Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Siebentes Capitel. Fortführung der Summation der Progressionen durch unbegrenzte Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52909

Siebentes Capitel.

Fortführung der Summation der Progressionen durch unbegrenzte Reihen.

§. 167.

Um die im vorhergehenden Capitel erklärte Summations-Methode zu ergänzen, wollen wir in dem gegenwärtigen solche Reihen betrachten, deren allgemeine Glieder mehr zusammengesetzte Ausdrücke sind. Da also der gefundene Ausdruck bey den geometrischen Progressionen, so leicht man auch auf andern Wegen die Summe derselben finden kann, gleichwohl die wahre Summe nicht giebt: so wollen wir zuvörderst solche Reihen untersuchen, deren Glieder Produkte aus den Gliedern einer geometrischen und irgend einer andern Reihe sind. Es sey daher diese Reihe gegeben:

$$s = \overset{1}{ap} + \overset{2}{bp^2} + \overset{3}{cp^3} + \overset{4}{dp^4} + \ldots\ldots + \overset{x}{yp^x}$$

welche aus der geometrischen Reihe p, p^2, p^3, 2c. und einer andern $a + b + c + d +$ 2c. besteht, in welcher das zu dem Anzeiger x gehörige Glied $= y$ ist; und dabey werde gefragt: Welches der allgemeine Ausdruck für den Werth ihrer Summe $s = S.yp^x$ sey?

§. 168.

Wir wollen uns bey der Beantwortung derselben eben der Schlußart bedienen, welche wir oben gebraucht haben, und v das Glied bedeuten lassen, das in der Reihe $a + b + c + d +$ ꝛc. vor y vorhergeht, so wie A dasienige, so seine Stelle vor a hat, oder zu dem Anzeiger o gehört. Bey diesen Voraussetzungen ist vp^{x-1} das allgemeine Glied der Reihe:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & x \\ A + ap & + bp^2 & + cp^3 & + \ldots\ldots & & + vp^{x-1} \end{array}$$

und bezeichnet man die Summe dieser Reihe durch $S.vp^{x-1}$, so hat man

$$S.vp^{x-1} = \frac{1}{p}S.vp^x = S.yp^x - yp^x + A$$

Da aber

$$v = y - \frac{dy}{dx} + \frac{ddy}{2dx^2} - \frac{d^3y}{6dx^3} + \frac{d^4y}{24dx^4} - \frac{d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$S.yp^x - yp^x + A = \frac{1}{p}S.yp^x - \frac{1}{p}S\frac{dy}{dx}p^x + \frac{1}{2p}S\frac{ddy}{dx^2}p^x$$
$$- \frac{1}{6p}S\frac{d^3y}{dx^3}p^x + \frac{1}{24p}S\frac{d^4y}{dx^4}p^x - \text{ꝛc.}$$

und hieraus

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S\frac{dy}{dx}p^x + S\frac{ddy}{2dx^2}p^x - S\frac{d^3y}{6dx^3}p^x + \text{ꝛc.}\right)$$

Wenn man also die summirenden Glieder der Reihen kennt, deren allgemeine Glieder $\frac{dy}{dx}p^x$; $\frac{ddy}{dx^2}p^x$; $\frac{d^3y}{dx^3}p^x$; ꝛc. sind, so ist man auch im Stande, daraus das summirende Glied $S.yp^x$ zusammen zu setzen.

§. 169.

