werde die Funktion y aus x durch irgend eine Gleichung bestimmt. Differenzirt man diese Gleichung, so erhält sie die Form $Pdx + Qdy = 0$, und es wird demnach, wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt, $\frac{P}{Q} = 0$, folglich entweder $P = 0$, oder $Q = \infty$. Die letzte Gleichung kann nicht statt finden, wenn das Verhältniß zwischen x und y durch eine ganze rationale Gleichung gegeben ist, weil entweder x oder y oder beyde unendlich groß werden müßten. Es bleibt also bloß die Gleichung $P = 0$ übrig, und die Wurzeln dieser Gleichung, oder die Werthe von x, welche sie bekömmt, wenn mittelst der gegebenen Gleichung y weggeschafft ist, zeigen die Fälle an, in welchen die Werthe von y entweder Größte oder Kleinste sind. Um aber zu bestimmen, ob ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde? muß man die Formel $\frac{ddy}{dx^2}$ untersuchen. Nun giebt die Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = 0$, wenn man sie von neuem differenzirt und dabey $dP = Rdx + Sdy$, und $dQ = Tdx + Vdy$ setzt, und dx als beständig betrachtet,

$$Rdx^2 + Sdxdy + Tdxdy + Vdy^2 + Qddy = 0.$$

Da aber $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so wird, wenn man die Gleichung durch dx^2 dividirt, $R + \frac{Qddy}{dx^2} = 0$, und also $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{R}{Q}$. Man differenzire also in der Differenzialgleichung $Pdx + Qdy = 0$ bloß die Größe P, und betrachte y als beständig. Hierdurch erhält man Rdx. Dann suche man den Werth des Bruchs $\frac{R}{Q}$. Ist dieser Werth positiv, so zeigt er ein Größtes, ist er negativ, ein Kleinstes an.

§. 277.

Es sey y eine zweyförmige Funktion von x, und durch die Gleichung $yy + py + q = 0$ gegeben, so daß p und q einförmige Funktionen von x bedeuten. Differenzirt man, so wird

$$2ydy + pdy + ydp + dq = 0, \text{ und also}$$
$$Pdx = ydp + dq.$$

Setzt man also $P = 0$, so wird $ydp + dq = 0$, und $y = -\frac{dq}{dp}$. Es wird also y durch eine einförmige Funktion von x ausgedruckt, so daß y für jeden gefundenen Werth von x auch nur einen einzigen bestimmten Werth bekommt. Was die Wegschaffung von y betrifft, so ist dieselbe leicht. Denn wenn man in der Gleichung $yy + py + q = 0$ anstatt y den Werth $-\frac{dq}{dp}$ setzt, so erhält man $dq^2 - pdpdq + qdp^2 = 0$, und diese Gleichung durch dx^2 dividirt, giebt bey der Auflösung alle zu Größten oder Kleinsten gehörige Werthe von x. Dies wird durch folgende Exempel deutlicher werden.

Erstes

Erstes Exempel.

Es ist die Gleichung $yy + mxy + aa + bx + nxx = 0$ gegeben; man soll die größten und kleinsten Werthe von y finden.

Durch die Differenziation bekommt man

$$2ydy + mxdy + mydx + bdx + 2nxdx = 0$$

und hieraus wird

$$P = my + b + 2nx, \text{ und } Q = 2y + mx.$$

Setzt man also $P = 0$, so wird

$$y = -\frac{b - 2nx}{m}$$

und dieser Werth giebt, wenn man ihn in die gegebene Gleichung setzt,

$$\begin{array}{llll} \frac{4nn}{mm}xx & + \frac{4nb}{mm}x & + \frac{bb}{mm} & \\ -2nxx & - bx & + aa & = 0 \\ + nxx & + bx & & \end{array}$$

oder

$$xx = \frac{4nbx + bb + mmaa}{mmn - 4nn}.$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{2nb \pm \sqrt{(mmnbb + mmn(mm - 4n)aa)}}{mmn - 4nn}$$

oder

$$x = \frac{2nb \pm m\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}{n(mm - 4n)}$$

und

$$y = \frac{-mb \mp 2\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}{mm - 4n}$$

Betrachtet man nun bloß x als veränderlich, so wird

$dP = 2ndx$, und folglich $R = 2n$. Es ist aber $Q = 2y + mx = \pm \frac{\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}{n}$, also

$$\frac{R}{Q} = \frac{\pm 2nn}{\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}$$

und da der Zähler dieses Bruchs $2nn$ allemal positiv ist, so wird y ein Größtes, wenn das obere, und ein Kleinstes, wenn das untere Zeichen gilt. Man bemerke hierbey noch folgendes.

1. Wenn $m = 0$ ist, so folgt aus der Gleichung $P = 0$ sogleich $x = -\frac{b}{2n}$, wo also nicht erst y weggeschafft zu werden braucht. Es gehört aber zu diesem Werthe ein doppelter Werth von y, weil $y = \pm \frac{1}{2n}\sqrt{(nbb - 4nnaa)}$ ist, und davon ist der positive ein größter, und der negative ein kleinster.

2. Ist $n = 0$, so wird $y = -\frac{b}{m}$, und x wächst ins Unendliche; aber y behält dabey immer denselben Werth, und es giebt folglich weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

3. Ist $mm = 4n$, so wird $4nbx + bb + mmaa = 0$, oder

$$x = \frac{bb + mmaa}{-mmb}, \text{ und}$$

$$y = -\frac{b - 2nx}{m} = -\frac{2b - mmx}{m}$$

$$= -\frac{2b}{m} + \frac{bb + mmaa}{mb} = \frac{mmaa - bb}{mb}$$

Es ist demnach dieser Werth von y, der zu $x = -\frac{mmaa - bb}{mmb}$ gehört, entweder ein größter oder ein kleinster. Da aber um jenen Werth von y zu bekommen, in dem Ausdrucke

$$y = -\frac{mb \mp 2\sqrt{(nbb + n(mm - 4n)aa)}}{mm - 4n}$$

das untere Zeichen genommen werden muß, so ist dieser Werth von y ein kleinster.

Zweytes Exempel.

Es ist die Gleichung $yy - xxy + x - x^3 = 0$ gegeben; man soll die größten oder kleinsten Werthe von y finden.

Durch die Differenziation der Gleichung bekommt man

$$2ydy - xxdy - 2xydx + dx - 3x^2dx = 0$$

und daraus wird

$$P = 1 - 3xx - 2xy, \text{ und } Q = 2y - xx.$$

Setzt man demnach $P = 0$, so wird $y = \frac{1 - 3xx}{2x}$ und folglich durch die Substitution dieses Werthes,

$$\frac{1}{4xx} - \frac{3}{2} + \frac{9xx}{4} = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}x^3 + x - x^3 = 0$$

oder

$$1 - 6xx + 2x^3 + 9x^4 + 2x^5 = 0.$$

Die eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = -1$, und dazu gehört $y = 1$. Nimmt man aber y als beständig an, so wird

$$R = -6x - 2y, \text{ folglich}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2y + 6x}{2y - xx}$$

und dieser Ausdruck giebt für $x = -1$ und $y = 1$ den Werth -4. Es ist also $y = 1$ ein Größtes. Für $x = -1$ aber gehört aus der Gleichung $yy - y = 0$ ein doppelter Werth zu y, wovon der eine $= 0$, also weder ein Größtes noch ein Kleinstes ist. Dividirt man jene Gleichung des fünften Grades durch $x + 1$, so ergiebt sich eine Gleichung des vierten Grades, deren Wurzeln sich nicht abgesondert angeben lassen.

Drittes Exempel.

Es ist die Gleichung $yy + 2xxy + 4x - 3 = 0$ gegeben; man soll die größten oder kleinsten Werthe von y finden.

