Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1793

Zehntes Capitel. Von den größten und kleinsten Werthen der veränderlichen Größen.

Zehntes Capitel.

Von den größten und kleinsten Werthen der veränderlichen Größen.

§. 250.

Wenn eine Funktion von x so beschaffen ist, daß sie ununterbrochen mit x wächst und abnimmt, so hat diese Funktion keinen größten oder kleinsten Werth. Denn man mag einen Werth dieser Funktion nehmen was für einen man will, so sind die folgenden allemal größer, und die vorhergehenden kleiner. Eine solche Funktion ist z. B. $x^3 + x$; weil der Werth davon allemal, wenn x wächst, größer, und wenn x abnimmt, kleiner wird: weswegen auch diese Funktion nicht anders einen größten Werth bekommen kann, als wenn x der größte, d. h. ein unendlicher Werth beygelegt wird, und kein Kleinstes giebt, außer wenn man $x = -\infty$ setzt. Ist hingegen eine Funktion von der Art, daß sie nicht stets mit x wächst und abnimmt, so muß sie irgendwo einen größten oder kleinsten Werth haben, d. h. einen solchen, der größer oder kleiner ist, als die vorhergehenden. So bekommt die Funktion $xx - 2x + 3$ den kleinsten Werth, wenn man $x = 1$ setzt, denn bey jedem andern Werthe von x wird ihr Werth größer.

§. 251.

Um aber die Natur der größten und kleinsten Werthe deutlicher kennen zu lernen, wollen wir annehmen, daß y eine solche Funktion von x sey, daß sie einen größten Werth bekomme, wenn man $x = f$ setzt; wo also in die Augen fällt, daß wenn x größer oder kleiner als f angenommen wird, der daraus entspringende Werth von y kleiner seyn werde, als der, den $x = f$ giebt. Auf eine ähnliche Art muß, wenn die Funktion y einen kleinsten Werth bekommt, wenn man $x = f$ setzt, der Werth von y stets größer wer= wenn man x kleiner oder größer als f annimmt; und dies ist der Begriff, welchen man mit den absoluten größten und kleinsten Werthen zu verbinden hat. Außerdem aber sagt man auch, daß die Funktion y einen größten Werth be= komme, wenn man z. B. $x = f$ setzt, wenn nur dieser Werth größer ist, als die zunächst folgenden oder vorher= gehenden, die sich ergeben, wenn man x um etwas gerin= ges größer oder kleiner als f werden läßt; wenn auch gleich die Funktion y bey andern Werthen von x vielleicht einen größern Werth erhält. Eben so legt man der Funktion y bey $x = f$ einen kleinsten Werth bey, wenn derselbe nur kleiner ist, als diejenigen, welche man findet, wenn man für x zunächst größere oder kleinere Werthe als f setzt. In dieser letztern Bedeutung werden wir nun die Benen= nungen, größter und kleinster Werth, gebrauchen.

§. 252.

Ehe wir aber die Art und Weise erklären, diese größ= ten und kleinsten Werthe zu finden, müssen wir bemerken,

daß

diese Untersuchung eigentlich nur bey den Funktionen von x statt finde, welche wir oben (Einl. in d. Anal. d. Unend. 1. B. 1. Cap.) einförmige Funktionen genennt haben, und welche von der Art sind, daß sie für jeden bestimmten Werth für x nicht mehr als Einen bestimmten Werth bekommen. Zweyförmige und vielförmige Funktionen hingegen haben wir durch solche erklärt, die für jeden bestimmten Werth für x zwey oder mehrere Werthe erhalten, dergleichen die Wurzeln der quadratischen und übrigen höhern Gleichungen sind. Ist daher y eine solche zwey- oder vielförmige Funktion, so läßt sich nicht eigentlich sagen, daß sie, wenn man $x = f$ setzt, einen größten oder kleinsten Werth bekomme. Denn da sie, wenn man $x = f$ setzt, zwey oder mehrere Werthe zugleich erhält, und die vorhergehenden und nachfolgenden Werthe ebenfalls mehrfach sind: so läßt sich der größte oder kleinste Werth nicht so leicht beurtheilen, es müßte denn seyn, daß von allen diesen Werthen nicht mehr als einer reell wäre, in welchem Falle die Funktion als eine einförmige betrachtet werden kann. Wir wollen also zuvörderst die einförmigen Funktionen und diejenigen vielförmigen betrachten, die als einförmige behandelt werden können, und dann zeigen, wie sich das Gefundene auf die übrigen vielförmigen Funktionen anwenden lasse.

§. 253.

Es sey also y eine einförmige Funktion von x, die daher für jeden Werth von x einen reellen Werth bekommen wird; und dabey bedeute x den Werth, wobey die Funktion y einen größten oder kleinsten Werth erhält. Im ersten Falle muß, wenn man $x + \alpha$ oder $x - \alpha$ für x setzt, der Werth von y kleiner, und im letzten Falle größer werden, als wenn $\alpha = 0$ ist. Da also y, wenn man $x + \alpha$ für x setzt, in

$$y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4y}{24dx^4} + \text{rc.}$$

und wenn man $x - \alpha$ für x setzt, in

$$y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\alpha^4 d^4y}{24dx^4} - \text{rc.}$$

übergeht, (Cap. 3. §. 48. 51.) so muß, wenn der Werth von y ein größter ist,

$$y > y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \text{rc.}$$

$$y > y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \text{rc.}$$

und wenn der Werth von y ein kleinster ist,

$$y < y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \text{rc.}$$

$$y < y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3y}{6dx^3} + \text{rc.}$$

seyn.

§. 254.

Da dieses statt finden muß, der Werth von α sey so klein als er wolle, so wollen wir α so klein annehmen, daß die höhern Potestäten davon aus der Acht gelassen werden können, und dann muß, sowohl wenn der Werth von y ein größter als wenn er ein kleinster seyn soll, $\frac{\alpha dx}{dy} = 0$ seyn. Denn wofern nicht $\frac{\alpha dy}{dx} = 0$ wäre, so könnte auch der Werth von y weder ein größter noch ein kleinster seyn. Hieraus ergiebt sich für die Erfindung sowohl der größten als der kleinsten Werthe die Regel: Man setze das Differenferenzial der Funktion $y = 0$, dann ist der Werth von x, wobey die Funktion ein Größtes oder ein Kleinstes wird, die Wurzel dieser Gleichung. Hierdurch wird indeß noch nicht entschieden, ob der gefundene Werth von y ein größter oder ob er ein kleinster sey, ja es kann sich ereignen, daß y weder ein Größtes noch ein Kleinstes wird. Wir haben nemlich bloß gefunden, daß in beyden Fällen $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, aber nicht behauptet, daß allemal, wenn $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, ein größter oder ein kleinster Werth für y entstehe.

§. 255.

Um indeß die Fälle, wo y einen größten oder einen kleinsten Werth hat, zu untersuchen, muß man zuvörderst das Differenzial der gegebenen Funktion $= 0$ setzen, und aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ alle Werthe von x aufsuchen. Hat man diese gefunden, so muß man ferner erwägen, ob y dabey ein Größtes oder ein Kleinstes oder keins von beyden werde? denn wir werden zeigen, daß y auch weder ein Größtes noch ein Kleinstes seyn kann, wenn gleich $\frac{dy}{dx} = 0$ ist. Es sey f einer von den Werthen von x, die sich aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ ergeben; und dabey werde, wenn man diesen Werth in die Ausdrücke $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; ꝛc. setzt, $\frac{ddy}{dx^2} = p$; $\frac{d^3y}{dx^3} = q$; $\frac{d^4y}{dx^4} = r$; ꝛc. Geht nun die Funktion y, wenn man f für x setzt, in F über, so wird sie, wenn man $f + \alpha$ für x setzt, in

$$F + \tfrac{1}{2}\alpha^2 p + \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r + \text{ꝛc.}$$

und wenn man $f - \alpha$ für x setzt, in

$$F + \tfrac{1}{2}\alpha^2 p - \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r - \text{ꝛc.}$$

verwandelt; und hieraus erhellet, wenigstens wenn α eine sehr kleine Größe bedeutet, daß, wenn p positiv ist, beyde Werthe größer seyn werden als F, und daß folglich der Werth von F, den die Funktion y bey $x = f$ erhält, ein kleinster ist. Wenn aber p negativ ist, so ist der Werth von y bey $x = f$ ein größter.

§. 256.

