Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Neuntes Capitel. Vom Nutzen der Differenzial-Rechnung bey der Auflösung der Gleichungen.

Neuntes Capitel.

Vom Nutzen der Differenzial-Rechnung bey der Auflösung der Gleichungen.

§. 227.

Es ist bereits hinlänglich gezeigt worden, daß man jede Gleichung auf die Form der Funktionen zurückführen kann. Denn bedeutet y jede Funktion von x, so sind in dem Ausdrucke $y = 0$ alle nur mögliche endliche Gleichungen, die algebraischen und die transcendenten enthalten. Man versteht aber unter der Auflösung einer Gleichung $y = 0$, die Bestimmung desjenigen Werthes von x, der, in die Funktion y gesetzt, dieselbe $= 0$ macht. Meistens giebt es mehr als einen Werth für x, und man nennt sie die Wurzeln der Gleichung $y = 0$. Lassen wir daher f, g, h, i, rc. die Wurzeln der Gleichung $y = 0$ seyn: so ist die Funktion von der Art, daß sie $= 0$ wird, wenn man darin f oder g oder h rc. für x setzt.

§. 228.

Da also die Funktion y verschwindet, wenn man für x darin f oder $x + (f - x)$ setzt, indem f eine Wurzel der Gleichung $y = 0$ ist: so wird nach dem, was wir oben von den Funktionen gehabt haben,

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \text{rc.}$$

Aus dieser Gleichung wird der Werth der Wurzel f auf die Art bestimmt, daß man für x setzen kann was man will, und dabey gleichwohl allemal durch die Substitution der Werthe, welche y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{2dx^2}$, ꝛc. bekommen, eine Gleichung erhält, welche den wahren Werth von f giebt. Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir

$$y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

setzen. Alsdann ist

$$\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3;\ \frac{ddy}{2dx^2} = 3x - 2;\ \text{und}\ \frac{d^3y}{6dx^3} = 1.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so wird

$$0 = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + (f - x)(3xx - 4x + 3)$$
$$+ (f - x)^2(3x - 2) + (f - x)^3$$

oder, wenn man wirklich multiplicirt,

$$f^3 - 2ff + 3f - 4 = 0.$$

Man findet nemlich eine der gegebenen ähnliche Gleichung, die daher auch eben dieselben Wurzeln enthält.

§. 229.

Ob man indeß gleich auf diesem Wege zu keiner neuen Gleichung gelangt, aus welcher man den Werth der Wurzel f leichter finden könnte: so lassen sich dennoch daraus sehr wichtige Hülfsmittel zur Erfindung der Wurzeln herleiten. Nimmt man nemlich für x einen Werth an, welcher irgend einer Wurzel der Gleichung sehr nahe kommt, so daß die Größe $f - x$ eine sehr kleine Größe ist: so convergiren die Glieder der Gleichung

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3d^3y}{6dx^3} + ꝛc.$$

auf sehr merkliche Art, und man entfernt sich daher eben nicht beträchtlich von der Wahrheit, wenn man bloß die beyden

den ersten Glieder behält, und die übrigen insgesammt wegläßt. Hat man also für x einen Werthe gesetzt, der irgend einer Wurzel der Gleichung $y = 0$ beynahe gleich ist, so ist näherungsweise

$$0 = y + \frac{(f-x)\,dy}{dx}, \text{ oder } f = x - \frac{y\,dx}{dy}$$

und aus dieser Formel findet man, freylich nicht den wahren aber doch, einen dem wahren sehr nahe kommenden Werth von f. Setzt man nun diesen von neuem für x, so bekommt man dadurch den Werth von f noch genauer, und so kann man sich demselben immer mehr nähern.

§. 230.

Hiernach lassen sich zuvörderst die Wurzeln aller Dignitäten aus jeder gegebenen Zahl finden. Es sey z. B. die Zahl $a^n + b$ gegeben, damit daraus die nte Wurzel gezogen werde. Man setze

$$x^n = a^n + b; \text{ oder } x^n - a^n - b = 0$$

daß

$$y = x^n - a^n - b$$

sey. Alsdann ist

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}; \quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3} \text{ 2c.}$$

Setzt man daher die gesuchte Wurzel $= f$, oder $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ so ist

$$0 = x^n - a^n - b + n(f-x)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(f-x)^2x^{n-2}$$

$$+ \text{ 2c.}$$

Nimmt man also für x eine Zahl, die von der gesuchten Wurzel nicht sehr abweicht, und dies thut man, wenn man

$x = a$ macht, vorausgesetzt, daß b so klein sey, daß $a^n + b < (a + 1)^n$ ist: so wird näherungsweise $b = na^{n-1}(f-a)$ und also

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}}$$

wodurch man den Werth der Wurzel schon viel genauer kennen lernt. Nimmt man aber noch das dritte Glied dazu, oder setzt man

$$b = na^{n-1}(f-a) + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}(f-a)^2$$

so wird

$$(f-a)^2 = -\frac{2a}{n-1}(f-a) + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}$$

und folglich

$$f = a - \frac{a}{n-1} \pm \sqrt{\left(\frac{aa}{(n-1)^2} + \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}\right)}$$

oder

$$f = \frac{(n-2)a + \sqrt{(aa + 2(n-1)b : na^{n-2})}}{n-1}$$

Vermittelst der Extraction der Quadratwurzel findet man daher den Werth der Wurzel f noch genauer.

Exempel.

Die Quadratwurzel aus irgend einer Zahl c zu finden; oder es sey $xx - c = y$.

Man setze die Zahl, welche der Wurzel am nächsten kommt $= a$, und $b = c - aa$. Da $aa + b = c$ und $n = 2$ ist, so giebt die erste Formel

$$f = a + \frac{c - aa}{2a} = \frac{c + aa}{2a}; \text{ und die andere } f = \sqrt{c}.$$

Da also die Wurzel zunächst $= \dfrac{c + aa}{2a}$ ist, so setze man diesen Werth für a, wodurch man den genauern Ausdruck

f =

$$f = \frac{cc + 6aac + a^4}{4a(c + aa)}$$

erhält. Es sey z. B. $c = 5$; so hat man aus der ersten Formel

$$f = \frac{5}{2a} + \frac{a}{2}.$$

Man setze also $a = 2$, so wird $f = 2,25$; ferner $a = 2,25$, so bekommt man $f = 2,236111$; endlich $a = 2,236111$, so wird $f = 2,2360679$, welcher Werth der wahren Wurzel aus 5 schon sehr nahe kommt.

§. 231.