Durch die Differenziation bekommt man die Gleichung

$$2ydy + 2xxdy + 4xydx + 4dx = 0.$$

Setzt man also $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird $xy + 1 = 0$, und daher $y = -\frac{1}{x}$. Durch die Substitution dieses Werths aber erhält man aus der gegebenen Gleichung:

$$\frac{1}{xx} - 2x + 4x - 3 = 0 = 2x^3 - 3xx + 1$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind $x = 1$; $x = 1$; $x = -\frac{1}{2}$. Da nun

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy - 4}{2y + 2xx} = -\frac{2xy - 2}{y + xx}$$

ist, so wird

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{2y}{y + xx}$$

Auf diese Art hat man

x	y	$\frac{ddy}{dx^2}$
1	-1	∞
1	-1	∞
$-\frac{1}{3}$	2	$-\frac{16}{9}$ für ein Größtes.

Da bey den gleichen Wurzeln $\frac{ddy}{dx^2} = \infty$ wird, so bleibt daraus in diesem Falle unbestimmt, ob ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde. Weil aber zugleich $y + xx = 0$ wird, so ist in diesem Falle nicht einmal $\frac{dy}{dx} = 0$, weil in dem Bruche $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$, $P = 0$ und $Q = 0$, und da also das Haupterforderniß fehlt, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt.

§. 278.

Es giebt aber bey den vielförmigen Funktionen noch eine andere Art der größten und kleinsten Werthe, welche sich nach der bisherigen Methode nicht finden lassen, deren Beschaffenheit aber aus der Natur der zweyförmigen Funktionen leicht entwickelt werden kann. Es sey nemlich y eine zweyförmige Funktion von x, so daß y für jeden Werth von x einen zwiefachen Werth bekomme, die entweder beyde reell oder beyde imaginär sind. Wir wollen annehmen, daß die Werthe von y imaginär werden, wenn $x > f$, reell hingegen, wenn $x < f$, und einander gleich und $= g$, wenn $x = f$ gesetzt wird. Da also die Funktion y keinen reellen Werth hat, wenn $x > f$ genommen wird: so muß, wenn bey $x < f$ beyde Werthe von y entweder größer oder kleiner werden als g, der Werth $y = g$ im ersten Falle ein

Kleinstes, im zweyten ein Größtes werden, weil er in jenem kleiner und in diesem größer ist, als beyde vorhergehende. Es läßt sich aber dieses Größte und Kleinste nach der bisherigen Methode nicht finden, weil hier nicht $\frac{dy}{dx} = 0$ wird. Es sind aber auch diese größten und kleinsten Werthe von einer ganz andern Art, wie bey der Vergleichung bald in die Augen fällt.

§. 279.

Es findet aber das Erwähnte statt, wenn man eine Gleichung von der Form

$$y = p \pm (f - x)\sqrt{}(f - x)q$$

hat, wobey p und q Funktionen von x sind, welche sich durch $f - x$ nicht theilen lassen, und q einen positiven Werth bekommt, wenn $x = f$ oder um etwas weniges kleiner oder größer ist. Es sey $p = g$, wenn man $x = f$ setzt: so ist klar, daß in dem Falle $x = f$ beyde Werthe von y in den einen g zusammenfließen; nimmt man aber $x > f$, so werden beyde Werthe imaginär. Nimmt man daher x um etwas weniges kleiner als f, oder $x = f - \omega$, so geht die Funktion

$$p \text{ in } g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} - \text{rc. und}$$

$$q \text{ in } q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \text{rc.}$$

über, woher in diesem Falle

$$y = g - \frac{\omega dp}{dx} + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} + \text{rc.} \pm \omega\sqrt{}\omega\left(q - \frac{\omega dq}{dx} + \frac{\omega^2 ddq}{2dx^2} - \text{rc.}\right)$$

wird. Ist ω so klein, daß die höhern Potestäten desselben gegen ω verschwinden, so wird

y =

$$y = g - \frac{\omega dp}{dx} \pm \omega\sqrt{\omega q}$$

und diese beyden Werthe von y sind kleiner als g, wenn $\frac{dp}{dx}$ positiv, und größer, wenn $\frac{dp}{dx}$ negativ ist. Es ist daher der doppelte Werth $y = g$ in jenem Falle ein größter und in diesem ein kleinster.

§. 280.

Diese größten und kleinsten Werthe rühren also daher, weil, wenn man $x = f$ setzt, beyde Werthe von y einander gleich, hingegen bey der Annahme $x > f$ imaginär, und bey $x < f$ reell werden, und weil außerdem, wenn man $x = f - \omega$ setzt, das zweyte irrationale Glied höhere Potestäten von ω giebt, als das rationale. Dies findet statt, wenn

$$y = p \pm (f - x)^n \sqrt{(f - x)q}$$

wofern nur n eine ganze Zahl und > 0 ist. Da aber nicht bloß die Quadratwurzel, sondern überhaupt jede gerade Wurzel beyde Zeichen zuläßt, so ist solches auch, wenn

$$y = p \pm (f - x)^{\frac{2n+1}{2m}} q$$

wofern nur $2n + 1 > 2m$, und hieraus fließt

$$(y - p)^{2m} = (f - x)^{2n+1} q^{2m},$$

oder

$$(y - p)^{2m} = (f - x)^{2n+1} Q.$$

So oft daher eine Funktion y durch eine solche Gleichung ausgedruckt wird, und $2n + 1 > 2m$ ist, so ist auch, wenn man $x = f$ setzt, der Werth von y ein größter oder ein kleinster, und zwar das erste, wenn bey $x = f$, $\frac{dp}{dx}$ eine positive, und das letzte, wenn $\frac{dp}{dx}$ eine negative Größe wird.

Ist aber in diesem Falle $\frac{dp}{dx} = 0$, so wird

$$y = g + \frac{\omega^2 ddp}{2dx^2} \pm \omega^{\frac{2n+1}{2m}} p$$

Wenn also nicht $\frac{2n+1}{2m} > 2$ ist, so findet auch kein größter oder kleinster Werth statt; ist aber $\frac{2n+1}{2n} > 2$, so ist $y = g$ ein Größtes, wenn $\frac{ddp}{dx^2}$ einen negativen, und ein Kleinstes, wenn $\frac{ddp}{dx^2}$ einen positiven Werth hat. Auf diese Art hat man auch ferner zu urtheilen, wenn $\frac{ddp}{dx^2}$ verschwindet.

§. 281.

Wenn also y eine Funktion von x von der beschriebenen Art ist, so kann es sich ereignen, daß es außer den größten und kleinsten Werthen, welche sich nach der vorhergehenden Methode finden lassen, auch Größte und Kleinste dieser andern Art hat. Wie man diese letztern nach den eben erklärten Regeln finden könne, mögen folgende Beyspiele erläutern.

Erstes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion y zu bestimmen, welche durch die Gleichung $yy - 2xy - 2xx - 1 + 3x + x^3 = 0$ gegeben ist.

Um die größten und kleinsten Werthe der ersten Art zu finden differenziire man. Hiedurch wird

2ydy

$$2ydy - 2xdy - 2ydx - 4xdx + 3dx + 3xxdx = 0$$

und, wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt,

$$y = \frac{3}{2} - 2x + \frac{3}{2}xx.$$

Bringt man diesen Werth in die erste Gleichung, so bekommt man

$$9x^4 - 32x^3 + 42xx - 24x + 5 = 0$$

und diese Gleichung läßt sich in folgende auflösen,

$$9xx - 14x + 5 = 0, \text{ und } xx - 2x + 1 = 0.$$

Die letzte giebt zweymal $x = 1$, wobey $y = 1$ wird, daher in diesem Falle der Nenner in dem Bruche

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 3 - 4x - 3xx}{2y - 2x}$$

verschwindet, und also weder ein Größtes noch ein Kleinstes der ersten Art statt findet. Die erste Gleichung

$$9xx - 14x + 5 = 0$$

giebt $x = 1$ und $x = \frac{5}{9}$, und von diesen Werthen hat der erste eben die Unbequemlichkeit als die vorhergehenden. Setzt man aber $x = \frac{5}{9}$, so wird

$$y = \frac{3}{2} - \frac{10}{9} + \frac{25}{54} = \frac{23}{27}$$

und da $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3 + 4x - 3xx}{2y - 2x}$ ist,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4 - 6x}{2y - 2x} = \frac{-3x + 2}{y - x}$$

indem $dy = 0$ und der Zähler $= 0$. Es ist also $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{9}{8}$

und

und so giebt der Werth $x = \frac{5}{9}$ ein Kleinstes der ersten Art.