Ist hingegen $p = 0$, so muß man den Werth von q betrachten; und ist derselbe nicht $= 0$, so ist der Werth von y weder ein größter noch ein kleinster. Denn setzt man $x = f + \alpha$, so wird $F + \frac{1}{6}\alpha^3 q > F$, und setzt man $x = f - \alpha$, so wird $F - \frac{1}{6}\alpha^3 q < F$. Ist aber $q = 0$, so muß man r untersuchen, und ist diese Größe positiv, so ist der Werth, den die Funktion F bey $x = f$ bekömmt, ein Kleinstes, und wenn sie negativ ist, ein Größtes. Verschwindet auch r, so muß man den folgenden Buchstaben s betrachten, und dabey auf eine ähnliche Art urtheilen als vorhin bey q. Ist nemlich s nicht $= 0$, so ist die Funktion F weder ein Kleinstes noch ein Größtes; ist aber auch $s = 0$, so zeigt der folgende Buchstabe t, wenn er positiv ist, ein Kleinstes, so wie, wenn er negativ ist, ein Größtes an. Wenn aber auch t verschwindet, so muß man, und zwar auf eben diese Art, noch weiter fortgehen. Nach dieser Methode läßt sich von einer jeden Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ finden, ob dabey die Funktion y ein Größtes oder ein Kleinstes oder keins von beyden gebe, und folglich

alle

alle größte und kleinste Werthe, welche die Funktion y haben kann, entdecken.

§. 257.

Wenn also die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ zwey gleiche Wurzeln hat, so daß das Quadrat $(x - f)^2$ ein Faktor von ihr ist: so verschwindet, wenn man $x = f$ setzt, auch $\frac{ddy}{dx^2}$, und es wird $p = 0$, nicht aber q. In diesem Falle hat also die Funktion weder einen größten noch einen kleinsten Werth. Wenn aber die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ drey gleiche Wurzeln hat, oder $(x - f)^3$ ein Faktor von $\frac{dy}{dx}$ ist, so wird, wenn man $x = f$ setzt, $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, und $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, aber nicht $\frac{d^4y}{dx^4}$. Ist daher dieses Glied positiv, so zeigt es ein Kleinstes, ist es aber negativ, ein Größtes an. Ueberhaupt also kommt, wenn $\frac{dy}{dx}$ den Faktor $(x - f)^n$ hat, der Funktion y, bey der Substitution $x = f$, ein größter oder ein kleinster Werth zu, wenn n eine ungerade Zahl ist; wenn aber n eine gerade Zahl ist, so giebt diese Substitution weder ein Größtes noch ein Kleinstes.

§. 258.

Hiernächst kann man sich die Erfindung der größten und kleinsten Werthe öfters durch folgende Betrachtungen erleichtern. Es muß in allen Fällen, wo die Funktion y ein Größtes oder ein Kleinstes wird, auch jedes Vielfache von ihr ay, wenn a eine positive Zahl ist, desgleichen y^3, y^5, y^7, 2c. und überhaupt y^n, wenn n eine ungerade Zahl und positiv ist, gleichfalls ein Größtes oder ein Kleinstes seyn, weil diese Formeln so beschaffen sind, daß sie mit y wachsen und abnehmen. Ferner muß in allen Fällen, wo y ein Größtes oder ein Kleinstes wird, $-y$, $-ay$, $b-ay$, und überhaupt $b-ay^n$, wenn n eine ungerade positive Zahl ist, in umgekehrter Ordnung ein Kleinstes oder ein Größtes seyn. Auf eine ähnliche Art werden $\frac{a}{y}$, $\frac{a}{y^3}$, $\frac{a}{y^5}$ und überhaupt $\frac{a}{y^n} \pm b$, wenn a eine positive und n eine ungerade positive Zahl bedeutet und y ein Größtes oder ein Kleinstes ist, umgekehrt kleinste oder größte Werthe; wenn aber a eine negative Zahl ist, so sind diese Ausdrücke größte Werthe, wenn y ein Größtes, und kleinste Werthe, wenn y ein Kleinstes ist.

§. 259.

Auf die geraden Potestäten läßt sich aber diese Betrachtung nicht anwenden. Denn da die geraden Potestäten y^2, y^4, 2c. positiv werden, wenn y negativ ist: so kann es sich ereignen, daß, wenn y einen kleinsten Werth, nemlich einen negativen, erhält, die geraden Potestäten desselben größte Werthe werden. In Rücksicht hierauf können wir behaupten, daß, wenn y ein Größtes oder ein Kleinstes und sein Werth positiv ist, auch seine geraden Potestäten y^2, y^4, 2c. größte oder kleinste Werthe; hingegen, wenn der negative Werth von y ein Größtes ist, das Quadrat yy ein Kleinstes, und umgekehrt, wenn der negative Werth von y ein Kleinstes ist, y^2, y^4, 2c. größte Werthe seyn werden. Wenn die Exponenten von y gerade negative Zahlen sind, so findet das Gegentheil statt. Uebrigens gilt das, was wir hier von den geraden und ungeraden Exponenten angemerkt haben, nicht bloß, wenn diese Exponenten ganze Zahlen, sondern auch wenn sie Brüche sind, deren Nenner zu ungeraden Zahlen gehören. Bey der gegenwärtigen Untersuchung kann man nemlich Brüche wie $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, ꝛc. als ungerade, und Brüche wie $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$, ꝛc. als gerade Zahlen ansehen.

§. 260.

Wenn aber die Nenner gerade Zahlen sind, so läßt sich, da bey einem negativen Werthe von y die Potestäten $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{4}}$; ꝛc. imaginär sind, bloß das behaupten, daß, wenn der positive Werth von y ein Größtes oder ein Kleinstes ist, auch $y^{\frac{1}{2}}$; $y^{\frac{3}{2}}$; $y^{\frac{1}{4}}$; ꝛc. gleichfalls größte oder kleinste Werthe, hingegen $y^{-\frac{1}{2}}$; $y^{-\frac{3}{2}}$; $y^{-\frac{1}{4}}$; ꝛc. umgekehrt kleinste oder größte Werthe seyn werden. Da überdem diese Irrational-Größen einen doppelten Werth, einen positiven und einen negatiaen, haben, so gilt in Ansehung ihrer negativen Werthe das Gegentheil von dem, was wir in Ansehung ihrer positiven Werthe behauptet haben. Wird aber der negative Werth von y ein Größtes oder ein Kleinstes, so kann man die Potestäten desselben mit gebrochenen Exponenten, deren Nenner gerade Zahlen sind, weil sie imaginäre Größen werden, weder zu den größten noch zu den kleinsten Werthen rechnen. Durch diese Betrachtungen wird öfters die Untersuchung der größten und kleinsten Werthe sehr leicht, wenn dieselbe ohne sie mit vielen Schwierigkeiten verknüpft seyn würde.

§. 261.

Da das Bisherige eigentlich die rationalen Funktionen betrifft, indem diese allein einförmig sind, so wollen wir nun zuvörderst die ganzen Funktionen betrachten, und die größten und kleinsten Werthe, die dabey vorkommen, zu finden suchen. Da nun der allgemeine Ausdruck dieser Funktionen folgender ist:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{etc.}$$

so fällt zuerst in die Augen, daß sie keinen größern Werth bekommen können, als wenn $x = \infty$ gesetzt wird. Setzt man $x = -\infty$, so wird der Werth der angeführten Formel $= \infty^n$, wenn n eine gerade Zahl ist, und $= -\infty^n$, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, und dies ist daher unter allen Werthen der kleinste. Es giebt aber außerdem oft andere größte und kleinste Werthe in dem Verstande, den wir §. 251. festgesetzt haben, und davon wollen wir nun einige Exempel anführen.

Erstes Exempel.

Die Werthe von x zu finden, wobey die Funktion $(x-a)^n$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man $(x-a)^n = y$, so wird $\frac{dy}{dx} = n(x-a)^{n-1}$, und setzt man dieses $= 0$, so wird $x = a$. Da nun $\frac{dy}{dx}$ den Faktor $(x-a)^{n-1}$ hat, so erhellet aus §. 257, daß y kein Größtes oder Kleinstes seyn kann, wofern nicht $n-1$ eine ungerade oder n eine gerade Zahl ist. Da aber, indem

$$\frac{d^ny}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1$$

wird, dieses eine positive Zahl ist, so folgt, daß der Werth, den y durch die Substitution $x = a$ erhält, ein Kleinstes seyn werde, [§. 255.]. Auch fällt dieses bald in die Augen. Denn setzt man $x = a$, so wird $y = 0$, und wenn man x größer oder kleiner als a annimmt, so bekommt allemal y, weil n eine gerade Zahl ist, einen positiven Werth, der folglich größer als 0 ist. Bedeutet aber n eine ungerade Zahl, so hat die Funktion $y = (x - a)^n$ weder ein Größtes noch ein Kleinstes. Eben dieses findet statt, wenn n eine gebrochene, gerade oder ungerade Zahl ist. Es ist nemlich $(x - a)^{\frac{\mu}{\nu}}$, wenn man $x = a$ setzt, ein Kleinstes, wofern μ eine gerade und ν eine ungerade Zahl ist, sind aber beyde Buchstaben ungerade Zahlen, so findet dabey weder ein größter noch ein kleinster Werth statt.