Hieraus lassen sich schon die Summen der Reihen bestimmen, deren allgemeine Glieder unter die Form $x^n p^x$ gehören.

hören. Denn es sey $y = x^n$; so wird $A = 0$, wofern nicht etwa $n = 0$ ist, in welchem Falle $A = 1$ seyn würde. Und da

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1};\quad \frac{ddy}{2dx^2} = \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2};$$

$$\frac{d^3y}{6dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3};\ \text{ꝛc.}$$

ist, so bekommt man

$$S.x^np^x = \frac{1}{p-1}\Big(x^np^{x+1} - Ap - nS.x^{n-1}p^x + \frac{n(n-1)}{1.2}S.x^{n-2}p^x$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}S.x^{n-3}p^x$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}S.x^{n-4}p^x - \text{ꝛc.}\Big)$$

Hieraus fließen folgende Summationen, wenn man für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, ꝛc. setzt; und zwar wird im ersten Falle, wenn $n = 0$ ist, $A = 1$, in den übrigen aber $A = 0$.

$$S.x^0p^x = S.p^x = \frac{1}{p-1}(p^{x+1} - p) = \frac{p^{x+1}-p}{p-1} = \frac{p(p^x-1)}{p-1}$$

welches die bekannte Bestimmung der Summe einer geometrischen Progression ist.

$$S.xp^x = \frac{1}{p-1}(xp^{x+1} - S.p^x) = \frac{xp^{x+1}}{p-1} - \frac{p^{x+1}-p}{(p-1)^2}$$

$$\text{oder } S.xp^x = \frac{pxp^x}{p-1} - \frac{p(p^x-1)}{(p-1)^2}$$

$$S.x^2p^x = \frac{1}{p-1}(x^2p^{x+1} - 2S.xp^x + S.p^x) \text{ oder}$$

$$Sx^2p^x = \frac{x^2p^{x+1}}{p-1} - \frac{2xp^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)(p^x-1)}{(p-1)^3}$$

$$S.x^3p^x = \frac{1}{p-1}(x^3p^{x+1} - S.x^2p^x + 3S.xp^x - S.p^x)$$

oder

$$S.x^3p^x = \frac{x^3p^{x+1}}{p-1} - \frac{3x^2p^{x+1}}{(p-1)^2} + \frac{3(p+1)xp^{x+1}}{(p-1)^3} - \frac{p(pp+4p+1)(p^x-1)}{(p-1)^4}.$$

Geht man auf diese Art weiter fort, so findet man zwar nach und nach die Summen der höhern Potestäten, indeß läßt sich dieser Endzweck bequemer durch den allgemeinen Ausdruck erreichen, welchen wir nunmehr erklären wollen.

§. 170.

Da wir gesehen haben, daß

$$S.yp^x = \frac{1}{p-1}\left(yp^{x+1} - Ap - S.\frac{dy}{dx}p^x + S.\frac{ddy}{2dx^2}p^x - S.\frac{d^3y}{6dx^3}p^x + \text{etc.}\right)$$

ist, wenn A eine solche beständige Größe bedeutet, daß die Summe $=0$ wird, wenn man $x=0$ nimmt, denn in diesem Falle wird $y=A$, und $yp^{x+1}=Ap$: so können wir diese beständige Größe aus der Acht lassen, wofern wir uns nur daran erinnern, daß allemal eine solche beständige Größe zu der Summe gesetzt werden müsse, wobey sie, wenn $x=0$ wird, verschwindet, oder irgend einem andern bestimmten Falle ein Genüge thut. Setzt man also z anstatt y, so wird

$$S.p^xz = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{1}{p-1}S.p^x\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2(p-1)}S.p^x\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{6(p-1)}S.p^x\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{1}{24(p-1)}S.p^x\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{1}{120(p-1)}S.p^x\frac{d^5z}{dx^5} + \text{etc.}$$

Setzt man ferner nach und nach $\frac{dz}{dx}$; $\frac{ddz}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3}$; etc. an die Stelle von y, so bekommt man

$$S.\frac{p^x dz}{dx} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{dz}{dx} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

$$S.\frac{p^x ddz}{dx^2} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{ddz}{dx^2} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^4z}{dx^4} - \text{ꝛc.}$$

$$S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} = \frac{p^{x+1}}{p-1}.\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^4z}{dx^4} + \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^5z}{dx^5} - \text{ꝛc.}$$

Substituirt man also nach und nach diese Werthe, so erhält man für $S.p^x z$ folgenden Ausdruck:

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}z}{p-1} - \frac{\alpha p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{dz}{dx} + \frac{\beta p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{ddz}{dx^2} - \frac{\gamma p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{\delta p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{d^4z}{dx^4} - \frac{\varepsilon p^{x+1}}{(p-1)}.\frac{d^5z}{dx^5} + \text{ꝛc.}$$

§. 171.