Da ferner $(y - x)^2 = (1 - x)^3$, so wird

$$y = x \pm (1 - x)\sqrt{(1 - x)}$$

und man erhält also auch, wenn man $x = 1$ setzt, ein Größtes der zweyten Art. Denn setzt man $x = 1 - \omega$, so wird

$$y = 1 - \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$$

und beyde Werthe sind kleiner als 1, weil ω sehr klein angenommen wird.

Zweytes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion

$$y = 2x - xx \mp (1 - x)^2\sqrt{(1 - x)}$$

zu finden.

Für die größten und kleinsten Werthe der ersten Art differenziire man die Gleichung, wodurch man

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x \mp \frac{5}{2}(1 - x)\sqrt{(1 - x)}$$

erhält. Setzt man diesen Werth $= 0$, so findet man einmal $x = 1$; und da $\frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{(1 - x)}$, so ist y in diesem Falle ein Größtes der ersten Art und $= 1$. Dividirt man aber die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ durch $1 - x$, so wird

$$4 \mp 5\sqrt{(1 - x)} = 0, \text{ oder } 16 = 25 - 25x$$

und hieraus

$$x = \frac{9}{25} \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = -2 \pm 3.$$

Wenn daher das obere Zeichen gilt, so wird $y = \frac{2869}{3125}$

ein

ein Kleinstes; nimmt man aber das untere Zeichen, so könnte $y = \frac{821}{3125}$ zwar ein Größtes scheinen, allein man darf bloß das obere Zeichen brauchen, da $4 \mp 5\sqrt{(1-x)}$ nicht $= 0$ seyn kann, wofern nicht $\sqrt{(1-x)} = \dagger \frac{4}{5}$ ist. Von der ersten Art findet man also ein Größtes bey $x = 1$, und ein Kleinstes bey $x = \frac{9}{25}$; bey jenem ist $y = 1$, und bey diesem $= \frac{2869}{3125}$. Von der andern Art aber erhält man ebenfalls ein Größtes, wenn man $x = 1$ nimmt. Denn setzt man $x = 1 - \omega$, so wird

$$y = 1 - \omega\omega \pm \omega^2\sqrt{\omega}$$

in beyden Fällen kleiner als 1. In diesem Falle, wo bey $x = 1$ die beyden Größten der ersten und zweyten Art übereinkommen, hat man gewissermaßen ein vermischtes Größtes.

§. 282.

Aus diesen Beyspielen erhellet nicht nur die Natur dieser größten und kleinsten Werthe der andern Art, sondern es lassen sich darnach auch nach Willkühr dergleichen Funktionen zusammen setzen, welche Größte oder Kleinste dieser zweyten Art enthalten. Wie man aber bey jeder gegebenen Funktion erforschen könne, ob sie Größte oder Kleinste der andern Art habe oder nicht, solches soll in dem folgenden Abschnitte gelehret werden, weil dadurch die Natur der Curven sehr erläutert wird. Uebrigens erkennt man leicht, daß wenn y eine Funktion von x ist, welche ein Größtes oder ein Kleinstes der andern Art zuläßt, auch x eine solche Funktion von y sey. Denn da aus der Gleichung $(y-x)^2 = (1-x)^3$, wenn man $x = 1$ setzt,

für

für y ein größter Werth von der andern Art sich ergiebt; so giebt, wenn man die veränderlichen Größen y und x verwechselt, die Gleichung $(x - y)^2 = (1 - y)^3$ auch eine solche Funktion von x, welche ein Größtes der andern Art hat. Denn setzt man $x = 1$, so wird $(1 - y)^2 = (1 - y)^3$, und daraus zweymal $y = 1$, und einmal $y = 0$. Setzt man aber $x = 1 + \omega$, so wird $(1 + \omega - y)^2 = (1 - y)^3$, und daher, wenn man $y = 1 + \varphi$ setzt, $(\omega - \varphi)^2 = (-\varphi)^3 = -\varphi^3$ und also φ negativ. Nun sey $y = 1 - \varphi$, so wird $(\omega + \varphi)^2 = \varphi^3$, und da, wenn man φ sehr klein annimmt, φ^3 gegen φ^2 nicht in Betrachtung kommt, so muß nothwendig ω negativ seyn, und es entsprechen daher dem Werthe $x = 1 + \omega$ gar keine reelle Werthe von y. Setzt man aber $x = 1 - \omega$ und $y = 1 - \varphi$, so wird, wegen $(\varphi - \omega)^2 = \varphi^3$, $\varphi = \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, und also $y - \omega \pm \omega\sqrt{\omega}$, daher beyde Werthe von y, welche zu $x = 1 - \omega$ gehören, kleiner sind als $y = 1$, welche zu $x = 1$ gehört, und folglich ein größter Werth von y ist.

§. 283.

Bis hieher haben wir bloß zweyförmige Funktionen betrachtet, deren Größte oder Kleinste nicht schwer zu untersuchen sind, weil beyde Werthe durch die Auflösung einer quadratischen Gleichung gefunden werden können. Wenn indeß die Funktion y durch eine höhere Gleichung ausgedruckt wird, so lassen sich die Größten und Kleinsten der ersten Art nach der erklärten Methode mit gleichem Erfolge finden, und was die der zweyten Art betrifft, so bleibt die Untersuchung derselben dem folgenden Abschnitte vorbehalten. Wie die drey- und vielförmigen Funktionen behandelt werden müssen, wollen wir nun an einigen Beyspielen zeigen.

Erstes Exempel.

Die Funktion y, deren größte oder kleinste Werthe verlangt werden, soll durch die Gleichung

$$y^3 + x^3 = 3axy$$

gegeben seyn.

Durch die Differenziation erhält man aus dieser Gleichung

$$3y^2dy + 3x^2dx = 3axdy + 3aydx,$$

und also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}.$$

Es wird daher ein Größtes oder ein Kleinstes geben, wenn $ay = xx$, oder $y = \frac{xx}{a}$ ist, und dieser Werth giebt, wenn man ihn in der Gleichung substituirt,

$$\frac{x^6}{a^3} + x^3 = 3x^3, \text{ oder } x^6 = 2a^3x^3$$

Es ist also dreymal $x = 0$, und in diesem Falle wird der Nenner $yy - ax = 0$, weil $y = \frac{xx}{a} = 0$ ist. Ob also in diesem Falle ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde? erhellet, wenn man x einen von 0 so wenig als möglich verschiedenen Werth beylegt. Es sey also $x = \omega$ und $y = \varphi$, so wird, wegen $\varphi^3 + \omega^3 = 3a\omega\varphi$, entweder $\varphi = \alpha\sqrt{\omega}$, oder $\varphi = \beta\omega^2$. Im ersten Falle wird $a^3\omega\sqrt{\omega} = 3\alpha a\omega\sqrt{\omega}$, und also $\alpha = \sqrt{3a}$, und daher $y = \pm\sqrt{3a\omega}$, wenn man $x = \omega$ setzt. Wenn daher auch gleich ω nicht negativ genommen werden darf, so ist doch der eine von den beyden Werthen von y größer als 0 und der andere kleiner, und es ist daher $y = 0$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Wenn aber $\varphi = \beta\omega^2$ genommen wird, so hat man $\omega^3 = 3a\beta\omega^3$, und also