Zweytes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen der Werth der Formel $xx + 3x + 2$ ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man $xx + 3x + 2 = y$, so wird $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$, $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$. Macht man also $2x + 3 = 0$, so findet sich $x = -\frac{3}{2}$; und dabey erkennt man aus dem Werthe $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$, ob der Werth von y durch die Substitution $x = -\frac{3}{2}$ ein Größtes oder ein Kleinstes geben werde. Wie nemlich auch x beschaffen ist, so muß y, da $\frac{ddy}{2dx^2} = 1$ positiv ist, ein Kleinstes werden. Es erhält aber y durch die Substitution $x = -\frac{3}{2}$ den Werth $-\frac{1}{4}$. Auch erkennet man aus der Beschaffenheit der Formel $xx + 3x + 2$ selbst,

daß

daß ihr ein kleinster Werth zukommen müsse; denn da ihr Werth unendlich wird, sowohl wenn man $x = + \infty$ als $= - \infty$ setzt, so muß sie durch irgend einen Werth von x ein Kleinstes werden.

Drittes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen der Ausdruck $x^3 - axx + bx - c$ einen größten oder kleinsten Werth bekömmt.

Setzt man $y = x^3 - axx + bx - c$, so wird $\frac{dy}{dx} = 3xx - 2ax + b$; $\frac{ddy}{2dx^2} = 3x - a$; $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$. Man mache also $3xx - 2ax + b = 0$, so wird $x = \frac{a \pm \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$, und hieraus erhellet, daß die gegebene Formel, wofern nicht $aa > 3b$ ist, weder einen kleinsten noch einen größten Werth haben wird. Wenn aber $aa > 3b$ ist, so wird sie in zwey Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes. Es folgt nemlich hieraus $\frac{ddy}{2dx^2} = \pm \sqrt{(aa - 3b)}$, und daraus sieht man, daß, wofern nicht $aa = 3b$ ist, der Werth $x = \frac{a + \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ die Formel $y = x^3 - axx + bx - c$ einen kleinsten, der andere Werth $x = \frac{a - \sqrt{(aa - 3b)}}{3}$ aber einen größten Werth ertheilen werde. Was aber die Größe dieser Werthe von y betrifft, so ist, da

$$3xx - 2ax + b = 0, \text{ oder } x^3 - \tfrac{2}{3}axx + \tfrac{1}{3}bx = 0,$$

$$y = - \tfrac{1}{3}axx + \tfrac{2}{3}bx - c;$$

und da $\frac{1}{3}axx - \frac{2aa}{9}x + \frac{ab}{9} = 0$ ist, ferner

$y =$

$$y = \frac{2}{9}(3b - aa)x + \frac{ab}{9} - c = - \frac{2a(aa - 3b)}{27}$$
$$\mp \frac{2(aa - 3b)\sqrt{(aa - 3b)}}{27} + \frac{ab}{9} - c = - \frac{2a^3}{27}$$
$$+ \frac{ab}{3} - c \mp \frac{2}{27}(aa - 3b)^{\frac{3}{2}},$$

wo das das obere Zeichen für den kleinsten und das untere für den größten Werth gilt. Es ist also noch der Fall übrig, wenn $aa = 3b$ ist. Da dabey $\frac{ddy}{2dx^2} = 0$, das folgende Glied aber $\frac{d^3y}{6dx^3} = 1$ nicht $= 0$ ist, so hat die gegebene Formel in diesem Falle weder einen größten noch einen kleinsten Werth.

Viertes Exempel.

Die Fälle zu finden, wo folgende Funktion von x:

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$$

einen größten oder einen kleinsten Werth bekömmt.

Setzt man $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24,$$
$$\frac{ddy}{2dx^2} = 6x^2 - 24x + 22.$$

Setzt man also $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0$, oder $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, so bekömmt man drey reelle Werthe für x;

I. $x = 1$; II. $x = 2$; III. $x = 3$.

Bey dem ersten Werthe wird $\frac{ddy}{2dx^2} = 4$, und also y bey

$x = 1$ ein Kleinstes. Bey dem zweyten Werthe wird $\frac{ddy}{2dx^2} = -2$, und folglich y bey $x = 2$ ein Größtes. Bey dem dritten Werthe wird $\frac{ddy}{2dx^2} = + 4$, und folglich die gegebene Funktion abermals ein Kleinstes.

Fünftes Exempel.

Es ist die Funktion $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ gegeben; man soll bestimmen, in welchen Fällen sie ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Da $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15xx$ ist, so formire man die Gleichung: $x^4 - 4x^3 + 3xx = 0$, deren Wurzeln sind: I und II. $x = 0$; III. $x = 1$; IV. $x = 3$. Da die beyden ersten Wurzeln gleich sind, so geben dieselben weder ein Größtes noch ein Kleinstes, denn es wird $\frac{ddy}{2dx^2} = 0$ aber $\frac{d^3y}{6dx^3}$ verschwindet nicht. Die dritte Wurzel $x = 1$ aber giebt, da $\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 30x^2 + 15x$ ist, $\frac{ddy}{2dx^2} = -5$, und in diesem Falle hat also die Funktion einen größten Werth. Aus der vierten Wurzel fließt $\frac{ddy}{2dx^3} = 15$, und dabey ist also die gegebene Funktion ein Kleinstes.

Sechs-

Sechstes Exempel.

Die Fälle zu finden, wo die Formel:

$$y = 10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Es ist also

$$\frac{dy}{dx} = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60x^2, \text{ und}$$

$$\frac{ddy}{60dx^2} = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x.$$

Setzt man nun $x^5 - x^4 + x^3 - xx = 0$, so hat diese Gleichung, da sie mit $x^2(x-1)(xx+1) = 0$ einerley ist, zwey gleiche Wurzeln $x = 0$, und außerdem die Wurzel $x = 1$, und zwey aus der Gleichung $xx + 1 = 0$ entspringende imaginäre Wurzeln. Da also die beyden gleichen Wurzeln $x = 0$, weder ein Größtes noch ein Kleinstes geben, so bleibt bloß die dritte Wurzel, $x = 1$, zu betrachten übrig, und da dieselbe $\frac{ddy}{60dx^2} = 2$ giebt, so zeigt dieser positive Werth ein Kleinstes an.

§. 262.

Es hängt also die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe von den Wurzeln der Differenzial-Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ ab, und da die höchste Potestät von x in dieser Gleichung einen Grad niedriger ist, als in der gegebenen Funktion y, vorausgesetzt, daß y eine ganze rationale Funktion bedeute: so ist offenbar, daß überhaupt die größten und kleinsten Werthe der Funktion

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = y$$

durch die Wurzeln folgender Gleichung bestimmt werden:

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.} = 0.$$

Wir wollen annehmen, daß die reellen Wurzeln dieser Gleichung, nach ihrer Größe geordnet, α, β, γ, δ, etc. und also α die größte Wurzel, β kleiner als α, γ kleiner als β, etc. sey. Sind nun zuvörderst alle diese Wurzeln unter einander ungleich, so erhält die gegebene Funktion bey einer jeden einen größten oder kleinsten Werth, und es hat demnach die Funktion y so viel größte oder kleinste Werthe, als die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ reelle ungleiche Wurzeln hat. Wenn aber zwey oder mehrere Wurzeln einander gleich sind, so geben zwey gleiche Wurzeln weder ein Größtes noch ein Kleinstes; drey gleiche Wurzeln gelten hier so viel als eine; und überhaupt entsteht aus jeder geraden Anzahl gleicher Wurzeln weder ein Größtes noch ein Kleinstes, und aus jeder ungeraden Anzahl gleicher Wurzeln Ein Größtes oder Ein Kleinstes.

§. 263.

Was für Wurzeln größte und was für welche kleinste Werthe geben, läßt sich ohne Hülfe der vorher gegebenen Regel auf folgende Art bestimmen. Da die Funktion y, wenn man $x = \infty$ setzt, ebenfalls unendlich wird, und die Werthe von x, die zwischen ∞ und α fallen, weder ein Größtes noch ein Kleinstes geben: so ist klar, daß die Werthe, welche man für die Funktion y findet, wenn man für x nach und nach die vom ∞ bis zu α liegenden Werthe setzt, ununterbrochen abnehmen müssen; und es wird daher der Werth $x = \alpha + \omega$ der Funktion y einen größern Werth ertheilen, als $x = \alpha$. Da also $x = \alpha$ entweder ein Größtes oder ein Kleinstes hervorbringt, so muß in

diesem

diesem Falle die Funktion y nothwendig ein Kleinstes werden. Fährt man daher fort x zu verändern, oder setzt man $x = \alpha - \omega$, so wird der Werth von y wieder wachsen, bis $x = \beta$ wird, und dies ist die zweyte Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, die entweder ein Größtes oder ein Kleinstes giebt. Es wird demnach diese zweyte Wurzel $x = \beta$ ein Größtes geben, und der Werth $x = \beta - \omega$ den Werth der Funktion y kleiner machen als $x = \beta$, bis man zu $x = \gamma$ kommt, wodurch von neuem ein Kleinstes erzeugt werden wird. Man sieht hieraus, daß die erste, dritte, fünfte Wurzel u. s. f. der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ Kleinste, die zweyte, vierte, sechste hingegen u. s. w. Größte geben. Zugleich erhellet, daß das Kleinste und Größte, wenn zwey gleiche Wurzeln da sind, zusammenfallen, und also weder ein Größtes noch ein Kleinstes statt finde.