Auf ähnliche Art läßt sich aber auch die Wurzel einer jeden Gleichung vermittelst der Gleichung $f = x - \frac{y\,dx}{dy}$ näherungsweise finden, wenn man nemlich für x einen Werth angenommen hat, der von einer Wurzel der Gleichung nicht viel unterschieden ist. Um einen solchen Werth für x zu erhalten, setze man dafür nach und nach verschiedene Werthe, und wähle dann denjenigen, welche den kleinsten Werth der Funktion y, d. h. denjenigen giebt, der o am nächsten kommt. Ist z. B.

$$y = x^3 - 2xx + 3x - 4$$

so wird	wenn man setzt
$y = -4$	$x = 0$
$y = -2$	$x = 1$
$y = +2$	$x = 2$

und hieraus erhellet, daß die Wurzel zwischen 1 und 2 falle. Da also $\frac{dy}{dx} = 3xx - 4x + 3$ ist, so hat man zur Erfindung der Wurzel f aus $x^3 - 2xx + 3x - 4 = 0$, die Gleichung:

f =

$$f = x - \frac{ydx}{dy} = x - \frac{(x^3 - 2xx + 3x - 4)}{3xx - 4x + 3}$$

Es sey also $x = 1$; so wird $f = 1 + \frac{2}{2} = 2$. Nun setze man $x = 2$, so wird $f = 2 - \frac{2}{7} = \frac{12}{7}$. Es sey $x = \frac{12}{7}$ so wird $f = \frac{12}{7} - \frac{104}{1701} = \frac{2812}{1701} = 1{,}653$. Will man weiter gehen, so ist es bequemer die Logarithmen zu gebrauchen.

Man setze also $x = 1{,}653$, so wird

$lx = 0{,}2182729$	$x = 1{,}653000$
$lx^2 = 0{,}4365458$	$x^2 = 2{,}732409$
$lx^3 = 0{,}6548187$	$x^3 = 4{,}516673$

$x^3 = 4{,}516673$
$3x = 4{,}959000$

$x^3 + 3x = 9{,}475673$	$3xx + 3 = 11{,}197227$
$2xx + 4 = 9{,}464818$	$4x = 6{,}612000$
Zähler $= 0{,}010855$	Nenner $= 4{,}585227$
l d. Z. $= 8{,}0356298$	
l d. N. $= 0{,}6613608$	$x = 1{,}653000$
l d. B. $= 7{,}3742690$	Bruch $= 0{,}002367$
	$f = 1{,}650633$

und dieser Werth kommt der Wahrheit sehr nahe.

§. 232.

Noch schnellere Näherungen lassen sich aus dem allgemeinen Ausdrucke herleiten. Denn da wir, wenn eine Funktion $y = 0$ gesetzt, und die Wurzel dieser Gleichung $x = f$ angenommen wird,

$0 =$

$$0 = y + \frac{(f-x)dy}{dx} + \frac{(f-x)^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(f-x)^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

gefunden haben: so sey $f - x = z$, folglich die Wurzel $f = x + z$. Ferner setze man

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{dq}{dx} = r; \quad \frac{dr}{dx} = s;$$

so wird

$$0 = y + zp + \frac{z^2q}{2} + \frac{z^3r}{6} + \frac{z^4s}{24} + \frac{z^5t}{120} + \text{ꝛc.}$$

Hat man in dieser Gleichung für x irgend einen Werth, durch welchen denn auch $y, p, q, r, s,$ ꝛc. bestimmt werden, angenommen, so muß man die Größe z suchen; und hat man dieselbe gefunden, so ist die Wurzel der gegebenen Gleichung $y = 0$ oder $f = x + z$. Es kommt also darauf an, aus dieser Gleichung den Werth der unbekannten Größe z auf die bequemste Art zu erhalten.

§. 233.

Man setze z folgender convergirenden Reihe gleich

$$z = A + B + C + D + E + \text{ꝛc.}$$

so wird, wenn man substituirt,

$$\begin{array}{llllll}
y & = y & & & & \\
pz & = Ap + Bp & + Cp & + Dp & + Ep & + \text{ꝛc.} \\
\frac{1}{2}qz^2 & = & \frac{1}{2}A^2q + ABq & + ACq & + ADq & + \text{ꝛc.} \\
 & & & + \frac{1}{2}BBq & + BCq & + \text{ꝛc.} \\
\frac{1}{6}rz^3 & = & & \frac{1}{6}A^3r & + \frac{1}{2}A^2Br & + \frac{1}{2}A^2Cr + \text{ꝛc.} \\
 & & & & & + \frac{1}{2}AB^2r + \text{ꝛc.} \\
\frac{1}{24}sz^4 & = & & & \frac{1}{24}A^4s & + \frac{1}{6}A^3Bs + \text{ꝛc.} \\
\frac{1}{120}tz^5 & = & & & & \frac{1}{120}A^5t + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen:

A =

$$A = -\frac{y}{p}$$

$$B = -\frac{yyq}{2p^3}$$

$$C = -\frac{y^3qq}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4}$$

$$D = -\frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6} - \frac{y^4s}{24p^5}$$

rc.

Folglich wird

$$z = -\frac{y}{p} - \frac{y^2p}{2p^3} - \frac{y^3q^2}{2p^5} + \frac{y^3r}{6p^4} - \frac{5y^4q^3}{8p^7} + \frac{5y^4qr}{12p^6}$$

$$- \frac{y^4s}{24p^5} - \text{rc.}$$

Exempel.

Es sey die Gleichung $x^5 + 2x - 2 = 0$ gegeben.

Es ist $y = x^5 + 2x - 2$

$$\frac{dy}{dx} = p = 5x^4 + 2$$

$$\frac{dp}{dx} = q = 20x^3$$

$$\frac{dq}{dx} = r = 60x^2$$

$$\frac{dr}{dx} = s = 120x$$

rc.

Nun setze man $x = 1$, weil dieser Werth von der wahren Wurzel nur wenig abweicht, so wird

$y = 1$; $p = 7$; $q = 20$; $r = 60$; $s = 120$

und folglich

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{200}{7^5} + \frac{10}{7^4} - \frac{5.1000}{7^7} + \frac{500}{7^6} - \frac{5}{7^5}$$

oder

$$z = -\frac{1}{7} - \frac{10}{7^3} - \frac{130}{7^5} - \frac{1745}{7^7} \text{ ꝛc.} = -0{,}18; \text{ also}$$

$$f = 0{,}82.$$

Wenn man diesen Werth von neuem für x setzte, so würde man die Wurzel in einem hohen Grade genau erhalten.

§. 234.

Wir haben also eine ohne Ende fortlaufende Reihe für die Wurzel einer jeden Gleichung gefunden; allein sie hat den doppelten Fehler, daß theils das Fortschreitungs-Gesetz derselben nicht einleuchtend, theils sie selbst zu zusammengesetzt und beym Gebrauche zu schwer ist. Wir wollen also dieselbe Untersuchung auf einem andern Wege anstellen, und einer Reihe nachforschen, welche die Wurzel jeder gegebenen Gleichung auf eine regulärere Art ausdrucke.