also $\beta = \frac{1}{3a}$, und $\varphi = \frac{\omega^3}{3a}$. Man mag daher in diesem Falle x entweder $+\omega$ oder $= -\omega$ nehmen, in beyden Fällen ist $y = \varphi$ größer als o, und folglich $y = o$ in diesem Falle ein Kleinstes. Noch ist der dritte Fall aus der Gleichung $x^3 = 2a^3$ übrig, welcher $x = a\sqrt[3]{2}$, und $y = a\sqrt[3]{4}$ giebt. Um zu bestimmen, ob derselbe ein Größtes oder ein Kleinstes gebe? differenziire man die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - xx}{yy - ax}$$

von neuem, wo man wegen $dy = o$ und $ay - xx = o$,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2x}{yy - ax}$$

erhält. Der Werth davon ist im gegenwärtigen Falle

$$-\frac{2a\sqrt[3]{2}}{2a^2\sqrt[3]{2} - aa\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a},$$ und derselbe zeigt an, daß y ein Größtes sey.

Zweytes Exempel.

Es ist die Funktion y durch die Gleichung

$$y^4 + x^4 + ay^3 + ax^3 = b^3x + b^3y$$

gegeben; man soll ihre größten oder kleinsten Werthe finden.

Da die Differenziation die Gleichung

$$4y^3dy + 3ayydy - b^3dy = b^3dx - 3axxdx - 4x^3dx$$

giebt, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^3 - 3axx - 4x^3}{4y^3 + 3ayy - b^3}$$

und für $\frac{dy}{dx} = o$, $b^3 = 3axx + 4x^3$. Es kommt also

alles

alles darauf zurück, daß die größten und kleinsten Werthe der einförmigen Funktion $b^3 - ax^3 - x^4$ aufgesucht werden, indem diese zugleich die größten und kleinsten Werthe der Funktion y sind. Es sey $a = 2$ und $b = 3$, oder die Gleichung

$$y^4 + x^4 + 2y^3 + 2x^3 = 27x + 27y$$

gegeben; so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}, \text{ und}$$

$$4x^3 + 6xx - 27 = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $2x - 3 = 0$, so bekömmt man

$$2xx + 6x + 9 = 0$$

und da die Wurzeln dieser letzten Gleichung imaginär sind, so wird

$$x = \frac{3}{2}, \text{ und } y^4 + 2y^3 - 27y = \frac{459}{16}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind entweder Größte oder Kleinste. Da aber $\frac{dy}{dx} = \frac{27 - 6xx - 4x^3}{4y^3 + 6yy - 27}$, so ist

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{-12x - 12xx}{4y^3 + 6yy - 27}$$

und dieser Werth zeigt ein Kleinstes an, wenn er bey $x = \frac{3}{2}$ positiv, ein Größtes aber, wenn er dabey negativ wird.

Drittes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe von y zu bestimmen, wenn

$$y^m + ax^n = by^p x^q \text{ ist.}$$

Durch die Differenziation erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qby^p x^{q-1} - nax^{n-1}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$$

und setzt man dieses $= 0$, so wird einmal $x = 0$, wenn n und q größer als 1 sind, und dann auch $y = 0$. Ob es in diesem Falle ein Größtes oder ein Kleinstes gebe, wird man finden, wenn man die nächsten Werthe untersucht, indem auch der Nenner $= 0$ ist, und bey dieser Untersuchung kommt es vorzüglich auf die Exponenten an. Ausserdem giebt aber die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$,

$$y^p = \frac{na}{qb} x^{n-q}$$

und substituirt man diesen Werth in der gegebenen Gleichung, und setzt dabey $\frac{na}{qb} = g$, so wird

$$g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn - mq}{p}} + ax^n = \frac{na}{q} x^n$$

oder

$$g^{\frac{m}{p}} x^{\frac{mn - mq - np}{p}} = \frac{(n-q)a}{q}$$

woraus sich

$$x = \left(\frac{(n-q)a}{q}\right)^{p:(mn-mq-np)} : g^{m:(mn-mq-np)}$$

ergiebt, und zugleich wird dadurch auch y bekannt. Dann muß man untersuchen, ob das zweyte Differenzial

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{q(q-1)by^p x^{q-2} - n(n-1)ax^{n-2}}{my^{m-1} - pby^{p-1}x^q}$$

einen positiven oder einen negativen Werth bekommt. Im ersten Falle hat man ein Kleinstes, im andern ein Größtes.

Viertes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe von y zu bestimmen, wenn

$$y^4 + x^4 = 4xy - 2$$

ist.

Durch die Differenziation erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^3}{y^3 - x}$$

und hieraus

$$y = x^3.$$

Folglich ist

$$x^{12} = 3x^4 - 2, \text{ oder } x^{12} - 3x^4 + 2 = 0$$

und diese Gleichung läßt sich in

$$x^4 - 1 = 0, \text{ und } x^8 + x^4 - 2 = 0$$

und die letztere in

$$x^4 - 1 = 0 \text{ und } x^4 + 2 = 0$$

auflösen. Es ist demnach zweymal $x = 1$ oder $x = -1$, und in beyden Fällen verschwindet auch der Nenner des Bruchs $\frac{dy}{dx}$. Um also zu erforschen, ob in diesen Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes statt habe, setze man $x = 1 - \omega$ und $y = 1 - \varphi$: so ist

$$\begin{array}{llll}
1 - 4\varphi & + 1 - 4\omega & = 4 - 4\omega - 4\varphi - 2 \\
+ 6\varphi^2 & + 6\omega^2 & + 4\omega\varphi \\
- 4\varphi^3 & - 4\omega^3 & \\
+ \varphi^4 & + \omega^4 &
\end{array}$$

und also

$$4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2 - 4\varphi^3 - 4\omega^3 + \varphi^4 + \omega^4;$$

und, da ω und φ sehr klein seyn sollen,

$$4\omega\varphi = 6\varphi^2 + 6\omega^2,$$

Es ist also der Werth von φ imaginär, man mag ω positiv oder negativ annehmen. Mit andern Worten, wenn y und x die Coordinaten einer Curve bedeuten, so hat dieselbe, wenn $x = 1$ und $y = 1$, einen zu ihr gehörigen Punkt, (punctum conjugatum). Es kann aber dieser Werth weder für einen größten noch für einen kleinsten gehalten werden, weil die vorhergehenden und nachfolgenden Werthe, mit welchen er verglichen werden muß, imaginär sind.

§. 284.

Wenn die Gleichung, wodurch das Verhältniß zwischen x und y ausgedruckt wird, so beschaffen ist, daß eine Funktion von y einer Funktion von x, oder $Y = X$ wird, so muß man, um die größten und kleinsten Werthe derselben zu finden, $dX = 0$ setzen, und es wird demnach y in eben den Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes, in welchen X ein solches wird. Auf ähnliche Art wird x, wenn man x als eine Funktion von y betrachtet, ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn $dY = 0$, oder wenn Y ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Es folgt indeß hieraus nicht, daß x und y zugleich Größte oder Kleinste werden. Denn ist $2ay - yy = 2bx - xx$, so ist y ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn $x = b$, und dabey wird $y = a \pm \sqrt{(aa - bb)}$. Hingegen wird x ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn $y = a$, und dabey ist $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$. Es wird also y kein Größtes oder Kleinstes, wenn $x = b \pm \sqrt{(bb - aa)}$ ist, und doch ist in diesem Falle x ein Größtes oder Kleinstes. Uebrigens hat in diesem Falle, wenn y größte oder kleinste Werthe zukommen, x dergleichen nicht, denn y kann kein Größtes oder ein Kleinstes werden, wofern nicht $a > b$ ist, aber in diesem Falle wird das Größte oder Kleinste von x imaginär.