§. 264.

Ist daher in einer Funktion

$$y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \text{ꝛc.}$$

der höchste Exponent n eine gerade Zahl, so ist die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + \text{ꝛc.} = 0$$

eine Gleichung von einem ungeraden Grade, und hat folglich entweder eine, oder drey, oder fünf oder überhaupt eine ungerade Menge reeller Wurzeln. Ist nur eine Wurzel reell, so giebt dieselbe ein Kleinstes; sind drey Wurzeln reell, so giebt die größte ein Kleinstes, die mittelste ein Größtes, und die kleinste wieder ein Kleinstes; sind fünf Wurzeln reell, so hat die Funktion y drey kleinste und zwey größte Werthe u. s. f. Druckt hingegen der Exponent n eine ungerade Zahl aus, so ist die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ eine Gleichung von einem geraden Grade, und hat deswegen entweder gar keine, oder zwey, oder vier, oder sechs reelle Wurzeln u. s. f. Im ersten Falle hat die Funktion y weder einen größten noch einen kleinsten Werth: im andern Falle, oder wenn zwey reelle Wurzeln da sind, giebt die größere ein Kleinstes, und die kleinere ein Größtes: und hat die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ vier reelle Wurzeln, so erzeugen die erste (welche die größte ist) und die dritte ein Kleinstes, und die zweyte und vierte ein Größtes. Ueberhaupt wechseln, die Anzahl der reellen Wurzeln mag seyn welche sie will, die kleinsten und größten Werthe mit einander ab.

§. 265.

Nun wollen wir uns zu der andern Gattung der einförmigen Funktionen, oder zu den rationalen gebrochenen Funktionen wenden. Es sey $y = \frac{P}{Q}$, und P und Q Funktionen von x. Legt man hier der Größe x einen solchen Werth bey, daß $Q = 0$ wird, so ist offenbar, daß y in eine unendliche Größe übergeht, wofern nicht auch zugleich P verschwindet, und es scheint daher in diesem Fall ein Größtes zu entstehen. Gleichwohl darf man dieses nicht annehmen. Denn da der umgekehrte Bruch $\frac{Q}{P}$ in eben den Fällen ein Kleinstes wird, in welchen $\frac{P}{Q}$ einen größten Werth hat: so müßte auch $\frac{Q}{P}$ ein Kleinstes werden, wenn

Q verschwände. Allein dieses findet nicht allemal statt, weil es auch noch kleinere oder negative Werthe geben kann. Hierdurch wird zugleich die vorhin gegebene Regel bestätigt, daß man die größten und kleinsten Werthe aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ entwickeln müsse. Man suche also in dem gegebenen Falle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{QdP - PdQ}{QQdx}$$

und setze darauf $QdP - PdQ = 0$; so werden die Wurzeln dieser Gleichung der Funktion y entweder einen größten oder einen kleinsten Werth ertheilen. Entsteht ein Zweifel darüber, ob der gefundene Werth ein größter oder ein kleinster sey, so muß man die Gleichung $\frac{ddy}{dx^2}$ zu Hülfe nehmen. Ist der Werth derselben positiv, so ist dies ein Kennzeichen eines kleinsten Werthes, so wie der negative Werth davon ein Größtes anzeigt; und verschwindet der Werth von $\frac{ddy}{dx^2}$, welches allemal geschiehet, wenn die Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ zwey oder mehrere gleiche Wurzeln hat, so muß man sich daran erinnern, daß gleiche Wurzeln in gerader Anzahl weder einen größten noch einen kleinsten Werth geben.

Erstes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen die Funktion

$$\frac{x}{1 + xx}$$

einen größten oder kleinsten Werth hat.

Hier fällt sogleich in die Augen, daß die gegebene Funktion in drey Fällen, nemlich, wenn man $x = \infty$,

$x = o$, $x = -\infty$ setzt, verschwinde, und es muß daher dieselbe zum wenigsten zwey größte oder zwey kleinste Werthe haben. Um diese zu finden setze man $y = \frac{x}{1 + xx}$; so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - xx}{(1 + xx)^2}, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{6x + 2x^3}{(1 + xx)^3}$$

Ferner setze man $\frac{dy}{dx} = o$, wodurch man $1 - xx = o$, also entweder $x = +1$ oder $x = -1$ erhält. Im ersten Falle, wo $x = +1$ ist, wird $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4}{2^3}$, und daher der größte Werth von $y = +\frac{1}{2}$; im letzten aber, oder wenn $x = -1$ genommen wird, ist $\frac{ddy}{dx^2} = +\frac{4}{2^3}$ und also $y = -\frac{1}{2}$, der kleinste Werth. Dieses findet man noch leichter, wenn man den Bruch umkehrt, oder $y = \frac{1 + xx}{x} = x + \frac{1}{x}$ setzt, und dabey vor Augen behält, daß die alsdann sich ergebenden Werthe die entgegenstehenden Namen bekommen. Es ist nemlich alsdann

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{xx}, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$$

und also, wenn man $\frac{dy}{dx} = o$ setzt, $xx - 1 = o$; folglich $x = +1$ oder $x = -1$, wie vorhin. Ist $x = +1$, so wird $\frac{ddy}{dx^2} = 2$, und y ein Kleinstes, folglich $\frac{1}{y}$ ein Größtes; ist aber $x = -1$, so findet man $\frac{ddy}{dx^2} = -2$, und y ist ein Größtes, so wie $\frac{1}{y}$ ein Kleinstes.

Zwey-

Zweytes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen die Formel

$$\frac{2 - 3x + xx}{2 + 3x + xx}$$

ein Größtes oder ein Kleinstes giebt.

Setzt man $y = \frac{xx - 3x + 2}{xx + 3x + 2}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 12}{(xx + 3x + 2)^2} \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{12x^3 + 72x + 72}{(xx + 3x + 2)^3}$$

und setzt man nun $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird

$$x = + \sqrt{2}, \text{ oder } x = - \sqrt{2}.$$

Im ersten Falle ist $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{48\sqrt{2} + 72}{(4 + 3\sqrt{2})^3}$ und also positiv, da der Nenner positiv ist. Folglich ist der kleinste Werth von

$$y = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4 + 3\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 17 = - 0{,}02943725.$$

Im letzten Falle, oder wenn $x = - \sqrt{2}$ ist, wird

$$\frac{ddy}{dx^2} = - \frac{48\sqrt{2} + 72}{(4 - 3\sqrt{2})^3} = \frac{24(3 - 2\sqrt{2})}{(4 - 3\sqrt{2})^3}$$

und also, da der Zähler dieses Bruchs positiv und der Nenner negativ ist, negativ. Folglich ist der größte Werth von

$$y = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 - 3\sqrt{2}} = - 12\sqrt{2} - 17 = - 33{,}97056274.$$

Nun ist zwar dieser Werth kleiner als der vorhergehende kleinste, aber doch in so fern ein größter Werth, weil er größer ist, als die zunächst auf ihn folgenden, welche man bekömmt, wenn man für x Werthe setzt, die nur um sehr wenig größer oder kleiner sind als $- \sqrt{2}$. Da die $\sqrt{2}$

zwischen $\frac{4}{3}$ und $\frac{3}{2}$ fällt, so kann man sich hiervon leicht durch folgende Rechnung überzeugen.

Wenn	so wird
$x = \frac{4}{3}$	$y = -\frac{2}{70} = -0{,}0285$
$x = \sqrt{2}$	$y = 12\sqrt{2} - 17 = -0{,}0294$ ein Kleinstes
$x = \frac{3}{2}$	$y = -\frac{1}{35} = -0{,}0285$
$x = -\frac{4}{3}$	$y = -35$
$x = -\sqrt{2}$	$y = -33{,}970$, ein Größtes
$x = -\frac{3}{2}$	$y = -35$.

Drittes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen die Formel

$$\frac{xx - x + 1}{xx + x - 1}$$

einen größten oder einen kleinsten Werth hat.