Um die Werthe der Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. zu finden, setze man für jedes Glied die dafür vorhin gefundene Reihe; nemlich

$$\frac{p^{x+1}z}{p-1} = S.p^x z + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x dz}{dx} - \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{6(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{p^{x+1}dz}{(p-1)dx} = S.\frac{p^x dz}{dx} + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x ddz}{dx^2} - \frac{1}{2(p-1)}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{p^{x+1}ddz}{(p-1)dx^2} = S.\frac{p^x ddz}{dx^2} + \frac{1}{p-1}S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{p^{x+1}d^3z}{(p-1)dx^3} = S.\frac{p^x d^3z}{dx^3} + \text{ꝛc.}$$

Wir haben also $S.p^x z = S.p^x z$

$$\begin{array}{llll} + \dfrac{1}{p-1} S.\dfrac{p^x dz}{dx} & - \dfrac{1}{2(p-1)} S.\dfrac{p^x ddz}{dx^2} & + \dfrac{1}{6(p-1)} S.\dfrac{p^x d^3 z}{dx^3} & - \text{ꝛc.} \\ - \alpha & - \dfrac{\alpha}{p-1} & + \dfrac{\alpha}{2(p-1)} & \\ & + \beta & + \dfrac{\beta}{p-1} & \\ & & - \gamma & \end{array}$$

und finden daraus folgende Werthe für die Buchstaben α, β, γ, δ, ꝛc.

$$\alpha = \frac{1}{p-1}$$

$$\beta = \frac{1}{p-1}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{p-1}\left(\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{p-1}\left(\gamma + \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{1}{24}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{p-1}\left(\delta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120}\right)$$

ꝛc.

§. 172.

Es sey der Kürze wegen $\dfrac{1}{p-1} = q$, so ist

$\alpha = q$

$\beta = \alpha q + \frac{1}{2}q = qq + \frac{1}{2}q$

$\gamma = \beta q + \frac{1}{2}\alpha q + \frac{1}{6}q = q^3 + qq + \frac{1}{6}q$

$\delta = \gamma q + \frac{1}{2}\beta q + \frac{1}{6}\alpha q + \frac{1}{24}q = q^4 + \frac{3}{2}q^3 + \frac{7}{12}q^2 + \frac{1}{24}q$

$\varepsilon = \delta q + \frac{1}{2}\gamma q + \frac{1}{6}\beta q + \frac{1}{24}\alpha q + \frac{1}{120}q$,

oder

$\varepsilon = q^5 + 2q^4 + \frac{5}{4}q^3 + \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{120}q$, und

$\zeta = q^6 + \frac{5}{2}q^5 + \frac{13}{6}q^4 + \frac{3}{4}q^3 + \frac{31}{360}q^2 + \frac{1}{320}q$

ꝛc.

oder

oder

$$\alpha = \frac{q}{1}$$

$$\beta = \frac{2qq + q}{1 \cdot 2}$$

$$\gamma = \frac{6q^3 + 6q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\delta = \frac{24q^4 + 36q^3 + 14q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\varepsilon = \frac{120q^5 + 240q^4 + 150q^3 + 30q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\zeta = \frac{720q^6 + 1800q^5 + 1560q^4 + 540q^3 + 62q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$\eta = \frac{5040q^7 + 15120q^6 + 16800q^5 + 8400q^4 + 1806q^3 + 126q^2 + q}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

ꝛc.

wo jeder Coefficient 16800 entsteht, wenn man die Summe der beyden vorhergehenden 1560 + 1800 durch den Exponenten von q, der hier = 5 ist, multiplicirt.