§. 285.

§. 285.

Es kann sich aber ferner auch ereignen, daß nicht alle Wurzeln der Gleichung $dX = 0$ größte oder kleinste Werthe von y geben. Denn wenn jene Gleichung zwey gleiche Wurzeln hat, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt, und eben dieses geschieht, wenn es irgend eine gerade Anzahl gleicher Wurzeln giebt. Wäre z. B. die Gleichung

$$b(y - a)^2 = (x - b)^3 + c^3$$

gegeben, wo man durch die Differenziation

$$2bdy(y - a) = 3dx(x - b)^2$$

bekommen würde: so hätte die Funktion y weder ein Größtes noch ein Kleinstes, wenn man $x = b$ nähme, weil hier zwey gleiche Wurzeln vorkommen. Wenn hingegen x als eine Funktion von y betrachtet wird, so wird dasselbe ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn man $y = a$ setzt, und zwar ist $x = b - c$ ein Kleinstes. Da endlich in den Gleichungen von der Form $Y = X$ die veränderlichen Größen x und y nicht mit einander vermischt werden, so sind alle reelle Werthe von y, welche man durch die Werthe von x aus der Gleichung $dX = 0$ erhält, Größte oder Kleinste. Sind in einer Gleichung die beyden veränderlichen Größen unter einander vermischt, so findet dieses nicht statt.

§. 286.

Was außerdem noch von der Natur der größten und kleinsten Werthe zu sagen ist, behalten wir dem folgenden Abschnitte vor, weil solches mitteist Figuren leichter dargestellt und erklärt werden kann. Jetzt gehen wir fort zu den Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, und zur Erforschung der Werthe, welche den darin vorkommenden veränderlichen Größen beygelegt werden müssen, damit die Funktion einen größten oder kleinsten Werth bekomme. Zuvörderst fällt dabey in die Augen, daß die Funktion von der Form X + Y, wenn X eine Funktion bloß von x, und Y eine Funktion bloß von y bedeutet, ein Größtes oder ein Kleinstes seyn werde, wenn sowohl X als Y ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Um also den größten Werth von X + Y zu finden, muß man die Werthe von x suchen, wobey X ein Größtes wird, und dann ferner die Werthe von y finden, wobey Y ein Größtes ist. Hat man diese gefunden, so geben beyde, in die Funktion X + Y gebracht, den größten Werth; und ein ähnlicher Weg muß für den kleinsten Werth von X + Y genommen werden. Man muß sich daher hüten, zwey Werthe von entgegengesetzter Beschaffenheit mit einander zu verbinden, so daß der eine für X ein Größtes und für Y ein Kleinstes gebe. In diesem Falle würde die Funktion X + Y weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn. Hingegen wird die Funktion X — Y ein Größtes, wenn X ein Größtes und Y ein Kleinstes ist, und ein Kleinstes, wenn X ein Kleinstes und Y ein Größtes ist. Wenn man aber von beyden Funktionen X und Y zugleich das Größte oder Kleinste nehmen wollte, so würde ihr Unterschied X — Y weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn. Alles dieses ist aus dem, was vorhin über die Natur der größten und kleinsten Werthe gesagt worden ist, leicht einzusehen.

§. 287.

Wenn also die größten oder kleinsten Werthe einer Funktion zweyer veränderlichen Größen gefunden werden sollen, so ist weit mehr Vorsicht nöthig, als wenn in eben der Absicht eine Funktion einer einzigen veränderlichen Größe gegeben ist. Denn man muß dabey nicht bloß die

Fälle

Fälle sorgfältig bestimmen, in welchen ein Größtes oder Kleinstes hervorgebracht wird, sondern außerdem aus diesen je zwey auf die Art mit einander verbinden, daß die gegebene Funktion ein Größtes oder Kleinstes werde. Wir wollen dieses durch einige Exempel erläutern.

Erstes Exempel.

Es ist die Funktion zweyer veränderlichen Größen
$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3xx - 3x$$
gegeben; man soll die Werthe von x und y finden, wobey die Funktion ein Größtes oder Kleinstes wird.

Da sich dieser Ausdruck in zwey Theile $Y + X$ theilen läßt, wovon jener eine Funktion von y, und dieser eine Funktion von x ist: so suche man die Fälle auf, wo jede dieser Funktionen ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Da also

$$Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y,$$

so wird

$$\frac{dY}{dy} = 4y^3 - 24y^2 + 36y - 8$$

und setzt man diesen Ausdruck $= 0$, so wird, nachdem man durch 4 getheilt hat,

$$y^3 - 6y^2 + 9y - 2 = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$y = 2 \text{ und } y = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Da also $\frac{ddY}{4dy^2} = 3yy - 12y + 9$ ist, so giebt $y = 2$ ein Größtes. Was die übrigen beyden Wurzeln $y = 2 \pm \sqrt{3}$ betrifft, welche aus der Gleichung $yy - 4y + 1 = 0$ entspringen: so wird $\frac{ddY}{12dy^2} = yy - 4y + 3 = 2$, und es geben daher beyde ein Kleinstes. Man hat also

$$\begin{array}{l|l} y = 2 & Y = 8 \text{ ein Größtes} \\ y = 2 - \sqrt{3} & \left.\begin{array}{l} Y = -1 \\ Y = -1 \end{array}\right\} \text{ein Kleinstes.} \\ y = 2 + \sqrt{3} & \end{array}$$

Da ferner $X = x^3 - 3xx - 3x$ ist, so wird

$$\frac{dX}{dx} = 3x^2 - 6x - 3$$

und daraus ergiebt sich die Gleichung

$$xx = 2x + 1, \text{ und also } x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Nun ist $\frac{ddX}{6dx^2} = x - 1 = \pm\sqrt{2}$. Folglich giebt die Wurzel $x = 1 + \sqrt{2}$ ein Kleinstes, nemlich $X = -5 - 4\sqrt{2}$, und $x = 1 - \sqrt{2}$ ein Größtes, nemlich $X = -5 + 4\sqrt{2}$. Es ist demnach die Formel

$$X + Y = y^4 - 8y^3 + 18yy - 8y + x^3 - 3xx - 3x$$

ein Größtes, wenn man $y = 2$ und $x = 1 - \sqrt{2}$ setzt, und wird dabey $= 3 + 4\sqrt{2}$. Eben diese Formel wird ein Kleinstes, wenn man $y = 2 - \sqrt{3}$ oder $y = 2 + \sqrt{3}$ und $x = 1 + \sqrt{2}$ nimmt, und in diesem Falle $= -6 - 4\sqrt{2}$.

Zweytes Exempel.

Es ist die Funktion zweyer veränderlichen Größen

$$y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y - x^3 + 3xx + 3x$$

gegeben; man soll die Fälle bestimmen, worin sie ein Größtes oder Kleinstes wird.