Setzt man $y = \frac{xx - x + 1}{xx + x - 1}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xx - 4x}{(xx + x - 1)^2} \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = -\frac{4x^3 + 12xx + 4}{(xx + x - 1)^3}$$

Macht man daher $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird entweder

$$x = 0 \text{ oder } x = 2.$$

Im ersten Falle ist $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{4}{-1}$, und also y ein Größtes und $= -1$; im andern wird $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{20}{5^3}$, und folglich y ein Kleinstes, und $= \frac{3}{5}$. Dies ist der Wahrheit nach der obigen Erklärung der größten und kleinsten Werthe vollkommen gemäß, obgleich $\frac{3}{5}$ größer als -1 ist. Denn

setzt

setzt man	so wird
$x = -\frac{1}{3}$	$y = -\frac{13}{11}$
$x = 0$	$y = -1$, ein Größtes
$x = +\frac{1}{3}$	$y = -\frac{7}{5}$
$x = 2 - \frac{1}{3}$	$y = \frac{19}{31}$
$x = 2$	$y = \frac{3}{5}$ ein Kleinstes
$x = 2 + \frac{1}{3}$	$y = \frac{37}{61}$

Daß $y = 1$ und also > -1 wird, wenn man $x = 1$ setzt, rührt daher, weil zwischen die Werthe von x, 0 und 1 ein Werth fällt, wobey $y = \infty$ wird.

Viertes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen der Bruch

$$\frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$$

kleinste oder größte Werthe giebt.

Setzt man $y = \frac{x^3 + x}{x^4 - xx + 1}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^6 - 4x^4 + 4xx + 1}{(x^4 - xx + 1)^2}, \text{ und}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 + 18x^7 - 24x^5 - 16x^3 + 12x}{(x^4 - xx + 1)^3}$$

Auf diese Art hat man die Gleichung

$$x^6 + 4x^4 - 4xx - 1 = 0$$

welche sich in

$$xx - 1 = 0, \text{ und } x^4 + 5x^2 + 1 = 0$$

auflösen läßt. Die Wurzeln von jener sind $x = +1$ und $x = -1$; und aus der Auflösung von dieser findet man $x^2 = -\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$, woraus sich keine reelle Wurzel entwickeln läßt. Braucht man also die beyden gefundenen Wurzeln, so giebt $x = + 1$, den Werth von $\frac{ddy}{dx^2} = - 8$, und folglich für y das Größte $= 2$; $x = - 1$ aber $\frac{ddy}{dx^2} = + 8$, und also für y das Kleinste $= - 2$.

Fünftes Exempel.

Die Fälle zu finden, in welchen der Bruch

$$\frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$$

ein Größtes oder ein Kleinstes giebt.

Setzt man $y = \frac{x^3 - x}{x^4 - xx + 1}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x^6 + 2x^4 + 2x^2 - 1}{(x^4 - xx + 1)^2}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x^9 - 6x^7 - 18x^5 + 20x^3}{(x^4 - xx + 1)^3}$$

Macht man also $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird

$$x^6 - 2x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

und diese Gleichung, durch $xx + 1$ dividirt, giebt die Gleichung

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

welche sich in

$$xx - x - 1 = 0 \text{ und } xx + x - 1 = 0$$

auflösen läßt. Hieraus ergeben sich die reellen Werthe

$$1.\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};\quad 2.\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$3.\ x = - \frac{1 + \sqrt{5}}{2};\quad 4.\ x = - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Da

Da diese Werthe insgesammt in der Gleichung $x^4 - 3xx + 1 = 0$ enthalten sind, so wird, wenn man $x^4 = 3xx - 1$ setzt, für alle

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{2x(10 - 20xx)}{8x^6} = \frac{5(1 - 2xx)}{2x^5} = \frac{5(1 - 2xx)}{2x(3xx - 1)}$$

$$\text{und } y = \frac{x^3 - x}{2xx} = \frac{xx - 1}{2x}.$$

Für die beyden ersten Werthe aus der Gleichung $xx = x + 1$ aber ist

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2x + 1)}{2x(3x + 2)} = -\frac{5(2x + 1)}{2(5x + 3)};$$

$$\text{und } y = \tfrac{1}{2}.$$

Nun giebt die erste Wurzel $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2 + \sqrt{5})}{11 + 5\sqrt{5}}$$

und der Werth von y ist demnach ein größter. Die andere Wurzel $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ giebt

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{5(2 - \sqrt{5})}{11 - 5\sqrt{5}} = -\frac{5(\sqrt{5} - 2)}{5\sqrt{5} - 11}$$

und so ist auch $y = \frac{1}{2}$ ein größter Werth. Die beyden übrigen Wurzeln geben kleinste Werthe für y, und zwar $y = -\frac{1}{2}$.

§. 266.

Bey Exempeln dieser Art giebt es also einen leichtern Weg zur Beantwortung der Frage: Ob ein Größtes oder ein Kleinstes statt finde? Denn da $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so läßt sich der Werth von $\frac{ddy}{dx^2}$, indem man auf diese Gleichung

Rück-

Rücksicht nimmt, einfacher ausdrucken. Es sey der Bruch $y = \frac{P}{Q}$ gegeben. Da

$$dy = \frac{QdP - PdQ}{QQ}, \text{ und } QdP - PdQ = 0$$

so wird

$$ddy = \frac{d(QdP - PdQ)}{Q^2} - \frac{2dQ(QdP - PdQ)}{Q^3}$$

Allein dieses letzte Glied verschwindet, weil $QdP - PdQ = 0$ ist, und so wird

$$ddy = \frac{d(QdP - PdQ)}{Q^2} = \frac{QddP - PddQ}{Q^2}$$

Da es also auf die Beschaffenheit dieses Werthes oder darauf ankommt, ob derselbe positiv oder negativ ist, und der Nenner Q^2 allemal positiv wird: so hat man hier bloß auf den Zähler zu sehen, und bekommt allemal ein Kleinstes, wenn $QddP - PddQ$, oder $\frac{d(QdP - PdQ)}{dx^2}$ positiv, und ein Größtes, wenn solches negativ ist. Oder man suche $\frac{dy}{dx}$, welches die Form $\frac{R}{QQ}$ haben wird, und darauf $\frac{dR}{dx}$. Hat man dieses gethan, so wird die Wurzel, wobey dieser Ausdruck positiv wird, ein Kleinstes, und die, wobey er negativ wird, ein Größtes geben.

§. 267.

Wenn der Nenner des gegebenen Bruchs ein Quadrat oder irgend eine höhere Potestät, und also $y = \frac{P}{Q^n}$ ist, so wird

$$dy = \frac{QdP - nPdQ}{Q^{n+1}}$$

und

und wenn man $\frac{QdP - nPdQ}{dx} = R$ setzt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R}{Q^{n+1}}$$

und die größten und kleinsten Werthe hängen von den Wurzeln der Gleichung $R = 0$ ab. Da ferner

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{QdR - (n+1)RdQ}{Q^{n+2}}$$

ist, so wird, wegen $R = 0$

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{dR}{Q^{n+1}}$$

und der positive Werth hievon zeigt ein Kleinstes, so wie der negative ein Größtes an. Da aber, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, Q^{n+1} allemal positiv ist, so hat man in diesem Falle nur nöthig $\frac{dR}{dx}$ zu erwägen, und die Formel $\frac{QdR}{dx}$ zu brauchen, wenn n eine gerade Zahl bedeutet.

Nehmen wir ferner an, daß der gegebene Bruch $\frac{P^m}{Q^n} = y$ sey, so ist

$$dy = \frac{(mQdP - nPdQ)P^{m-1}}{Q^{n+1}}$$

und es zeigen also, wenn man

$$\frac{mQdP - nPdQ}{dx} = R$$

setzt, die Wurzeln der Gleichung $R = 0$ die Fälle an, in welchen y ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Da also

$\frac{dy}{dx} = \frac{P^{m-1}R}{Q^{n+1}}$ ist, so wird

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{P^{m-2}R[(m-1)QdP - (n+1)PdQ]}{Q^{n+2}} + \frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}}$$

und

und, wegen $R = 0$,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{P^{m-1} dR}{Q^{n+1} dx}$$

eine Formel, die außerdem noch durch jedes Quadrat $\frac{P^{2\mu}}{Q^{2\nu}}$ dividirt werden kann. Ueberdies giebt auch die Gleichung $P = 0$ ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn m eine gerade Zahl ist, und auf ähnliche Art wird sich bey der Betrachtung der umgekehrten Formel $\frac{Q^n}{P^m}$ ein Größtes oder Kleinstes bey der Annahme von $Q = 0$ ergeben, wenn n eine gerade Zahl ist [§. 252.]. Hier nehmen wir indeß auf die daher entspringenden größten oder kleinsten Werthe weiter keine Rücksicht, sondern untersuchen nur, der Erklärung der Methode wegen, diejenigen, welche aus der Gleichung $R = 0$ entspringen.

Erstes Exempel.

Es ist der Bruch $\frac{(\alpha + \beta x)^m}{(\gamma + \delta x)^n}$ gegeben. Man soll bestimmen, in welchem Falle derselbe ein Größtes oder ein Kleinstes gebe?