§. 173.

Setzt man nun aber anstatt q seinen Werth $\frac{1}{p-1}$, so wird

$$\alpha = \frac{1}{1(p-1)}$$

$$\beta = \frac{p+1}{1 \cdot (p-1)^2}$$

$$\gamma = \frac{pp + 4p + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3(p-1)^3}$$

$$\delta = \frac{p^3 + 11p^2 + 11p + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(p-1)^4}$$

$\varepsilon =$

$$\varepsilon = \frac{p^4 + 26p^3 + 66p^2 + 26p + 1}{1.2.3.4.5(p-1)^5}$$

$$\zeta = \frac{p^5 + 57p^4 + 302p^3 + 302p^2 + 57p + 1}{1.2.3.4.5.6(p-1)^6}$$

$$\eta = \frac{p^6 + 120p^5 + 1191p^4 + 2416p^3 + 1191p^2 + 120p + 1}{1.2.3.4.5.6.7(p-1)^7}$$

etc.

Das Gesetz, nach welchem diese Größen fortschreiten, ist dieses, daß wenn man irgend ein Glied

$$\frac{p^{n-2} + Ap^{n-3} + Bp^{n-4} + Cp^{n-5} + Dp^{n-6} + \text{etc.}}{1.2.3\,\ldots\ldots\,(n-1)(p-1)^{n-1}}$$

setzt, alsdann

$$A = 2^{n-1} - n$$

$$B = 3^{n-1} - n.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$C = 4^{n-1} - n.3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}.2^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$D = 5^{n-1} - n.4^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}3^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}2^{n-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$

etc.

wird, wornach sich die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. so weit man will, fortsetzen lassen.

§. 174.

Betrachtet man das Fortschreitungsgesetz dieser Coefficienten genauer, so nimmt man bald wahr, daß dieselben eine wiederkehrende Reihe bilden, und sich ergeben, wenn man den Bruch

$$\frac{1}{1 - \frac{u}{p-1} - \frac{u^2}{2(p-1)} - \frac{u^3}{6(p-1)} - \frac{u^4}{24(p-1)} - \text{etc.}}$$

ent-

entwickelt, indem man dadurch diese Reihe bekömmt:

$$1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{ꝛc.}$$

Man setze jenen Bruch $= V$. Da alsdann

$$V = \frac{p - 1}{p - 1 - u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{6} - \frac{u^4}{24} - \text{ꝛc.}}$$

ist, so wird

$$V = \frac{p - 1}{p - e^u}$$

wo e die Zahl bedeutet, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist. Druckt man nun V durch eine Reihe aus, und zwar nach den Potestäten von u geordnet, so erhält man

$$V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \zeta u^6 + \text{ꝛc.}$$

und die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ ꝛc. sind eben diejenigen, welche wir bey unserm gegenwärtigen Geschäfte brauchen. Hat man also diese Coefficienten gefunden, so ist

$$S.p^x z = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(z - \frac{\alpha dz}{dx} + \frac{\beta ddz}{dx^2} - \frac{\gamma d^3 z}{dx^3} + \frac{\delta d^4 z}{dx^4} - \text{ꝛc.}\right)$$
$$\pm C.$$

und dieser Ausdruck enthält das summirende Glied der Reihe:

$$ap + bp^2 + cp^3 + \ldots\ldots + p^x z$$

deren allgemeines Glied $= p^x z$ ist.

§. 175.