Braucht man Y und X wie vorhin, so ist

$$Y = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y, \text{ und}$$
$$X = x^3 - 3xx - 3x$$

und daher die gegebene Funktion $= Y - X$. Aus der

vorher-

vorhergehenden Entwickelung erhellet ferner, daß $Y - X$ einen größten Werth hat, wenn man $y = 2$ und $x = 1 + \sqrt{2}$, und ein Kleinstes wird, wenn man $y = 2 \pm \sqrt{3}$ und $x = 1 - \sqrt{2}$ setzt. In jenem Falle wird sie $= 13 + 4\sqrt{2}$ und in diesem $= 4 - 4\sqrt{2}$. Uebrigens erkennt man bey beyden Exempeln leicht, daß die gefundenen Werthe in Vergleichung mit allen übrigen möglichen weder größte noch kleinste Werthe genennt werden können. Denn setzte man in beyden $y = 100$ und $x = 0$, so bekäme man offenbar einen größern Werth als wir vorhin gefunden haben, und auf ähnliche Art würde sich ein kleinerer ergeben, wenn man $y = 0$ und $x = -100$ annähme. Man muß daher die obige Bestimmung der größten und kleinsten Werthe nicht vergessen, und unter einem größten Werthe allemal den verstehen, der größer ist, als die nächsten vor ihm vorhergehenden und auf ihn folgenden; so wie unter einem kleinsten denjenigen, der kleiner als die zunächst vor ihm vorhergehenden und auf ihn folgenden ist. So ist z. B. der Werth von $Y - X$, welchen man findet, wenn man $y = 2$ und $x = 1 + \sqrt{2}$ setzt, größer als diejenigen, welche man bey $y = 2 \pm \omega$ und $x = 1 + \sqrt{2} \pm \varphi$ erhält, wenn ω und φ hinlänglich kleine Größen bedeuten.

§. 288.

Nach diesen Beyspielen wird es leicht seyn, die Untersuchung ins Allgemeine zu führen. Es bedeute also U irgend eine Funktion zweyer veränderlichen Größen x und y, wofür die Werthe von x und y gesucht werden sollen, wobey U ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Da in dieser Absicht jeder der veränderlichen Größen x und y ein bestimmter Werth beygelegt werden muß: so nehme man an, daß der Werth, welchen y haben muß, wenn U

ein Größtes oder ein Kleinstes werden soll, schon gefunden sey. In diesem Falle braucht nur noch der zugehörige Werth von x gesucht zu werden, und dies geschieht, wenn man die Funktion U so differenziirt, als ob bloß x veränderlich wäre, und das Differenzial = o setzt. Auf ähnliche Art findet man den erforderlichen Werth von y, wenn man den Werth von x als bereits gefunden betrachtet, die Funktion U so differenziirt, als ob bloß y veränderlich wäre, und das Differenzial = o setzt. Ist daher das Differenzial

$$dU = Pdx + Qdy$$

so muß $P = o$ und $Q = o$ seyn, und aus diesen beyden Gleichungen lassen sich dann die gesuchten Werthe von x und y finden.

§. 289.

Da man auf diese Art die Werthe von x und y, wobey die Funktion U ein Größtes oder Kleinstes wird, ohne Unterschied findet: so müssen nun noch die Fälle, in welchen ein größter oder ein kleinster Werth entsteht, von einander unterschieden werden. Soll nemlich die Funktion U ein Größtes werden, so müssen beyde veränderliche Größen die dazu erforderlichen Werthe haben; denn wenn der Werth der einen ein Größtes, und der Werth der andern ein Kleinstes gebe: so würde die Funktion selbst weder ein Größtes noch ein Kleinstes werden. Hat man demnach aus den Gleichungen $P = o$ und $Q = o$ die Werthe von x und y gefunden, so muß man untersuchen, ob beyde einen größten oder kleinsten Werth hervorbringen, und alsdann erst beyde mit einander verbinden. Ist dies geschehen, so läßt sich mit Sicherheit behaupten, aber auch so nur, daß der Werth der Funktion ein größter oder ein kleinster

sey.

sey. Eben das gilt vom Kleinsten; es kann die Funktion U kein Kleinstes werden, wenn nicht zugleich beyde Werthe von x und y ein Kleinstes geben. Es ereignet sich indeß bisweilen auch, daß die Werthe beyder veränderlichen Größen aus den Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes geben; und diese Fälle müssen ebenfalls sogleich als untauglich verworfen werden.

§. 290.

Ob aber die Werthe von x und y ein Größtes oder ein Kleinstes geben, findet man, wenn man jeden besonders untersucht, auf ähnliche Art, als wenn nur eine veränderliche Größe da wäre. Um nemlich x zu beurtheilen, betrachte man y als eine beständige Größe, und da alsdann $dU = Pdx$, oder $\frac{dU}{dx} = P$ ist, so differenziire man P von neuem, ohne auch hier y als veränderlich zu betrachten, um $\frac{ddU}{dx^2} = \frac{dP}{dx}$ zu erhalten. Nun untersuche man, ob der Werth von $\frac{dP}{dx}$, wenn man für x und y die zuvor gefundenen Werthe setzt, positiv oder negativ sey; im ersten Falle hat man ein Kleinstes, im andern ein Größtes. Auf ähnliche Art ist, wenn x als eine beständige Größe angesehen wird, $dU = Qdy$, oder $\frac{dU}{dy} = Q$. Man differenziire also Q von neuem, indem man bloß y als veränderlich behandelt, und untersuche den Werth von $\frac{dQ}{dy}$ indem man für x und y die aus den Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ gefundenen Werthe setzt. Wird $\frac{dQ}{dy}$ positiv, so ist dies ein Merkmal eines Kleinsten, wird es aber negativ, ein Zeichen eines Größten. Hieraus erhellet, daß kein Größtes oder Kleinstes statt finde, wenn $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ durch die für x und y gefundene Werthe Werthe von entgegengesetzter Beschaffenheit bekommen, daß aber ein Kleinstes erzeugt werde, wenn beyde Formeln $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ positiv, und ein Größtes, wenn beyde negativ werden.

§. 291.

Wenn aber eine von den Formeln $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ oder auch beyde bey der Substitution der gefundenen Werthe von x und y verschwinden, so muß man zu den folgenden Differenzialien $\frac{ddP}{dx^2}$ und $\frac{ddQ}{dy^2}$ fortgehen. Verschwinden diese nicht, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt; verschwinden sie aber, so muß man nach den Formeln $\frac{d^3P}{dx^3}$ und $\frac{d^3Q}{dy^3}$ urtheilen, und zwar auf ähnliche Art, als solches bey den Formeln $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ geschieht. Um indeß deutlicher zu zeigen, in was für Fällen dieses geschieht, so sey der für x gefundene Werth $= \alpha$, wobey, wenn $\frac{dP}{dx}$ dadurch $= 0$ wird, $\frac{dP}{dx}$ nothwendig einen Faktor $x - \alpha$ haben muß. Ist dieser Faktor nur ein einzelner und kommt kein anderer ihm gleicher darin vor, so ist dies ein Kennzeichen, daß weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt finde. Eben dies

dies geschieht, wenn $\frac{dP}{dx}$ den Faktor $(x - \alpha)^3$, $(x - \alpha)^5$ ꝛc. hat. Ist hingegen $(x - \alpha)^2$ oder $(x - \alpha)^4$ ꝛc. ein Faktor, so wird dadurch zwar ein Größtes oder Kleinstes angezeigt, allein man muß auch erst noch untersuchen, wie es sich mit y verhalte.

§. 292.

Die Art die höhern Differenzialien in diesen Fällen zu finden, läßt sich aber außerordentlich erleichtern. Denn nehmen wir, um die Sache ganz allgemein zu behandeln, an, es sey $\alpha x + \beta = 0$ gefunden, und die Formel $\frac{dP}{dx}$ habe den Faktor $(\alpha x + \beta)^2$, so daß $\frac{dP}{dx} = (\alpha x + \beta)^2 T$ sey: so ist, weil $\alpha x + \beta = 0$, $\frac{d^3 P}{dx^3} = 2\alpha^2 T$, und da $2\alpha^2$ positiv ist, so hat man bey der anzustellenden Beurtheilung lediglich auf T zu sehen. Ist T positiv, so zeigt dies einen kleinsten, ist es aber negativ, einen größten Werth an. Eben dieses Erleichterungsmittel kann man brauchen, wenn nur eine einzige veränderliche Größe da ist, so daß man nie nöthig hat, zu den höhern Differenzialien aufzusteigen. Ja man hat nicht einmal nöthig, zu den zweyten Differenzialien fortzugehen. Denn wenn aus der Gleichung $P = 0$ sich $\alpha x + \beta = 0$ ergiebt, so muß P nothwendig den Faktor $\alpha x + \beta$ habe. Auf diese Art wird $P = (\alpha x + \beta)T$, und da $\frac{dP}{dx} = \alpha T + (\alpha x + \beta)\frac{dT}{dx}$ wird, so hat man, indem $\alpha x + \beta = 0$ ist, $\frac{dP}{dx} = \alpha T$; und es zeigt daher der andere Faktor T, je nachdem der Werth von αT positiv oder negativ ist, ein Kleinstes oder ein Größtes an.