Setzt man $y = \frac{(\alpha + \beta x)^m}{(\gamma + \delta x)^n}$, so fällt zuvörderst in die Augen, daß

seyn werde	wenn ist
$y = 0$	$x = -\frac{\alpha}{\beta}$
$y = \infty$	$x = -\frac{\gamma}{\delta}$

und von diesen beyden Fällen giebt jener ein Kleinstes und dieser ein Größtes, wenn m und n gerade Zahlen sind. Ueberdies aber ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\alpha + \beta x)^{m-1}}{(\gamma + \delta x)^{n+1}}[(m-n)\beta\delta x + m\beta\gamma - n\alpha\delta]$$

und also

$$R = (m-n)\beta\delta x + m\beta\gamma - n\alpha\delta,$$

und folglich, wenn man $R = 0$ setzt,

$$x = \frac{n\alpha\delta - m\beta\gamma}{(m-n)\beta\delta}.$$

Da ferner $\frac{dR}{dx} = (m-n)\beta\delta$ ist, so muß man untersuchen, ob

$$\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}\beta^{n+1}}{n^{n+1}\delta^{m-1}}\left(\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{m-n}\right)^{m-n-2}\frac{dR}{dx}$$

eine positive oder negative Größe ist? im ersten Falle ist die gegebene Formel ein Kleinstes, im andern ein Größtes.

Ist z. B. $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$, so wird $\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{9}{8}$, und also die Formel $\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ ein Kleinstes, wenn man $x = 0$ setzt.

Ist aber $y = \frac{(x-1)^m}{(x+1)^n}$, so wird

$$\frac{P^{m-1}dR}{Q^{n+1}dx} = \frac{m^{m-1}}{n^{n+1}}\left(\frac{n-m}{2}\right)^{n-m+2}(m-n)$$

und $x = \frac{n+m}{n-m}$. Da aber m und n als positive Zahlen betrachtet werden, so muß man nach der Formel

$$(n-m)^{n-m+2}(m-n) \text{ oder } (n-m)^{n-m}(m-n)$$

urtheilen. Ist demnach $n > m$, so giebt der Werth $x = \frac{m+m}{n-m}$ allemal ein Größtes; ist aber $n < m$, so fin-

der

det ein Größtes statt, wenn $m - n$ eine ungerade, und ein Kleinstes, wenn $m - n$ eine gerade Zahl ist. So ist $\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ ein Größtes, wenn man $x = -5$ setzt, indem

$y = -\frac{6^3}{4^2} = -\frac{27}{2}$ wird.

Zweytes Exempel.

Es sey die Formel: $y = \frac{(1+x)^3}{(1+xx)^2}$ gegeben.

Da $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(3 - 4x - xx)$ und

$$\frac{P^{m-1}}{Q^{n+1}} \cdot \frac{dR}{dx} = -\frac{(1+x)^2}{(1+xx)^3}(2x+4)$$

ist, und $(1+x)^2$ und $(1+xx)^3$ allemal einen positiven Werth haben, so braucht man nur den Ausdruck $-x-2$ zu betrachten. Ist derselbe positiv, so findet ein Kleinstes, und ist er negativ, ein Größtes statt. Nun folgt aus der Gleichung $3 - 4x - xx = 0$

$$x = -2 + \sqrt{7} \text{ oder } x = -2 - \sqrt{7}.$$

Im ersten Falle wird $-x-2 = -\sqrt{7}$, und so ist der gegebene Bruch ein Größtes. Im andern aber wird $-x - 2 = +\sqrt{7}$, und daher eben dieser Bruch ein Kleinstes. Setzt man aber $x = -2 + \sqrt{7}$, so wird

$$1 + x = -1 + \sqrt{7}, \text{ und } 1 + xx = 12 - 4\sqrt{7}$$

folglich

$$y = \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{12-4\sqrt{7}}\right)^2 (\sqrt{7}-1) = \frac{(2+\sqrt{7})^2(\sqrt{7}-1)}{16}$$

$$= \frac{17+7\sqrt{7}}{16} = 2{,}220$$

und

und dagegen ist, wenn man $x = -2 - \sqrt{7}$ annimmt,

$$y = \frac{17 - 7\sqrt{7}}{16} = -0,0950.$$

§. 268.

Es giebt auch irrationale und transcendente Funktionen, welche die Eigenschaft der einförmigen Funktionen an sich haben, und deren größte und kleinste Werthe daher auf ähnliche Art gefunden werden können. Es sind nemlich die Wurzeln der cubischen und aller höhern Gleichungen mit ungeraden Exponenten nichts anders als einförmige Funktionen, da sie nicht mehr als Einen reellen Werth haben; und was die Quadratwurzeln und überhaupt die Wurzeln betrifft, deren Exponenten gerade Zahlen sind, so haben dieselben, wenn sie reell sind, zwar allezeit einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen; allein man kann jeden besonders betrachten und dann ebenfalls die größten und kleinsten Werthe aufsuchen. Ist z. B. y irgend eine Funktion von x, so hat zwar $\sqrt{y}$ einen zwiefachen Werth; allein man kann einen jeden besonders erwägen. Es wird nemlich $+\sqrt{y}$ einen größten oder kleinsten Werth haben, wenn y dergleichen hat und derselbe positiv ist, denn sonst wird $\sqrt{y}$ imaginär. Umgekehrt wird $-\sqrt{y}$ in eben den Fällen ein Kleinstes oder ein Größtes seyn, wo $+\sqrt{y}$ ein Größtes oder ein Kleinstes ist. Unter eben den Bedingungen ist jede Potestät $y^{\frac{m}{n}}$ ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn n eine ungerade Zahl ist; bedeutet aber n eine gerade Zahl, so gelten bloß die Fälle, wo y einen positiven Werth bekommt, und in denselben entstehen wegen des doppelten Werths auch doppelte Größte oder Kleinste.

§. 269.

Da die Differenzialgleichung, welche man aus der Potestät y^m erhält, $\frac{y^{m-1}dy}{dx} = 0$ ist, und die Wurzeln dieser Gleichung zugleich die Fälle anzeigen, in welchen die Potestät $y^{\frac{m}{n}}$ ein Größtes oder ein Kleinstes ist: so hat man zur Beurtheilung dieser Beschaffenheit eine doppelte Gleichung, nemlich $y^{m-1} = 0$, und $\frac{dy}{dx} = 0$. Jene läßt sich in $y = 0$ abändern, und giebt dann nur Größte oder Kleinste, wenn $m - 1$ eine ungerade, oder m eine gerade Zahl ist, [§. 257.]. Wenn also n eine ungerade Zahl, und m eine gerade Zahl bedeutet, so wird die Funktion $y^{\frac{m}{n}}$, oder $y^{2\mu:(2\nu-1)}$, einen größten oder einen kleinsten Werth bekommen, wenn man darin die Werthe von x braucht, die sich aus der Gleichung $y = 0$ oder auch aus dieser $\frac{dy}{dx} = 0$ ergeben. Ist hingegen m eine ungerade Zahl, so ist die Funktion $y^{(2\mu-1):(2\nu-1)}$ oder $y^{(2\mu-1):2\nu}$ nur dann ein Größtes oder ein Kleinstes, wenn man darin die Werthe von x braucht, die aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ fließen. Auch müssen außerdem im letzten Falle die Werthe von y positiv seyn.

§. 270.

So giebt die Formel $x^{\frac{2}{3}}$ ein Kleinstes, wenn man $x = 0$ setzt, weil in diesem Falle x^2 ein Kleinstes wird. Allein führte man $x^{\frac{2}{3}}$ nicht auf x^2 zurück, so würde die vorhin

vorhin erklärte Methode solches auf keine Weise anzeigen, weil, wenn $x = 0$ gesetzt wird, die Glieder der Reihe, wornach geurtheilt werden muß,

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

außer dem ersten insgesammt unendlich groß werden. Denn setzt man $y = x^{\frac{2}{3}}$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}};\quad \frac{ddy}{dx^2} = \frac{-2}{9x^{\frac{4}{3}}};\quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2 \cdot 4}{27x^{\frac{7}{3}}};\ \text{ꝛc.}$$

und es giebt weder die Gleichung $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = 0$ den Werth $x = 0$, noch zeigen die folgenden Glieder die Beschaffenheit des Größten und des Kleinsten an. Da wir aber angenommen haben, daß die Reihe

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

eine convergirende Reihe sey, wenn man ω sehr klein annimmt: so gehören alle die Fälle nicht für die erklärte allgemeine Methode, wo diese Reihe divergirend wird, und dies ist sie bey $y = x^{\frac{2}{3}}$, wenn man $x = 0$ annimmt. In diesen Fällen muß man daher zu der vorhin gebrauchten Reduction seine Zuflucht nehmen, und die gegebene Formel auf eine andere Form bringen, die von der erwähnten Unbequemlichkeit frey ist. Es ereignet sich dieses aber nur in sehr wenigen Fällen, die entweder in der Form $y^{\frac{2\mu}{2\nu - 1}}$ enthalten sind, oder leicht darauf zurück geführt werden. Sollen z. B. die größten oder kleinsten Werthe der Formel $y^{\frac{2\mu}{2\nu - 1}} z$ gefunden werden, wenn z irgend eine Funktion von x ist: so untersuche man die Form $y^{2\mu} z^{2\nu - 1}$, weil diese in eben den Fällen ein Größtes oder ein Kleinstes ist, in welchen die gegebene Formel solches wird.