Da wir

$$V = \frac{p - 1}{p - e^u}$$

gefunden haben, so wird

$$e^u = \frac{pV - p + 1}{V}$$

und, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$u = l(pV - p + 1) - lV$$

und

und hieraus durch die Differenziation

$$du = \frac{(p-1)dV}{pV^2 - (p-1)V}, \text{ daher denn}$$

$$pV^2 = (p-1)V + \frac{(p-1)dV}{du}.$$

Da also

$$V = 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} pV^2 = p &+ 2\alpha pu + 2\beta pu^2 + 2\gamma pu^3 + 2\delta pu^4 + 2\varepsilon pu^5 + \text{ꝛc.} \\ &+ \alpha^2 pu^2 + 2\alpha\beta pu^3 + 2\alpha\gamma pu^4 + 2\alpha\delta pu^5 + \text{ꝛc.} \\ &+ \beta^2 pu^4 + 2\beta pu^5 + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p-1)V = (p-1) &+ \alpha(p-1)u + \beta(p-1)u^2 + \gamma(p-1)u^3 \\ &+ \delta(p-1)u^4 + \varepsilon(p-1)u^5 + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(p-1)dV}{du} = (p-1)\alpha &+ 2(p-1)\beta u + 3(p-1)\gamma u^2 + 4(p-1)\delta u^3 \\ &+ 5(p-1)\varepsilon u^4 + 6(p-1)\zeta u^5 + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

und durch die Vergleichung dieser Ausdrücke ergiebt sich

$$\begin{aligned} (p-1)\alpha &= 1 \\ 2(p-1)\beta &= \alpha(p+1) \\ 3(p-1)\gamma &= \beta(p+1) + \alpha^2 p \\ 4(p-1)\delta &= \gamma(p+1) + 2\alpha\beta p \\ 5(p-1)\varepsilon &= \delta(p+1) + 2\alpha\gamma p + \beta\beta p \\ 6(p-1)\zeta &= \varepsilon(p+1) + 2\alpha\delta p + 2\beta\gamma p \\ 7(p-1)\eta &= \zeta(p+1) + 2\alpha\varepsilon p + 2\beta\delta p + \gamma\gamma p \\ &\text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Wenn man in diesen Formeln für p eine gegebene Zahl setzt, so findet man die Werthe der Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. weit leichter als nach dem zuerst entdeckten Gesetze.

§. 176.

Ehe wir die besondern Fälle in Ansehung des Werthes von p untersuchen, wollen wir $z = x^n$ setzen, so daß die Reihe:

$s =$

$$s = p + 2^n p^2 + 3^n p^3 + 4^n p^4 + \ldots\ldots + x^n p^n$$

zu summiren sey. Alsdann ist nach dem vorhin gefundenen Ausdrucke

$$s = p^x\Big(\frac{p}{p-1}\cdot x^n - \frac{p}{(p-1)^2} n x^{n-1} + \frac{pp+p}{(p-1)^3}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}$$
$$- \frac{(p^3+4p^2+p)}{(p-1)^4}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3} + \text{2c.}$$
$$\pm C,$$

so daß durch diese Constante $s = 0$ werde, wenn man $x = 0$ setzt. Schreibt man daher für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 2c. so wird

$$S.x^0p^x = p^x\cdot\frac{p}{p-1} - \frac{p}{p-1}$$

$$S.x^1p^x = p^x\Big(\frac{px}{p-1} - \frac{p}{(p-1)^2}\Big) + \frac{p}{(p-1)^2}$$

$$S.x^2p^x = p^x\Big(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px}{(p-1)^2} + \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}\Big) - \frac{p(p+1)}{(p-1)^3}$$

$$S.x^3p^x = p^x\Big(\frac{px^3}{p-1} - \frac{3px^2}{(p-1)^2} + \frac{3p(p+1)x}{(p-1)^3} - \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}\Big)$$
$$+ \frac{p(p^2+4p+1)}{(p-1)^4}$$

$$S.x^4p^x = p^x\Big(\frac{px^4}{p-1} - \frac{4px^3}{(p-1)^2} + \frac{6p(p+1)x^2}{(p-1)^3} - \frac{4p(p^2+4p+1)x}{(p-1)^4}$$
$$+ \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}\Big) - \frac{p(p^3+11p^2+11p+1)}{(p-1)^5}$$

$$S.x^5p^x = \frac{p^{x+1}x^5}{p-1} - \frac{5p^{x+1}x^4}{(p-1)^2} + \frac{10(p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^3}$$
$$- \frac{10(p^2+4p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^3} + \frac{5(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^5}$$
$$- \frac{(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^6}$$