§. 293.

Nach diesen Vorschriften kann es nicht schwer fallen, bey jeder gegebenen Funktion zweyer veränderlicher Größen die Fälle zu bestimmen, wo dieselbe ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Was außerdem noch anzumerken ist, wird sich am leichtesten bey der Entwickelung einzelner Fälle beybringen lassen, daher wir die gegebenen Regeln durch einige Exempel erläutern wollen.

Erstes Exempel.

Es ist die Funktion zweyer veränderlichen Größen:

$$U = xx + xy + yy - ax - by$$

gegeben; man soll die Fälle bestimmen, worin sie ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Da

$$dU = 2xdx + ydx + xdy - 2ydy, - adx - bdy$$

ist: so wird aus der Vergleichung mit der allgemeinen Form $dU = Pdx + Qdy$,

$$P = 2x + y - a, \text{ und } Q = 2y + x - b.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$2x + y - a = 0, \text{ und } 2y + x - b = 0$$

aus denen man durch die Wegschaffung von y

$$x - b = 4x - 2a, \text{ und also}$$

$$x = \frac{2a - b}{3}, \text{ und } y = a - 2x = \frac{2b - a}{3}$$

erhält. Da also $\frac{dP}{dx} = 2$, und $\frac{dQ}{dy} = 2$ wird, so zeigen beyde ein Kleinstes an. Wir schließen hieraus, daß die Formel

$$xx + xy + yy - ax - bx$$

ein Kleinstes werde, wenn man

$$x = \frac{2a - b}{3} \text{ und } y = \frac{2b - a}{3}$$

nimmt, und es wird alsdann

$$U = -\frac{3aa + 3ab - 3bb}{3} = -\frac{aa + ab - bb}{3}$$

und dieser Werth, als ein einziger, unter allen der kleinste. Es kann also nur auf eine Art

$$xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3}$$

werden, und da es nicht kleiner werden kann, so ist die Gleichung

$$xx + xy + yy - ax - by = -\frac{aa + ab - bb}{3} - cc$$

eine unmögliche Gleichung.

Zweytes Exempel.

Die Fälle zu bestimmen, in welchen die Formel:

$$U = x^3 + y^3 - 3axy$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Da

$$dU = 3x^2dx + 3y^2dy - 3aydx - 3axdy$$

ist, so wird

$$P = 3xx - 3ay, \text{ und } Q = 3yy - 3ax$$

und daher

$$ay = xx \text{ und } ax = yy.$$

Da also $yy = \frac{x^4}{aa} = ax$ ist, so hat man $x^4 - a^3x = 0$, und also entweder $x = 0$ oder $x = a$. Im ersten Falle ist $y = 0$, im andern $= a$. Da nun $\frac{dP}{dx} = 6x$, $\frac{ddP}{dx^2} = 6$,

und

und $\frac{dQ}{dy} = 6y$ und $\frac{ddQ}{dy^2} = 6$ ist: so entsteht im ersten Falle, wenn $x = 0$ und $y = 0$ ist, weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Im andern Falle aber, wenn $x = a$ und $y = a$ ist entsteht ein Kleinstes, weil a positiv ist, und zwar wird $U = -a^3$, welcher Werth indeß bloß kleiner ist, als die zunächst vorhergehenden und zunächst folgenden; denn es leidet keinen Zweifel, daß U einen weit kleinern Werth bekommen könne, wenn beyde veränderliche Größen x und y negativ genommen werden.

Drittes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion:

$$U = x^3 + ayy - bxy + cx$$

zu finden.

Da

$$dU = 3x^3dx + 2aydy - bydx - bxdy + cdx$$

ist, so wird

$$P = 3xx - by + c \text{ und } Q = 2ay - bx$$

und wenn man beyde Werthe $= 0$ setzt,

$$y = \frac{bx}{2a} \text{ und folglich}$$

$$3xx - \frac{bbx}{2a} + c = 0, \text{ oder } xx = \frac{2bbx - 4ac}{12a}$$

also

$$x = \frac{bb \pm \sqrt{(b^4 - 48aac)}}{12a}$$

Wofern also nicht $b^4 - 48aac > 0$ ist, so hat weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt. Es sey daher

$$b^4 - 48aac = bbff, \text{ also } c = \frac{bb(bb - ff)}{48aa}.$$

so

so wird

$$x = \frac{bb \pm bf}{12a} \text{ und } y = \frac{bb(b \pm f)}{24aa}.$$

Da ferner $\frac{dP}{dx} = 6x$, und $\frac{dQ}{dy} = 2a$ ist, so wird $\frac{dP}{dx} = \frac{b(b \pm f)}{2}$. Wofern also nicht $2a$ und $\frac{b(b \pm f)}{2a}$ einerley Zeichen haben, so findet weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt. Sind aber beyde entweder positiv oder negativ, welches statt finden wird, wenn das Produkt $b(b \pm f)$ positiv ist: so wird die Funktion U ein Kleinstes, wenn a positiv, und ein Größtes, wenn a negativ ist. Ist also $f = 0$ oder $c = \frac{b^4}{48aa}$, so wird, weil bb positiv ist, die Funktion U ein Kleinstes, wenn a eine positive Größe und $x = \frac{b}{12a}$ und $y = \frac{b^3}{24aa}$ ist; ist hingegen a negativ, so geben eben diese Substitutionen ein Größtes. Ist $f < b$, so entsteht in beyden Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes; ist aber $f > b$, so geben bloß $x = \frac{b(b + f)}{12a}$ und $y = \frac{bb(b + f)}{24aa}$ ein Größtes oder ein Kleinstes, je nachdem a negativ oder positiv ist. Es sey $a = 1$, $b = 3$ und $f = 1$, so daß

$$U = x^3 + yy - 3xy + \tfrac{3}{2}x$$

werde: so ist U ein Kleinstes, weil a positiv wird, man mag $x = 1$ und $y = \frac{3}{2}$, oder $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{3}{4}$ setzen. Im ersten Falle wird $U = \frac{1}{4}$, im letzten $= \frac{5}{16}$. Wenn man aber für x negative Zahlen nimmt, so ist leicht einzusehen, daß man für U noch viel kleinere Werthe erhalten kann. Man muß daher $U = \frac{1}{4}$ in dem Verstande als ein Kleinstes betrachten, daß damit gesagt werden soll, U werde einen größern Werth bekommen, wenn man $x = 2 + \omega$ und $y = 3 + \varphi$ setze, und ω und φ kleine positive oder negative Zahlen sind. Es darf aber ω die Grenze $-\frac{15}{4}$ nicht überschreiten; denn wenn $\omega < -\frac{15}{4}$, so kann U kleiner werden als $\frac{1}{4}$.

Viertes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion:

$$U = x^4 + y^4 - axxy - axyy + ccxx + ccyy$$

zu finden.