§. 271.

Außer diesem übrigens leicht zu behandelnden Falle lassen sich die Funktionen, welche irrationale Größen enthalten, auf eben die Art, wie die rationalen Funktionen behandeln, wenn ihre größten oder kleinsten Werthe gefunden werden sollen. Dies wollen wir nun an einigen Beyspielen zeigen.

Erstes Exempel.

Es ist die Formel $\sqrt{(aa + xx)} - x$ gegeben; man soll die Fälle finden, in welchen sie ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man $y = \sqrt{(aa + xx)} - x$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(aa + xx)}} - 1, \text{ und } \frac{ddy}{dx^2} = \frac{aa}{(aa + xx)^{\frac{3}{2}}}$$

Nimmt man daher $\frac{dy}{dx} = 0$, so wird $x = \sqrt{(aa + xx)}$ und also $x = \infty$ und dabey $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Auf ähnliche Art werden auch die folgenden Glieder $\frac{d^3 y}{dx^3}$; $\frac{d^4 y}{dx^4}$; rc. insgesammt $= 0$, und es bleibt daher ungewiß, ob jener Werth ein Größtes oder ein Kleinstes sey? Der Grund hiervon liegt darin, weil x eben sowohl $= -\infty$ als $= +\infty$. Setzt man indeß $x = +\infty$, so wird, weil $\sqrt{(aa + xx)} = x + \frac{aa}{2x}$ ist, $y = 0$, und dieser Werth ist unter allen der kleinste.

Zwey-

Zweytes Exempel.

Man soll die Fälle finden, in welchen die Formel

$$\sqrt{(aa + 2bx + mxx)} - nx$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Setzt man $y = \sqrt{(aa + 2bx + mxx)} - nx$; so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + mx}{\sqrt{(aa + 2bx + mxx)}} - n$$

und setzt man nun $\frac{dy}{dx} = 0$, so bekommt man

$$bb + 2mbx + mmxx = nnaa + 2nnbx + mnnxx$$

oder

$$xx = \frac{2bx(nn - m) + nnaa - bb}{mm - mnn}$$

und folglich

$$x = \frac{(nn - m)b \pm \sqrt{[mnn(m - nn)aa - nn(m - nn)bb]}}{m(m - nn)}$$

oder

$$x = -\frac{b}{m} \pm \frac{n}{m}\sqrt{\frac{maa - bb}{m - nn}}$$

und hierdurch wird

$$\sqrt{(aa + 2bx + mxx)} = \frac{b + mx}{n} = \pm\sqrt{\frac{maa - bb}{m - nn}},$$

Da also

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{maa - bb}{(aa + 2bx + mxx)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, so wird

$$\frac{ddy}{dx} = \frac{maa - bb}{\pm\left(\frac{maa - bb}{m - nn}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm(m - nn)\sqrt{(m - nn)}}{\sqrt{(maa - bb)}}$$

Wofern also nicht $\frac{m - nn}{maa - bb}$ positiv ist, so giebt es gar

 kein

kein Größtes oder Kleinstes; ist aber diese Größe eine positive, so giebt das obere Zeichen ein Kleinstes, wenn $m > nn$, und ein Größtes, wenn $m < nn$ ist; das Gegentheil findet statt, wenn das untere Zeichen genommen wird. Ist daher $m = 2$, $n = 1$ und $b = 0$, so wird die Formel $\sqrt{(aa + 2xx)} - x$ ein Kleinstes, wenn man $x = + \frac{1}{2}\sqrt{2aa} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und ein Größtes, wenn man $x = - \frac{a}{\sqrt{2}}$ setzt. Jenes ist $= a\sqrt{2} - \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, und dieses $= a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{3a}{\sqrt{2}}$.

Drittes Exempel.

Man soll die Fälle finden, in welchen die Formel

$$\sqrt[4]{(1 + mx^4)} + \sqrt[4]{(1 - nx^4)}$$

ein Größtes oder ein Kleinstes wird.

Da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^3}{(1 + mx^4)^{\frac{3}{4}}} - \frac{nx^3}{(1 - nx^4)^{\frac{3}{4}}}$$

ist, so wird

$$mx^3(1 - nx^4)^{\frac{3}{4}} = nx^3(1 + mx^4)^{\frac{3}{4}}$$

und also

$$m^4(1 - nx^4)^3 = n^4(1 + mx^4)^3$$

oder

$$n^4 - m^4 + 3mn(n^3 + m^3)x^4 + 3m^2n^2(n^2 - m^2)x^8 + m^3n^3(n + m)x^{12} = 0.$$

Wenn also diese Gleichung keine positive Wurzel für x^4 hat, so giebt es gar kein Größtes oder Kleinstes. Da sich diese Gleichung nicht bequem auflösen läßt, indem

$x^4 =$

$$x^4 = \frac{m^{\frac{4}{3}} - n^{\frac{4}{3}}}{mn(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n})} \text{ oder } x^4 = \frac{m - \sqrt[3]{m^2n} + \sqrt[3]{mn^2} - n}{mn}$$

wird, so wollen wir um einen speciellen Fall zu nehmen, $m = 8n$ setzen. Dann wird

$$-4095 + 24.513nx^4 - 3.63.64n^2x^8 + 9.512n^3x^{12} = 0$$

oder

$$512n^3x^{12} - 1344n^2x^8 + 1368nx^4 - 455 = 0.$$

Man setze $8nx^4 = z$, so ist

$$z^3 - 21z^2 + 171z - 455 = 0$$

und diese Gleichung hat den Faktor $z - 5$, und der andere, welchen man durch die Division mit diesem erhält, ist $zz - 16z + 91 = 0$ und enthält lauter imaginäre Wurzeln. Es ist also bloß $z = 8nx^4 - 5$, und also $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$, durch welchen Werth der Ausdruck $\sqrt[4]{(1 + 8nx^4)} + \sqrt{(1 - nx^4)}$ entweder ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Um zu wissen, welches von beyden statt finden werde, suche man

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{3mxx}{(1 + mx^4)^{\frac{7}{4}}} - \frac{3nxx}{(1 - nx^4)^{\frac{7}{4}}}$$

Da aber $m = 8n$ ist, so wird, wenn man $x^4 = \frac{5}{8n}$ setzt,

$$\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{24n}{6^{\frac{7}{4}}} - \frac{3n}{(\frac{3}{8})^{\frac{7}{4}}}\right)xx = -\frac{360nxx}{6^{\frac{7}{4}}}$$

folglich eine negative Größe, und daher $\sqrt[4]{(1 + 8nx^4)} + \sqrt[4]{(1 - nx^4)}$ ein Größtes, wenn man $x = \sqrt[4]{\frac{5}{8n}}$ setzt.

Es ist aber dieses Größte $= \sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \frac{3\sqrt[4]{6}}{2}$. Setzt man statt nx^4 die Größe u, so erhellet, daß der Ausdruck $\sqrt[4]{(1 + 8u)} + \sqrt[4]{(1 - u)}$ ein Größtes wird, wenn man $u = \frac{5}{8}$ setzt, und dieses Größte ist $= \frac{3\sqrt[4]{6}}{2} = 2,347627$ Man mag also für u außer $\frac{5}{8}$ einen Werth annehmen, welchen man will, so wird dadurch allemal der Ausdruck $\sqrt[4]{(1 + 8u)} + \sqrt[4]{(1 - u)}$ einen kleinern Werth bekommen.

§. 272.

Auf ähnliche Art lassen sich die größten und kleinsten Werthe bestimmen, wenn transcendente Größen in den gegebenen Ausdrücken vorkommen. Denn ist die Funktion keine vielförmige, so zeigen die Wurzeln der Differenzialgleichung größte oder kleinste Werthe an, außer wenn sie gleiche Wurzeln in gerader Anzahl hat. Dieses soll an einigen Beyspielen gezeigt werden.

Erstes Exempel.

Die Zahl zu finden, welche zu ihrem Logarithmen das kleinste Verhältniß hat.

Daß es ein solches kleinstes Verhältniß $\frac{x}{lx}$ gebe, erhellet daher, weil dies Verhältniß sowohl bey $x = 1$ als bey $x = \infty$ unendlich wird. Es wird daher auch der Bruch $\frac{lx}{x}$ irgend einmal einen größten Werth haben, und zwar

in

in eben dem Falle, in dem $\frac{x}{lx}$ einen kleinsten Werth hat.