Es sey also wie vorhin die Gleichung $y = 0$ gegeben, so daß y jede Funktion von x bedeute: so kommt alles darauf an x so zu bestimmen, daß die Funktion $y = 0$ werde, wenn man darin den gefundenen Werth für x setzt. Da aber y eine Funktion von x ist, so ist auch umgekehrt x eine Funktion von y; und geht man von diesem Gesichtspunkte aus, so hat man den Werth der Funktion x zu suchen, den sie bekommt, wenn die Größe y verschwindet. Wenn man also f den Werth von x bedeuten läßt, wobey dieses geschiehet, und dies ist allemal eine Wurzel der Gleichung $y = 0$: so wird, weil x bey $y = 0$ in f übergehet, nach dem oben Bewiesenen

$$f = x - \frac{y\,dx}{dy} + \frac{y^2 ddx}{2dy^2} - \frac{y^3 d^3x}{6dy^3} + \frac{y^4 d^4x}{24dy^4} - \text{ꝛc.}$$

und

und in dieser Gleichung wird dy als beständig betrachtet. Setzt man daher

$$\frac{dx}{dy} = p; \quad \frac{dp}{dy} = q; \quad \frac{dq}{dy} = r; \quad \frac{dr}{dy} = s; \text{ ꝛc.}$$

und braucht diese Werthe, um die Rücksicht auf ein beständiges Differenzial wegzubringen, so wird

$$f = x - p + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \frac{1}{120}ty^5 + \text{ꝛc.}$$

§. 235.

Hat man also für x irgend einen Werth angenommen, so werden dadurch zugleich die Werthe von y und der Größen p, q, r, s, ꝛc. bestimmt; und hat man dieselben gefunden, so ist man im Besitze einer ohne Ende forlaufenden und den Werth der Wurzel f ausdrückenden Reihe. Hat aber die Gleichung $y = 0$ mehrere Wurzeln, so findet man dieselben wenn man für x verschiedene Werthe nimmt. Denn da y einen und denselben Werth haben kann, wenn gleich für x verschiedene Werthe angenommen werden: so ist es nichts besonderes, daß eine und dieselbe Reihe mehrere Werthe geben könne. Um aber die Zweydeutigkeit in diesen Fällen aus dem Wege zu räumen, und zugleich die Reihe convergirend zu machen, muß man für x einen Werth setzen, welcher dem gesuchten nahe kommt. Denn alsdann wird der Werth von y sehr klein, und die Glieder der Reihe nehmen beträchtlich ab, so daß man schon in wenigen Gliedern den Werth für f genau genug haben kann. Setzt man darauf diesen Werth für x, so wird die Größe y noch kleiner, und die Reihe convergirt noch stärker, und auf diese Art findet man die Wurzel f bald so genau, daß der bleibende Fehler nicht in Anschlag kommt. Hieraus fällt der große Vorzug der

gegen=

gegenwärtigen Formel vor der vorhergehenden deutlich in die Augen.

§. 236.

Wir wollen annehmen, daß die nte Wurzel aus irgend einer Zahl N zu ziehen sey. Sucht man also die der N am nächsten kommende nte Potestät, so erhält man ohne Mühe $N = a^n + b$, und es ist alsdann

$$x^n = a^n + b; \text{ und } y = x^n - a^n - b$$

folglich

$$dy = nx^{n-1}dx; \quad \text{und } \frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

$$dp = -\frac{(n-1)dx}{nx^2}; \quad \text{und } \frac{dp}{dy} = q = -\frac{n-1}{nnx^{2n-1}}$$

$$dq = \frac{(n-1)(2n-1)dx}{nnx^{2n}}; \text{ und } \frac{dq}{dy} = r = \frac{(n-1)(2n-1)}{n^3x^{3n-1}}$$

$$dr = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)dx}{n^3x^{3n}}; \text{ und}$$

$$\frac{dr}{dy} = s = -\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n^4x^{4n-1}}$$

rc.

Nun setze man $x = a$; so wird $y = -b$, und die gesuchte Wurzel $f = \sqrt[n]{(a^n + b)}$ auf folgende Art ausgedruckt:

$$f = a + \frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{n.2n.a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{n.2n.3n.a^{3n-1}}$$
$$- \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{n.2n.3n.4n.a^{4n-1}} + \text{rc.}$$

Auf diese Art erhalten wir eben die Reihe, welche man durch die gemeine Entwickelung des Binomiums $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$ findet.

§. 237.

Hat man also durch die Extraction die Wurzel a, und zugleich den Rest b gefunden, so muß man zu der Wurzel noch den Werth des Bruchs $\frac{b}{na^{n-1}}$ addiren, um die Wurzel genauer zu bekommen. Es ist aber $a^{n-1} = \frac{N-b}{a}$, weil $N = a^n + b$ ist. Allein auf diese Art erhält man die Wurzel größer als sie seyn sollte, und muß daher das dritte Glied abziehen. Um also durch die Division des Restes b die Wurzel der wahren näher zu erhalten, muß man den dazu erforderlichen Divisor aufsuchen, und wir wollen ihn =

$$na^{n-1} + \alpha b + \beta bb + \gamma b^3 + \text{ꝛc.}$$

setzen. Da bey dieser Annahme

$$\frac{b}{na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \text{ꝛc.}} =$$

$$\frac{b}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)bb}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^3a^{3n-1}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^4a^{4n-1}} + \text{ꝛc.}$$

seyn muß, so wird, wenn man durch $na^{n-1} + \alpha b + \beta b^2 + \gamma b^3 + \text{ꝛc.}$ multiplicirt,

$$b = b$$

$$- \frac{(n-1)bb}{2na^n} + \frac{(n-1)(2n-1)b^3}{6n^2a^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{24n^3a^{3n}} + \text{ꝛc.}$$

$$+ \frac{\alpha b^2}{2a^{n-1}} - \frac{(n-1)\alpha b^3}{2n^2a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)\alpha b^4}{6n^3a^{3n-1}}$$

$$+ \frac{\beta b^3}{na^{n-1}} - \frac{(n-1)\beta b^4}{2n^2a^{2n-1}}$$

$$+ \frac{\gamma b^4}{na^{n-1}}$$

Hier-

Hieraus ergeben sich folgende Bestimmungen:

$$\alpha = \frac{n-1}{2a}$$

$$\beta = \frac{(n-1)\alpha}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6na^{n+1}} = -\frac{(n-1)(n+1)}{12na^{n+1}}$$

$$\gamma = \frac{(n-1)\beta}{2na^n} - \frac{(n-1)(2n-1)\alpha}{6n^2a^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{24n^3a^{2n+1}}$$

oder

$$\gamma = \frac{(n-1)(n+1)}{24na^{2n+1}}$$

Demnach ist der Bruch, welchen man zu der gefundenen Wurzel a noch hinzu addiren muß,

$$\frac{b}{na^{n-1} + \frac{(n-1)b}{2a} - \frac{(nn-1)bb}{12na^{n+1}} + \frac{(nn-1)b^3}{24na^{2n+1}}}$$

§. 238.