$S.x^6p^x$

$$S.x^6p^x = \frac{p^{x+1}x^6}{p-1} - \frac{6p^{x+1}x^5}{(p-1)^2} + \frac{15(p+1)p^{x+1}x^4}{(p-1)^3}$$
$$- \frac{20(p^2+4p+1)p^{x+1}x^3}{(p-1)^4} + \frac{15(p^3+11p^2+11p+1)p^{x+1}x^2}{(p-1)^5}$$
$$- \frac{6(p^4+26p^3+66p^2+26p+1)p^{x+1}x}{(p-1)^6}$$
$$- \frac{(p^5+57p^4+302p^3+302p^2+57p+1)(p^{x+1}-p)}{(p-1)^7}$$

rc.

§. 177.

Hieraus erhellet, daß es allemal möglich ist die Summe darzustellen, wenn z eine ganze rationale Funktion von x aus der Reihe ist, deren allgemeines Glied durch p^xz ausgedruckt wird. Denn sucht man die Differenzialien von z, so kommt man endlich auf solche, die verschwinden. Wird z. B. die Reihe gegeben:

$$p + 3p^2 + 6p^3 + 10p^4 + \ldots + \frac{(xx+x)}{2}p^x$$

so ist, weil $z = \frac{xx+x}{2}$; $\frac{dz}{dx} = x + \frac{1}{2}$; und $\frac{ddz}{dx^2} = 1$

das summirende Glied

$$s = \frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}x - \frac{2x+1}{2(p-1)} + \frac{p+1}{2(p-1)^2}\right) -$$
$$\frac{p}{p-1}\left(\frac{p+1}{2(p-1)^2} - \frac{1}{2(p-1)}\right)$$

oder

$$s = p^{x+1}\left(\frac{xx}{2(p-1)} + \frac{(p-3)x}{2(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^3}$$

Wenn aber z keine ganze rationale Funktion ist, so läuft der Ausdruck des summirenden Gliedes ohne Ende fort. Ist z. B. $z = \frac{1}{x}$ oder folgende Reihe zu summiren:

s =

$$s = p + \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{3}p^3 + \tfrac{1}{4}p^4 + \ldots\ldots + \frac{1}{x}p^x$$

so bekommt man, weil

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{xx};\ \frac{ddz}{dx^2} = \frac{2}{x^3};\ \frac{d^3z}{dx^3} = -\frac{2.3}{x^4};\ \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{2.3.4}{x^5};\ \text{rc.}$$

das summirende Glied

$$s =$$

$$\frac{p^{x+1}}{p-1}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(p-1)x^2} + \frac{p+1}{(p-1)^2x^3} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3x^4} + \frac{p^3+11p^2+11p+1}{(p-1)^4x^5} + \text{rc.}\right)$$

$$+ C.$$

Allein in diesem Falle kann man die beständige Größe C nicht auf die Art bestimmen, daß man $x = 0$ setze. Nimmt man also $x = 1$, so wird, weil dann $s = p$ wird,

$$C = p - \frac{pp}{p-1}\left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{p+1}{(p-1)^2} + \frac{pp+4p+1}{(p-1)^3} + \text{rc.}\right)$$

§. 178.