Um diesen Fall zu finden setze man $y = \frac{lx}{x}$, so wird $\frac{dy}{dx}$ $= \frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx}$. Setzt man diesen Werth $= 0$, so wird $lx = 1$, und da wir hier hyperbolische Logarithmen angenommen haben, so ist $x = e$, wenn man die Zahl, deren hyperbolische Logarithmen $= 1$ ist, $= e$ setzt. Nun haben alle Logarithmen zu den hyperbolischen ein gegebenes Verhältniß, und es ist folglich in jedem logarithmischen Systeme $\frac{e}{le}$ ein Kleinstes, so wie $\frac{le}{e}$ ein Größtes. Da also im Briggischen Systeme $le = 0{,}4342944819$ ist, so ist der Bruch $\frac{lx}{x}$ allemal kleiner als $\frac{4342944819}{27182818284}$, oder näherungsweise $\frac{47}{305}$, und es giebt keine Zahl, welche zu ihrem Logarithmen ein kleineres Verhältniß habe als 305:47. Daß aber $\frac{lx}{x}$ in diesem Falle ein Größtes sey, erhellet daraus, weil $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2(1 - lx)}{x^3} = -\frac{1}{x^3}$, und also negativ wird, indem $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - lx}{xx}$ und $1 - lx = 0$ ist.

Zweytes Exempel.

Eine Zahl x zu finden, wobey die Potestät $x^{1:x}$ ein Größtes ist.

Daß dieser Ausdruck einen größten Werth habe, erhellet daher, weil man bey der Substitution der Zahlen für x findet,

$$1^{1:1} = 1,000000$$
$$2^{1:2} = 1,414213$$
$$3^{1:3} = 1,442250$$
$$4^{1:4} = 1,414213.$$

Man setze daher $x^{1:x} = y$, so wird $\frac{dy}{dx} = x^{1:x}(\frac{1}{xx} - \frac{lx}{xx})$ und, wenn man dieses $= 0$ macht, $lx = 1$, und $x = e$, vorausgesetzt, daß $e = 2,718281828$ sey. Da also $\frac{dy}{dx} = (1 - lx)\frac{x^{1:x}}{xx}$ ist, so wird $\frac{ddy}{dx^2} = -\frac{x^{1:x}}{x^3} + (1 - lx)d.\frac{x^{1:x}}{xx} = -\frac{x^{1:x}}{x^3}$, weil $1 - lx = 0$ ist. Folglich ist $\frac{ddy}{dx^2}$ eine negative Größe und $x^{1:x}$ ein Größtes, wenn $x = e$ genommen wird. Da nun $e = 2,718281828$, so hat man

$$e^{\frac{1}{e}} = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{6e^3} + \frac{1}{24e^4} + \text{etc.}$$
$$= 1,444667861009764.$$

Dieses Exempel läßt sich durch das vorhergehende auflösen, weil, wenn $x^{1:x}$ ein Größtes ist, auch der Logarithme davon $\frac{lx}{x}$ ein Größtes seyn muß, und soll dies statt finden, so muß, wie wir gesehen haben, $x = e$ seyn.

Drittes Exempel.

Einen Bogen x zu finden, dessen Sinus entweder ein Größtes oder ein Kleinstes sey.

Setzt man $x = y$, so wird $\frac{dy}{dx} = \cos. x$ und also $\cos. x = 0$. Hierdurch bekommt man für x die Werthe: $\pm \frac{\pi}{2}$

$\pm$

$\pm \frac{3\pi}{2}$; $\pm \frac{5\pi}{2}$; rc. Ferner wird $\frac{ddy}{dx^2} = -\sin. x$ Da also die gefundenen Werthe, für x gesetzt, den Sinus von x entweder $= + 1$ oder $- 1$ geben, so sind jene Sinus Größte und diese Kleinste Werthe, wie bekannt ist.

Viertes Exempel.

Einen Bogen x zu finden, wobey das Rechteck zwischen x und sin. x ein Größtes werde.

Daß es hier ein Größtes gebe erhellet daraus, weil das verlangte Rechteck sowohl bey $x = 0$ als bey $x = 180^0$ verschwindet. Es sey also $y = x . \sin. x$; so ist $\frac{dy}{dx} = \sin. x + x \cos. x$, und daher $\text{tang.} x = - x$. Es sey $x = 90^0 + u$ so wird $\text{tang.} x = - \cot. u$, und also $\cot. u = 90 + u$. Um diese Gleichung nach der oben erklärten Methode zu behandeln, setze man $z = 90 + u - \cot. u$, und dabey sey f der gesuchte Werth des Bogens. Da $dz = du + \frac{du}{\sin. u^2}$ ist, so wird

$$p = \frac{du}{dz} = \frac{\sin. u^2}{1 + \sin. u^2}; \quad dp = \frac{2 du \sin. u \cos. u}{(1 + \sin. u^2)^2}$$

und folglich

$$\frac{dp}{dz} = q = \frac{2 \sin. u^3 . \cos. u}{(1 + \sin. u^2)^3}$$

$$dq = \frac{6 du \sin. u^2 \cos. u^2 - 12 du . \sin. u^4}{(1 + \sin. u^2)^3}$$

also

$$\frac{dq}{dz} = r = \frac{6 \sin. u^4 . \cos. u^2 - 2 \sin. u^6}{(1 + \sin. u^2)^4} - \frac{12 \sin. u^6 . \cos. u^2}{(1 + \sin. u^2)^5}$$

$$= \frac{6 \sin. u^4 - 14 \sin. u^6 + 4 \sin. u^8}{(1 + \sin. u^2)^3}$$

Hier-

Hieraus ergiebt sich $f = u - pz + \frac{1}{2}qzz - \frac{1}{6}rz^3 +$ ꝛc. Man setze, nachdem man durch einige Versuche den nächsten Werth von f entdeckt hat, $u = 26^\circ, 15'$, so wird $90 + u = 116^\circ, 15'$, und der Bogen, der zu der Cotangente u gehört, läßt sich auf folgende Art bestimmen.

$$\text{Von } l\cot.u = 10{,}3070250$$

$$\text{ziehe man ab } \underline{\quad 4{,}6855749}$$

$$5{,}6214501$$

$$\text{so ist } \cot.u = 418263{,}7''$$

$$\text{oder } \cot u = 116^\circ, 11', 3\tfrac{7}{10}''$$

$$\text{also } z = 3', 56\tfrac{3}{10}'' = 236{,}3''$$

Um den Werth von pz zu finden nehme man

$$l\sin.u = \underline{9{,}6457058}$$

$$l\sin.u^2 = \underline{9{,}2914116}$$

$$1 + \sin.u^2 = \underline{1{,}19561}$$

$$l(1 + \sin.u^2) = \underline{0{,}0775895}$$

$$lp = 9{,}2138221$$

$$lz = \underline{2{,}3734637}$$

$$lpz = 1{,}5872858$$

$$\text{Also } pz = 38{,}6221 \text{ Secunden}$$

$$\text{oder } pz = 38'', 39''', 43''''$$

$$\text{abgezogen von } u = \underline{26^\circ, 15'}$$

$$\text{so wird } f = 26^\circ, 14', 21'', 20''', 17''''$$

und der gesuchte Bogen $x = 116^\circ, 14', 21'', 20''', 17''''$, doch muß noch das dritte Glied $\frac{1}{2}qzz = \frac{\sin.u^3 \cos.u}{(1 + \sin.u^2)^3} zz$ hinzukommen.

Um

Um dieses zu finden, muß man ein z in Theilen des Halbmessers ausdrucken, auf folgende Art.

$$
\begin{array}{rl}
1z'' = & 2,3734637 \\
\text{addirt} & 4,6855749 \\
\hline
 & 7,0590386 \\
\text{addirt } 1\frac{\sin.u^2}{1 + \sin.u^2}z = & 1,5872858 \\
\hline
 & 8,6463244 \\
\text{addirt } 1\sin.u = & 9,6457058 \\
1\cos.u = & 9,9527308 \\
\hline
 & 8,2447600 \\
\text{subtr. } 1(1 + \sin.u^2)^2 = & 0,1551790 \\
\hline
1\tfrac{1}{2}qzz = & 8,0895810 \\
\text{Also } \tfrac{1}{2}qzz = & 0,012291 \\
\text{oder } \tfrac{1}{2}qzz = & 44'''', 15'''''.
\end{array}
$$

Setzt man nun dieses hinzu, so wird der gesuchte Bogen

$$x = 116^0, 14', 21'', 21''', 0''''$$

und wenn man größere Logarithmen braucht, so findet man

$$x = 116^0, 14', 21'', 20''', 35'''', 47'''''.$$

Eilftes