Wenn also die Quadratwurzel aus der Zahl N gezogen werden sollte, und die zunächst kleinere Wurzel a, und der Rest b bereits gefunden worden wäre: so müßte man zu a noch den Quotienten addiren, den man fände, wenn man den Rest b durch

$$2a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} - \text{ꝛc.}$$

dividirte. Sollte aber die Cubikwurzel gefunden werden, so müßte man den Rest b durch

$$3a^2 + \frac{b}{a} - \frac{2bb}{9a^4} + \frac{b^3}{9a^7} - \text{ꝛc.}$$

dividiren; und hiervon wollen wir nun einige Beyspiele hersetzen.

Erstes Exempel.

Man soll die Quadratwurzel aus der Zahl 200 finden.

Man setze $N = 200$, und da das nächste Quadrat 196 ist, so wird $a = 14$ und $b = 4$. Da man also diesen Rest durch $28 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{196} + \frac{1}{7 \cdot 196 \cdot 98}$ dividiren soll, so hat man zum Divisor 28,142135; und dividirt man 4 dadurch, so bekommt man einen zu 14 hinzuzufügenden Decimalbruch, der bis zur zehnten Ziffer und noch weiter richtig ist.

Zweytes Exempel.

Man soll die Cubikwurzel aus $N = 10$ finden.

Der nächste Cubus ist 8, und der Rest 2; also $a = 2$ und $b = 2$, und der Divisor $= 12 + 1 - \frac{1}{18} = 12{,}9444$. Demnach ist die gesuchte Cubikwurzel näherungsweise

$$= 2 + \frac{2}{12{,}9444} = 2 + \frac{10000}{64722}.$$

§. 239.

Die für die Wurzel gefundene Reihe kann auch als eine wiederkehrende aus einem Bruche entsprungene Reihe angesehen werden, indem dadurch die Glieder der Reihe auf weit weniger Glieder in dem Zähler und dem Nenner des gedachten Bruchs zurückgebracht werden. Bey einiger Aufmerksamkeit sieht man bald, daß beynahe sey

$$(a + b)^n = a^n \cdot \frac{a + \frac{(n+1)}{2}b}{a - \frac{(n-1)}{2}b}$$

und noch genauer

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{aa + \frac{(n+2)}{2}ab + \frac{(n+1)(n+2)}{12}bb}{aa - \frac{(n-2)}{2}ab + \frac{(n-1)(n-2)}{12}bb}$$

Auf ähnliche Art kann man durch Einführung mehrerer Glieder noch genauere Brüche bekommen, z. B.

$$(a+b)^n = a^n \times$$

$$\frac{a^3 + \frac{(n+3)}{2}a^2b + \frac{(n+3)(n+2)}{10}ab^2 + \frac{(n+3)(n+2)(n+1)b^3}{120}}{a^3 - \frac{(n-3)}{2}a^2b + \frac{(n-3)(n-2)}{10}ab^2 - \frac{(n-3)(n-2)(n-1)b^3}{120}}$$

Ja es läßt sich eine allgemeine Form geben, nach welcher man sich richten kann. Man setze nemlich

$$\begin{array}{l|l}
A = \frac{m(n+m)}{1.2m} & \mathfrak{A} = \frac{m(n-m)}{1.2m} \\
B = \frac{(m-1)(n+m-1)}{2(2m-1)}A & \mathfrak{B} = \frac{(m-1)(n-m+1)}{2(2m-1)}\mathfrak{A} \\
C = \frac{(m-2)(n+m-2)}{3(2m-2)}B & \mathfrak{C} = \frac{(m-2)(n-m+2)}{3(2m-2)}\mathfrak{B} \\
D = \frac{(m-3)(n+m-3)}{4(2m-3)}C & \mathfrak{D} = \frac{(m-3)(n-m+3)}{4(2m-3)}\mathfrak{C} \\
\text{ꝛc.} & \text{ꝛc.}
\end{array}$$

Hat man diese Werthe bestimmt, so ist

$$(a+b)^n = a^n \cdot \frac{a^m + Aa^{m-1}b + Ba^{m-2}b^2 + Ca^{m-3}b^3 + \text{ꝛc.}}{a^m - \mathfrak{A}a^{m-1}b + \mathfrak{B}a^{m-2}b^2 - \mathfrak{C}a^{m-3}b^3 + \text{ꝛc.}}$$

§. 240.

Wenn in diesen Formeln für n gebrochene Zahlen gesetzt werden, so bekommt man darin sehr bequeme Ausdrücke zur Extraction der Wurzeln. So kann man, wenn die nte Wurzel aus der Form $a^n + b$ gezogen werden soll, folgende Ausdrücke gebrauchen:

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \,.\, \frac{2na^n + (n+1)b}{2na^n + (n-1)b}$$

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \,.\, \frac{12n^2a^{2n} + 6n(2n+1)a^nb + (2n+1)(n+1)bb}{12n^2a^{2n} + 6n(2n-1)a^nb + (2n-1)(n-1)bb}$$

Wenn aber $a^n + b = N$ gesetzt wird, und also $a^n = N - b$ ist, so wird

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \,.\, \frac{2nN - (n-1)b}{2nN - (n+1)b}$$

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a \,.\, \frac{12n^2N^2 - 6n(2n-1)Nb + (2n-1)(n-1)bb}{12n^2N^2 - 6n(2n+1)Nb + (2n+1)(n+1)bb}$$

§. 241.

Die allgemeine Formel zur Erfindung der Wurzel einer jeden Gleichung leistet daher bey den Gleichungen, die aus mehrern Gliedern bestehen, eben den Nutzen, welchen die gewöhnliche Binomische Regel bey der Auflösung der reinen Gleichungen $x^n = 0$ gewährt, und geht in diesem Fall auch in diese Regel über. Wenn aber die Gleichung eine unreine oder selbst transcendente Gleichung ist, so leidet auch dadurch der Gebrauch unserer Formel nicht, und giebt dann für den Werth der Wurzel eine ohne Ende fortlaufende Reihe. Da dem so ist, so wollen wir diese Anwendung genauer kennen zu lernen suchen. Es sey also folgende unreine aus drey Gliedern bestehende Gleichung gegeben:

$$x^n + cx = N$$

so daß c und N bekannte Größen bedeuten. Man setze $x^n + cx - N = y$, so wird $dy = (nx^{n-1} + c)dx$, und also $p = \frac{1}{nx^{n-1} + c}$. Ferner ist nunmehr

dp =

$$dp = -\frac{n(n-1)x^{n-2}dx}{(nx^{n-1}+c)^2}\text{; und } q = -\frac{n(n-1)x^{n-2}}{(nx^{n-1}-c)^3}$$

Auf ähnliche Art findet man, da $r = \frac{dq}{dy}$; $s = \frac{dr}{dy}$ ist,

$$r = \frac{n^2(n-1)(2n-1)x^{2n-4} - n(n-1)(n-2)cx^{n-3}}{(nx^{n-1}+c)^5}$$

$$s = \left.\begin{array}{l} -n^3(n-1)(2n-1)(3n-1)x^{3n-6} \\ +4n^2(n-1)(n-2)(2n-1)cx^{2n-5} \\ -n(n-1)(n-2)(n-3)c^2x^{n-4} \end{array}\right\} : (nx^{n-1}+c)^7$$

$$t = \left.\begin{array}{l} n^4(n-1)(2n-1)(3n-1)(4n-1)x^{4n-8} \\ -n^3(n-1)(n-2)(2n-1)(29n-11)cx^{3n-7} \\ +n^2(n-1)(n-2)(2n-1)(nn-29)c^2x^{2n-6} \\ -n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)c^3x^{n-5} \end{array}\right\} : (nx^{n-1}+c)^9$$

ꝛc.