Differenzirt man, so wird

$$P = 4x^3 - 2axy - ayy + 2ccx, \text{ und}$$

$$Q = 4y^3 - axx - 2axy + 2ccy;$$

und setzt man diese Werthe $= 0$ und zieht sie von einander ab, so wird

$$4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0.$$

Da diese Gleichung durch $x - y$ theilbar ist, so ist einmal $x = y$, und dann auch $4x^3 - 3axx + 2ccx = 0$. Hieraus fließt $x = 0$, und $4xx = 3ax - 2cc$, oder $x = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$. Nimmt man $x = 0$, so wird auch $y = 0$, und wegen

$$\frac{dP}{dx} = 12x - 2ay + 2cc, \text{ und}$$

$$\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2ax + 2cc$$

die Funktion U ein Kleinstes $= 0$. Setzt man $x = y = \frac{3a \pm \sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$, so wird, wenn $9aa > 32cc$, wegen $4xx = 3ax - 2cc$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 12xx - 2ax + 2cc = 7ax - 4cc$$

$$= \frac{21aa - 32cc \pm 7a\sqrt{(9aa - 32cc)}}{8}$$

und da dieser Werth allemal positiv ist, weil $32cc < 9aa$, so wird U in diesem Falle ein Kleinstes und

$$= \frac{-27}{256}a^4 + \frac{9}{16}aacc - \frac{1}{2}c^4 \mp \frac{a}{256}(9aa - 32cc)^{\frac{3}{2}}$$

Dividirt man aber die Gleichung

$$4x^3 - 4y^3 + axx - ayy + 2ccx - 2ccy = 0$$

durch $x - y$, so wird

$$4xx + 4xy + 4yy + ax + ay + 2cc = 0.$$

Aber aus der Gleichung $P = 0$ wird

$$yy = -2xy + \frac{4}{a}x^3 + \frac{2ccx}{a}$$

und durch die Substitution dieses Werths wird

$$y = \frac{16x^3 + 4axx + aax + 8ccx + 2acc}{4ax - ac}$$

Nun giebt aber die Gleichung

$$y = -x \pm \sqrt{\frac{4x^3 + axx + 2ccx}{a}}$$

und es wird demnach

$$16x^3 + 4axx + 4ccx + 2acc =$$
$$(4x - a)\sqrt{(4ax^3 + aaxx + 2accx)}$$

oder nach Wegbringung der Irrationalität

$$256x^6 + 192ax^5 + \begin{array}{l} 80aa \\ +128cc \end{array} x^4 + \begin{array}{l} 4a^3 \\ +96acc \end{array} x^3$$

$$\begin{array}{l} -a^4 \\ +48aacc \\ +16c^4 \end{array} x^2 \begin{array}{l} -2a^3cc \\ +16ac^4 \end{array} x + 4a^2c^4 = 0$$

Wenn diese Gleichung reelle Wurzeln hat, so zeigen dieselben

selben größte oder kleinste Werthe der Funktion U an, indem $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ Größen mit einerley Zeichen werden.

Fünftes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe des Ausdrucks:

$$x^4 + mxxyy + y^4 + aaxx + naaxy + aayy = U$$

zu finden.

Durch die Differenziation findet man

$$P = 4x^3 + 2mxyy + 2aax + naay = 0$$

$$Q = 4y^3 + 2mxxy + 2aay + naax = 0.$$

Beyde Gleichungen zu einander addirt und von einander subtrahirt, geben

$$(4xx + 4xy + 4yy - 2mxy + 2aa - naa)(x - y) = 0$$

$$(4xx - 4xy + 4yy + 2mxy + 2aa + naa)(x + y) = 0$$

so wie diese auf ähnliche Art nach der Division durch $x - y$ und $x + y$ behandelt

$$4xx + 4yy + 2aa = 0, \text{ und}$$

$$4xy - 2mxy - naa = 0.$$

Aus der letzten ergiebt sich

$$y = \frac{naa}{2(n - m)x}$$

die erste aber läßt keine reelle Werthe zu. Wir haben also drey Fälle.

1. Wenn $y = x$, so ist

$$4x^3 + 2mx^3 + 2aax + naax = 0$$

woraus entweder $x = 0$, oder $2(2 + m)xx + (2 + n)aa = 0$ wird. Es sey $x = 0$, so ist auch $y = 0$, und wegen

$$\frac{dP}{dx} = 12xx + 2myy + 2aa, \text{ und}$$

$$\frac{dQ}{dy} = 12yy + 2mxx + 2aa$$

in diesem Falle $U = 0$ ein Kleinstes, indem der Coefficient aa positiv ist. Der andere Fall giebt $xx = -\frac{(n+2)aa}{2(m+2)}$, welche Gleichung nicht reell seyn kann, wofern nicht $\frac{n+2}{m+2}$ negativ ist. Es sey $\frac{n+2}{m+2} = -2kk$, oder $n = -2kkm - 4kk - 2$, so ist $x = \pm ka$ und $y = \pm ka$; aber $\frac{dP}{dx} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$ und $\frac{dQ}{dy} = 12kkaa + 2mkkaa + 2aa$. Da also $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{dQ}{dy}$ einander gleich sind, so ist U entweder ein Kleinstes oder ein Größtes, je nachdem jene Größen positiv oder negativ sind.

2. Wenn $y = -x$, so ist $2(m+2)x^3 = (n-2)aax$, also entweder $x = 0$, oder $xx = \frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$. Die erste Wurzel 0 führt auf das Vorhergehende; die letzte ist reell, wenn $\frac{(n-2)aa}{2(m+2)}$ eine positive Größe ist; und wenn $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$, so kommt entweder ein Größtes oder ein Kleinstes.

3. Wenn $y = \frac{naa}{2(2-m)x}$, so ist $4x^3 + \frac{mn^2a^4}{2(2-m)^2x} + 2aax + \frac{nna^4}{2(2-m)x} = 0$, oder $4x^4 + 2aaxx + \frac{nna^4}{(2-m)^2} = 0$.

$= 0$. Diese Gleichung hat keine reelle Wurzel, wofern nicht aa eine negative Größe ist.

Sechstes Exempel.

Die größten und kleinsten Werthe der Funktion:

$$U = x^4 + y^4 - xx + xy - yy$$

zu finden.

Da hier $P = 4x^3 - 2x + y = 0$, und

$$Q = 4y^3 - 2y + x = 0$$

so ist aus der ersten Gleichung $y = 2x - 4x^3$, und dieser Werth giebt in die andere Gleichung gebracht,

$$256x^9 - 384x^7 + 192x^5 - 40x^3 + 3x = 0$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $x = 0$, wodurch auch $y = 0$ wird. Da in diesem Falle $\frac{dP}{dx} = 12xx - 2$, und $\frac{dQ}{dy} = 12yy - 2$ wird, so wird U ein Größtes $= 0$.

Dividirt man aber die Gleichung durch x, so wird

$$256x^8 - 384x^6 + 192x^4 - 40x^2 + 3 = 0,$$

und diese Gleichung hat den Faktor $4xx - 1$, weswegen $4xx = 1$ und $x = \pm\frac{1}{2}$ und $y = \pm\frac{1}{2}$ wird. Ferner wird $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 1$, und in beyden Fällen entspringt also ein Kleinstes $= -\frac{1}{8}$.

Dividirt man die Gleichung durch $4xx - 1$, so bekommt man

$$64x^6 - 80x^4 + 28xx - 3 = 0$$

welche Gleichung zweymal $4xx - 1 = 0$ enthält, so daß daher der vorhergehende Fall entsteht. Außerdem wird

daraus

daraus $4xx - 3 = 0$, und $x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$, und $y = \frac{\mp\sqrt{3}}{2}$.

Es ist also auch $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy} = 7$, und U wird ein Kleinstes $= -\frac{9}{8}$, wobey zugleich dieser Werth der kleinste unter allen ist, welche U bekommen kann, so daß $U = -\frac{9}{8} - cc$ allemal unmöglich ist. Aus den Bisherigen läßt sich die Methode, die größten und kleinsten Werthe der Funktionen dreyer und mehrerer veränderlicher Größen zu bestimmen, ableiten.