Hat man diese Werthe gefunden, so ist die Wurzel der gegebenen Gleichung,

$$f = x - py + \tfrac{1}{2}qy^2 - \tfrac{1}{6}ry^3 + \tfrac{1}{24}sy^4 - \tfrac{1}{120}ty^5 + \text{ꝛc.}$$

Denn man mag für x setzen was man will, (wodurch zugleich die Buchstaben y, p, q, r, ꝛc. bestimmte Werthe bekommen) so ist die Summe der Reihe allemal dem Werthe Einer Wurzel gleich.

Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 + 2x = 2$ gegeben.

Hier ist $c = 2$, $N = 2$, $n = 3$, und $y = x^3 + 2x - 2$.

Man setze $x = 1$, so wird $y = 1$; $p = \frac{1}{5}$; $q = -\frac{6}{5^3}$; $r = \frac{84}{5^5}$; $s = -\frac{16.90}{5^7}$; ꝛc. und die Wurzel der Gleichung ist

$$f = 1 - \frac{1}{5} - \frac{3}{5^5} - \frac{14}{5^5} - \frac{60}{5^7} - \text{ꝛc.} = 0{,}770751.$$

 Nun

Nun setze man $x = 0,77$. Da $y = x^3 + 2x - 2$;

$p = \frac{1}{3xx + a}$; $q = -6p^3x$; $r = 9xxp^5 - 12p^5$, und

$s = -2160p^7x^3 + 720p^7x$ ist: so hat man, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$\begin{array}{l|l} lx = 9,8864907 & x = 0,77 \\ lx^2 = 9,7729814 & x^2 = 0,5929 \\ lx^3 = 9,6594721 & x^3 = 0,456533 \\ & 2x = 1,54 \\ \hline & x^3 + 2x = 1,996530 \end{array}$$

Folglich $y = -0,003467$

$$l-y = 7,5399538;\quad 3xx + 2 = 3,7787$$

$$lp = 9,4226575;\quad l(3xx+2) = 0,5773424$$

$$l-py = 6,9626113;\quad -py = 0,000917511$$

$$\begin{array}{l} lp^3 = 8,2679725 \\ lx = 9,8864907 \\ l3 = 0,4771213 \\ ly^2 = 5,0799076 \\ \hline \end{array}$$

$$l - \tfrac{1}{2}qyy = 3,7114922 \qquad -\tfrac{1}{2}qyy = 0,000000514$$

Hiernach ist die Wurzel $f = 0,0770916997$, und kaum in der letzten Ziffer der Wahrheit nicht gemäß.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^4 - 2xx + 4x = 8$ gegeben.

Man setze $y = x^4 - 2xx + 4x - 8$, so wird $dy = 4dx(x^3 - x + 1)$

$$p = \frac{1}{4(x^3 - x + 1)};\quad \frac{dp}{dx} = \frac{-3xx + 1}{4(x^3 - x + 1)^2}.\ \text{Folglich}$$

$$q = \frac{-3xx + 1}{16(x^3 - x + 1)^3};\quad \frac{dq}{dx} = \frac{21x^4 - 12xx - 3}{16(x^3 - x + 1)^4}\ \text{und}$$

$$r = \frac{21x^4 - 12xx - 3}{64(x^3 - x + 1)^5} \text{ ꝛc.}$$

Hierdurch bekömmt man für die Wurzel der Gleichung

$$f = x - \frac{y}{4(x^3 - x + 1)} - \frac{(3xx - 1)yy}{32(x^3 - x + 1)^3} - \frac{(7x^4 - 4xx + 1)y^3}{128(x^3 - x + 1)^5} - \text{ꝛc.}$$

Man muß also x einen solchen Werth zu geben suchen, daß die Reihe convergire. Nun fällt in die Augen, daß, wenn man x so bestimmen wollte, daß $x^3 - x + 1 = 0$ würde, dann alle Glieder dieser Reihe, das erste ausgenommen, eine unendliche Größe bekämen, und man also seinen Zweck verfehlte. Es wird daher nothwendig für x einen solchen Werth zu erwählen, daß y klein und $x^3 - x + 1$ nicht klein werde. Es sey $x = 1$, so ist $y = -5$, und

$$f = 1 + \frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64} - \text{ꝛc.}$$

Da die drey Glieder $\frac{5}{4} - \frac{25}{16} + \frac{125}{64}$ eine geometrische Reihe bilden, deren Summe $\frac{5}{9}$ ist, so ist ohngefähr $f = \frac{14}{9}$. Es sey also $x = \frac{3}{2}$, so ist $y = -\frac{23}{16}$, und $x^3 - x + 1 = \frac{23}{8}$; folglich

$$f = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64} + \frac{407}{256 . 529} - \text{ꝛc.} = 1{,}61$$

Nun setze man $x = 1{,}61$, so wird, wenn man zugleich $x^3 - x + 1 = z$ nimmt

$lx = 0{,}2068259$	$x = 1{,}61$
$lx^2 = 0{,}4136518$	$x^2 = 2{,}5921$
$lx^3 = 0{,}6204777$	$x^3 = 4{,}173281$
$lx^4 = 0{,}8273036$	$x^4 = 6{,}718983$

$l - y = 8{,}4016934$	folglich
$lz = 0{,}5518502$	$y = -0{,}025217$
$l\frac{-y}{z} = 7{,}8498432$	$z = 3{,}563281$
$l4 = 0{,}6020600$	$\frac{-y}{4z} = 0{,}0017692$
$l\frac{-y}{4z} = 7{,}2477832$	$3xx - 1 = 6{,}7763$
$l(3xx-1) = 0{,}8309926$	
$ly^2 = 6{,}8033868$	
$7{,}6343794$	
$lz^3 = 1{,}6555506$	
$5{,}9788288$	
$l32 = 1{,}2041200$	
$4{,}7747088$	$\frac{(3xx-1)y^2}{32z^4} = 0{,}0000005952$

Folglich

$$f = 1{,}6117632.$$

§. 242.

Diese Methode die Wurzeln der Gleichungen beynahe zu finden, erstreckt sich auch auf die transcendenten Größen. Wir wollen eine Zahl x suchen, deren aus irgend einem System genommener Logarithme zu der Zahl selbst ein bestimmtes Verhältniß habe. Man setze dieses Verhältniß $1 : n$, so hat man die Gleichung $x - nlx = 0$. Ferner sey k der Modulus jener Logarithmen, so daß man sie finde, wenn man die hyperbolischen Logarithmen durch k multiplicirt, wodurch $d \,.\, lx = \frac{k\,dx}{x}$ wird. Man setze demnach

$$x - nlx = y$$

und

und f sey der gesuchte Werth von x, wobey $x = n l x$ werde. Da also $y = x - n l x$ ist, so wird

$$dy = dx - \frac{kndx}{x} = \frac{dx(x-kn)}{x},$$

$$\text{und } \frac{dx}{dy} = p = \frac{x}{x-kn}; \text{ also } dp = -\frac{kndx}{(x-kn)^2}; \text{ folglich}$$

$$\frac{dp}{dy} = q = \frac{-knx}{(x-kn)^3}; \qquad dq = \frac{2knxdx + k^2n^2dx}{(x-kn)^4}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{knx(2x+kn)}{(x-kn)^3}; \text{ ꝛc.}$$

Demnach wird

$$f = x - \frac{xy}{x-kn} - \frac{knxyy}{2(x-kn)^3} - \frac{knxy^3(2x+kn)}{6(x-kn)^5} - \text{ꝛc.}$$

Wir werden aber unten sehen, daß diese Aufgabe keiner Auflösung fähig ist, wofern nicht $kn > e$ oder als die Zahl angenommen wird, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist, d. h. es muß $kn > 2{,}7182818$ seyn.

Exempel.

Man soll eine Zahl außer 10 suchen, deren gemeine Logarithme der zehnte Theil der Zahl selbst sey.

Da von den gemeinen Logarithmen die Rede ist, so ist $k = 0{,}43429448190325$; und da $n = 10$ ist, so hat man $nk = 4{,}3429448190325$. Setzt man nun $x = 1$ so wird $y = 1$ und

$$f = 1 + \frac{1}{3{,}3429} + \frac{2{,}1714724}{(3{,}3429)^3} - \text{ꝛc.}$$

folglich beynahe $f = 1{,}37$. Man setze also $x = 1{,}37$, so wird $lx = 0{,}136720567156406$, und da $y = x - 10lx$ ist, so wird $y = 0{,}0027943284350$, und

$-x + kn = 2{,}9729448190325$. Es werde also

$lx =$

$$\begin{array}{r} lx = 0{,}1367205 \\ ly = 7{,}4462773 \\ \hline 7{,}5829978 \\ l(kn - x) = 0{,}4731866 \\ \hline 1{,}1098122 \end{array} \quad \frac{-xy}{x - kn} = 0{,}00128769$$

Da ferner das dritte Glied

$$\frac{knxyy}{2(x - kn)^3} = \frac{kny}{2(x - kn)^2} \cdot \frac{xy}{x - k} \text{ ist,}$$

so wird

$$\begin{array}{r} l\frac{-xy}{x - kn} = 7{,}1098112 \\ ly = 7{,}4462773 \\ lkn = 0{,}6377842 \\ \hline 5{,}1938527 \\ l(kn - x)^2 = 0{,}9463732 \\ \hline 4{,}2474995 \\ l2 = 0{,}3010300 \\ \hline l\text{ d. 3. Gl.} = 3{,}9464695 \\ 1.\text{ Gl.}\, x = 1{,}37 \\ 2.\text{ Gl.} = 0{,}00128769 \\ 3.\text{ Gl.} = 0{,}00000088 \\ \hline f = 1{,}37128857 \\ lf = 0{,}137128857. \end{array}$$

§. 243.

Wenn die Gleichung eine Exponential-Gleichung ist, so kann man dieselbe auf eine logarithmische zurückbringen. Soll z. B. der Werth von x gesucht werden, wobey $x^x = a$ ist, so wird $xlx = la$. Setzt man daher

$y = xlx - la$, so wird $dy = dxlx + dx$

und $\frac{dx}{dy} = p = \frac{1}{1 + lx}$. Ferner ist nunmehr

dp =

$$dp = \frac{-dx}{x(1+lx)^2}; \text{ und } \frac{dp}{dy} = q = \frac{-1}{x(1+lx)^3}$$

$$dy = \frac{dx}{x^2(1+lx)^3} + \frac{3dx}{x^2(1+lx)^4}; \text{ und folglich}$$

$$\frac{dq}{dy} = r = \frac{1}{x^2(1+lx)^4} + \frac{3}{x^2(1+lx)^5}. \text{ Ferner ist}$$

$$dr = \frac{-2dx}{x^3(1+lx)^4} - \frac{10dx}{x^3(1+lx)^5} - \frac{15dx}{x^3(1+lx)^6}; \text{ also}$$

$$s = \frac{-2}{x^3(1+lx)^5} - \frac{10}{x^3(1+lx)^6} - \frac{15}{x^3(1+lx)^7}, \text{ und}$$

$$t = \frac{6}{x^4(1+lx)^6} + \frac{40}{x^4(1+lx)^7} + \frac{105}{x^4(1+lx)^8} + \frac{105}{x^4(1+lx)^9}$$

$$u = \frac{-24}{x^5(1+lx)^7} - \frac{196}{x^5(1+lx)^8} - \frac{700}{x^5(1+lx)^9} - \frac{1260}{x^5(1+lx)^{10}} - \frac{945}{x^5(1+lx)^{11}}$$

Wenn daher der wahre Werth von $x = f$, und also $f^f = a$ ist, so ist

$$f =$$

$$x - \frac{y}{1+lx} - \frac{y^2}{2x(1+lx)^3} - \frac{y^3}{2x^2(1+lx)^5} - \frac{5y^4}{8x^3(1+lx)^7} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^9}$$

$$- \frac{y^3}{6x^2(1+lx)^4} - \frac{5y^3}{12x^3(1+lx)^6} - \frac{7y^5}{8x^4(1+lx)^8}$$

$$- \frac{y^4}{12x^3(1+lx)^5} - \frac{y^5}{3x^4(1+lx)^7}$$

$$- \frac{y^5}{20x^4(1+lx)^6}$$

ꝛc.

Diese Reihe also, ohne Ende fortgesetzt, giebt den wahren Werth von f, man mag für x einen Werth setzen was für einen man will, indem man $y = xlx = la$ nimmt. Setzt man z. B. $x = 1$, so wird $y = -la$, und

$f =$

$$f = 1 + la - \frac{(la)^2}{2} + \frac{2(la)^3}{3} - \frac{9(la)^4}{8} + \frac{32(la)^5}{15} - \frac{625(la)^6}{144} + \text{etc.}$$

wie la den hyperbolischen Logarithmen von a bedeutet.

Exempel.

Man soll die Zahl f suchen, wenn $f^f = 100$ ist.

Da $a = 100$, und $y = xlx - la = xlx - l100$ ist, so setze man, da bekannt ist, daß $f > 3$ und < 4 seyn muß, $x = \frac{7}{2}$. Alsdann ist

$$\begin{aligned} lx &= 1{,}25276296849 \\ xlx &= 4{,}38467034972 \\ l100 &= 4{,}60517018599 \\ \hline y &= -0{,}22049983627 \\ 1 + lx &= 2{,}25276296849 \end{aligned}$$

Demnach ist, wenn man die gemeinen Logarithmen braucht,

$$\begin{aligned} l - y &= 9{,}3434083 \\ l(1 + lx) &= 0{,}3527156 \\ \hline & 8{,}9906027; \quad \frac{-y}{1 + lx} = 0{,}0978797 \\ ly^2 &= 8{,}6868166 \\ 3l(1 + lx) &= 1{,}0581468 \\ \hline & 7{,}6286698 \\ l2x = l7 &= 0{,}8450980 \\ \hline & 6{,}7835718 \quad \frac{y^2}{2x(1 + lx)^3} = 0{,}0006075 \end{aligned}$$

Es ist also ohngefähr $f = 3{,}5972772$; wenn man aber die folgenden Glieder mit zu Hülfe nimmt, $f = 3{,}5972852$.

§. 244.

§. 244.

Außerdem aber leistet die Differenzial-Rechnung bey der Auflösung der Gleichung einen vorzüglichen Nutzen, wenn eine gewisse Beziehung, welche zwischen den Wurzeln statt findet, bekannt ist. Es sey die Gleichung $y = 0$ gegeben, und y darin irgend eine Funktion von x. Wäre nun z. B. bekannt, daß zwey Wurzeln dieser Gleichung um die Größe a verschieden wären, so würde man diese Wurzeln leicht auf folgende Art entdecken. Es bedeute x die kleine Wurzel, und also $x + a$ die größere. Da die Funktion y verschwindet, wenn x eine von den Wurzeln der Gleichung $y = 0$ vorstellt, so wird sie es ebenfalls thun, wenn man darin $x + a$ statt x setzt. Es ist demnach

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{a^2 ddy}{2dx^2} + \frac{a^3 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

woher denn, da $y = 0$ ist, auch

$$0 = \frac{dy}{dx} + \frac{a\,ddy}{2dx^2} + \frac{a^2 d^3y}{6dx^3} + \text{ꝛc.}$$

wird. Diese beyden Gleichungen zusammen genommen, geben auf dem Wege der Elimination den Werth der Wurzel x, und die andere Wurzel ist um a größer.

Exempel.

Es sey die Gleichung:

$$x^5 - 24x^3 + 49x^2 - 36 = 0$$

gegeben, und davon irgend woher bekannt, daß zwey ihrer Wurzeln um 1 von einander verschieden sind.

Setzt man

$$y = x^5 - 24x^3 + 49x^2 - 36, \text{ so ist}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 72x^2 + 98x$$

ddy

$$\frac{ddy}{2dx^2} = 10x^3 - 72x + 49$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = 10x^2 - 24$$

$$\frac{d^4y}{24dx^4} = 5x$$

$$\frac{d^5y}{120dx^5} = 1$$

Da nun $a = 1$ ist, so hat man

$$A \ldots 5x^4 + 10x^3 - 62x^2 + 31x + 26 = 0.$$

Nun ist aber

$$B \ldots x^5 - 24x^3 + 49x^2 - 36 . 0.$$

Man multiplicire also die obere Gleichung durch x, und die untere durch 5, so bekommt man durch die Subtraction diese von jener

$$10x^4 + 58x^3 - 214x^2 + 26x + 180 = 0, \text{ oder}$$

$$C \ldots 5x^4 + 29x^3 - 107x^2 + 13x + 90 = 0.$$

Zieht man hievon die erste A ab, so bleibt

$$\begin{array}{lrrrrr}
D \ldots & & 19x^3 & -\ 45x^2 & -\ 18x & +\ 64 = 0 \\
D.5x \ldots & 95x^4 & -\ 225x^3 & -\ 90x^2 & +\ 320x & = 0 \\
A.19 \ldots & 95x^4 & +\ 190x^3 & -\ 1178x^2 & +\ 589x & +\ 494 = 0 \\
\hline
E \ldots\ldots & & 415x^3 & -\ 1088x^2 & +\ 269x & +\ 494 = 0 \\
D.415 \ldots & & 7885x^3 & -\ 18675x^2 & -\ 7470x & +\ 26560 = 0 \\
E.19 \ldots & & 7885x^3 & -\ 20672x^2 & +\ 5111x & +\ 9386 = 0 \\
\hline
F \ldots\ldots & & & 1997x^2 & -\ 12581x & +\ 17174 = 0 \\
D.247 \ldots & & 4693x^3 & -\ 11115x^2 & -\ 4446x & +\ 15808 = 0 \\
E.32 \ldots & & 13280x^3 & -\ 34816x^2 & +\ 8608x & +\ 15808 = 0 \\
\hline
G \ldots\ldots & & & 8587x^2 & -\ 23701x & +\ 13054 = 0 \\
F.8587 \ldots & & & 17148239x^2 & -\ 108033047x & +\ 147473138 = 0 \\
G.1997 \ldots & & & 17148239x^2 & -\ 47330897x & +\ 26068838 = 0 \\
\hline
& & & & 60702150x & +\ 121404300 = 0
\end{array}$$

Hieraus

Hieraus folgt, $x = 2$, und es ist demnach auch $x = 3$ eine Wurzel der Gleichung.

§. 245.

Es kann indeß diese Operation auch ohne Differenzial-Rechnung zu Stande gebracht werden, weil man die Gleichung, welche die Differenzial-Rechnung gab, ebenfalls dadurch bekommt, daß man in der gegebenen Gleichung $x + a$ für x setzt. Uebrigens ist die gebrauchte Eliminations-Methode sehr mühsam, und würde, wenn die Gleichung zu einem höhern Grade gehörte, unsägliche Arbeit nöthig machen, daher sie bey transcendenten Gleichungen gar nicht brauchbar ist. Nehmen wir aber an, daß zwey Wurzeln einer Gleichung $y = 0$ einander gleich seyn, so verwandelt sich die Differenzial-Gleichung, weil dann $a = 0$ ist, in diese, $\frac{dy}{dx} = 0$. So oft daher eine Gleichung $y = 0$ zwey gleiche Wurzeln hat, so oft ist auch $\frac{dy}{dx} = 0$, und diese beyden Gleichungen geben, mit einander verbunden, den Werth von x, dem zwey Wurzeln gleich sind. Wenn also umgekehrt zwey Gleichungen, $y = 0$, und $\frac{dy}{dx} = 0$, eine Wurzel gemein haben, so ist diese Wurzel auch zweymal in der Gleichung $y = 0$ enthalten. Dieses findet statt, wenn nach gänzlicher Elimination der Größe x aus den beyden Gleichungen $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = 0$ eine identische Gleichung gefunden wird. Würde z. B. die Gleichung

$$x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$$

gegeben, so wäre auch $3xx - 4x - 4 = 0$, und setzt man das Doppelte hiervon zu jener Gleichung hinzu, so wird

$x^3 + 4xx - 12x = 0$, oder $xx + 4x - 12 = 0$.
Das Dreyfache davon ist,

$$3xx + 12x - 36 = 0, \text{ also}$$
$$3xx - 4x - 4 = 0 \text{ davon abgezogen}$$
$$\text{so kommt } 16x - 32 = 0,$$
$$x - 2 = 0.$$

Da sich also $x = 2$ ergeben hat, so setze man diesen Werth in eine der vorhergehenden Gleichungen $3xx - 4x - 4 = 0$. Hierdurch bekommt man die identische Gleichung $12 - 8 - 4 = 0$, und daraus schließt man, daß die gegebene Gleichung $x^3 - 2xx - 4x + 8 = 0$ zwey gleiche Wurzeln, nemlich 2, habe.

§. 246.

Hat man also eine algebraische Gleichung von irgend einer Anzahl von Dimensionen:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{rc.} = 0,$$

welche zwey einander gleiche Wurzeln enthält: so ist auch:

$$nx^{n-1} + (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} + (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \text{rc.} = 0.$$

Es ist nemlich die zwiefache Wurzel jener Gleichung auch eine Wurzel von dieser. Man multiplicire jene mit n, und diese mit x, und subtrahire das letztere Produkt von dem ersten, so bekommt man

$$Ax^{n-1} + 2Bx^{n-2} + 3Cx^{n-3} + 4Dx^{n-4} + \text{rc.} = 0.$$

Ferner multiplicire man jene durch a, diese durch b, und addire beyde: so wird

$$ax^n + (a+b)Ax^{n-1} + (a+2b)Bx^{n-2} + (a+3b)Cx^{n-3} + \text{rc.} = 0$$

und diese Gleichung, mit der gegebenen verbunden, wird die Wurzel geben, welche die gegebene Gleichung doppelt enthält. Da nun die Größen a und b willkührlich angenommen werden kön-

können, so hat man in den Coefficienten $a, a + b, a + 2b, a + 3b$, ꝛc. irgend eine arithmetische Progression; und wenn also eine Gleichung zwey gleiche Wurzeln hat, so findet man dieselben, wenn man die einzelnen Glieder der gegebenen Gleichung durch die Glieder irgend einer arithmetischen Progression multiplicirt, indem die auf diesem Wege resultirende Gleichung die Wurzel enthält, welche sich in der gegebenen zweymal findet. Werden z. B. die Glieder der Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

durch folgende arithmetische Progression multiplicirt.

$$a;\ a + b;\ a + 2b;\ a + 3b;\ a + 4b;\ \text{ꝛc.}$$

so entsteht diese neue Gleichung:

$$ax^n + (a + b)Ax^{n-1} + (a + 2b)Bx^{n-2} + (a + 3b)Cx^{n-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

welche mit jener verbunden, die gleichen Wurzeln zu erkennen giebt. Und dies ist die hinlänglich bekannte Regel zur Erfindung der gleichen Wurzeln einer Gleichung, wenn dieselbe deren zwey enthält.

§. 247.

Hat eine Gleichung $y = 0$ drey gleiche Wurzeln, so ist nicht nur $\frac{dy}{dx} = 0$, sondern auch $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, wenn man für x den Werth der Wurzel setzt, die in der Gleichung $y = 0$ dreymal enthalten ist. Um sich hiervon zu überzeugen, setze man die drey Wurzeln der Gleichung x, $x + a$, $x + b$, so daß man sich zuvörderst dieselben als um a und b von einander verschieden vorstelle. Da nun y verschwindet, sowohl wenn man $x + a$, als wenn man $x + b$ für x setzt, so ist

$$y = 0$$

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2ddy}{2dx^2} + \frac{a^3d^3y}{6dx^3} + \frac{a^4d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$y + \frac{bdy}{dx} + \frac{b^2ddy}{2dx^2} + \frac{b^3d^3y}{6dx^3} + \frac{b^4d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Zieht man von diesen beyden letztern Gleichungen die erste ab, so wird

$$\frac{dy}{dx} + \frac{addy}{2dx^2} + \frac{a^2d^3y}{6dx^3} + \frac{a^3d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{bddy}{2dx^2} + \frac{b^2d^3y}{6dx^3} + \frac{b^3d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0$$

Man subtrahire auch diese Gleichungen von einander, und dividire durch $a - b$, so wird

$$\frac{ddy}{2dx^2} + \frac{(a+b)d^3y}{6dx^3} + \frac{(aa+ab+bb)d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.} = 0.$$

Endlich setze man $a = 0$ und $b = 0$, so daß nunmehr die angenommenen drey Wurzeln einander gleich werden, so erhält man

$$y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad \text{und } \frac{ddy}{dx^2} = 0.$$

§. 248.

So oft daher eine Gleichung, $y = 0$, drey gleiche Wurzeln, nemlich, f, f, f hat, so oft ist die Größe f nicht bloß eine Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, sondern auch von $\frac{ddy}{dx^2} = 0$. Da also f eine gemeinschaftliche Wurzel der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, und ihres Differenzials $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ ist: so erhellet aus dem Vorhergehenden, daß sie in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ zweymal enthalten ist. Wenn daher die Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

drey gleiche Wurzeln f, f, f enthält, so hat die Gleichung, welche man durch die Multiplication ihrer Glieder durch eine arithmetische Progression erhält, zwey gleiche Wurzeln f, f; und man kann diese von neuem durch eine arithmetische Progression multipliciren, um eine Gleichung zu bekommen, worin f nur einmal eine Wurzel ist. Man erhält auf diese Art drey Gleichungen, die eine gemeinschaftliche Wurzel haben, und findet durch ihre Verbindung die Wurzel selbst leicht. Denn wenn man solche arithmetische Progressionen wählt, deren erstes oder letztes Glied $= 0$ ist, so bekommt man eine um einen Grad niedrigere Gleichung, und erleichtert sich dadurch die Elimination.

§. 249.

Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß, wenn eine Gleichung, $y = 0$, vier gleiche Wurzeln f, f, f, f, hat, bey $x = f$ nicht nur $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, sondern auch $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ sey. So wie nemlich die Gleichung $y = 0$ die Wurzel f viermal enthält, so steckt dieselbe in der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ dreymal, in der Gleichung $\frac{ddy}{dx^2} = 0$ zweymal, und in der Gleichung $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ einmal. Dies sieht man noch leichter, wenn man erwägt, daß die Funktion y in diesem Falle die Form $(x - f)^4X$ haben müsse, wenn X irgend eine Funktion von x bedeutet. Legt man diese Form zum Grunde, so ist

$$\frac{dy}{dx} = (x - f)^3\left(4X + \frac{(x - f)dX}{dx}\right)$$

 und

und also durch $(x-f)^3$ theilbar. Auf ähnliche Art hat $\frac{ddy}{dx^2}$ den Faktor $(x-f)^2$, und $\frac{d^3y}{dx^3}$ den Faktor $x-f$; woraus erhellet, daß die Wurzel $x=f$, wenn dieselbe in der Gleichung $y=0$ viermal enthalten ist, in $\frac{dy}{dx}=0$ dreymal, in $\frac{ddy}{dx^2}=0$ zweymal, und in $\frac{d^3y}{dx^3}=0$ einmal stecken müsse.