Wenn also p keine bestimmte Zahl bedeutet, so erhält man hieraus wenig Vortheil zur Ausdrückung der Summen durch die Näherung. Es erhellt aber zuvörderst, daß man für p nicht 1 setzen darf, weil dabey alle Coefficienten α, β, γ, δ, rc. unendlich groß werden würden. Da also die gegenwärtige Reihe durch die Substitution von $p = 1$ in die vorhin untersuchte übergeht, so ist es kein Wunder, wenn man diesen unter allen leichtesten Fall doch nicht daraus ableiten kann. Ferner ist es merkwürdig, daß die Summation bey $p = 1$ das Integral $\int z\,dx$ erfordert, da doch überhaupt die Summe ohne irgend ein Integral dargestellt werden kann. Wenn also alle Coefficienten α, β, γ, δ, rc. unendlich werden, so tritt auch das Integral ein. Uebrigens ist dies der einzige Fall, wenn nemlich $p = 1$ ist, auf welchen sich die gefundene allgemeine Formel nicht anwenden läßt, und man hat nicht

Ursache, deswegen die gedachte allgemeine Formel zu verwerfen. Denn obgleich alle einzelne Glieder unendlich sind, so heben sich doch alle Unendliche in der That einander auf, und so bleibt bloß die endliche Größe übrig, welche der Summe gleich und mit derjenigen übereinstimmend ist, welche wir nach der vorhergehenden Methode gefunden haben. Dies wird weiter hin ausführlicher aus einander gesetzt werden.

§. 179.

Es sey also $p = -1$, wo folglich die Zeichen in der Reihe abwechseln werden:

$$-\overset{1}{a}+\overset{2}{b}-\overset{3}{c}+\overset{4}{d}-\ldots\ldots\pm\overset{x}{z}$$

und dabey ist z positiv, wenn x eine gerade, negativ aber, wenn x eine ungerade Zahl ist. Setzt man also

$$s = -a+b-c+d-\ldots\ldots\pm z$$

so wird

$$s = \frac{\pm 1}{2}\left(z-\frac{\alpha dz}{dx}+\frac{\beta ddz}{dx^2}-\frac{\gamma d^3z}{dx^3}+\frac{\delta d^4z}{dx^4}-\text{etc.}\right)$$
$$+\,C$$

und das obere Zeichen gilt, wenn x eine gerade, das untere hingegen, wenn x eine ungerade Zahl bedeutet. Verändert man daher die Zeichen, so bekommt man

$$a-b+c-d+e-f+\ldots\ldots\mp z =$$
$$\mp \tfrac{1}{2}\left(z-\frac{\alpha dz}{dx}+\frac{\beta ddz}{dx^2}-\frac{\gamma d^3z}{dx^3}+\frac{\delta d^4z}{dx^4}-\text{etc.}\right)$$
$$+\,C$$

und die Zeichen richten sich nach eben dem Gesetze.

§. 180.

In diesem Falle lassen sich die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, etc. aus den vorhin angeführten Werthen finden, wenn man

man allenthalben -1 für p setzt. Noch leichter erhält man sie indeß aus den allgemeinen Formeln §. 175, woraus zugleich erhellt, daß sie wechselsweise $= 0$ werden. Denn setzt man $p = -1$ so gehen jene Formeln in folgende über:

$$- \quad \alpha = 1$$
$$- \quad 4\beta = 0$$
$$- \quad 6\gamma = 0 - \alpha^2$$
$$- \quad 8\delta = 0 - 2\alpha\beta$$
$$- \quad 10\varepsilon = 0 - 2\alpha\gamma - \beta\beta$$
$$- \quad 12\zeta = 0 - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma$$

ꝛc.

Da also $\beta = 0$ ist, so wird auch $\delta = 0$, und ferner $\zeta = 0$, $\vartheta = 0$, ꝛc.; die übrigen Buchstaben aber haben folgende Bestimmung:

$$\alpha = -\tfrac{1}{2}$$
$$\gamma = \frac{\alpha^2}{6}$$
$$\varepsilon = \frac{2\alpha\gamma}{10}$$
$$\eta = \frac{2\alpha\varepsilon + \gamma\gamma}{14}$$
$$\iota = \frac{2\alpha\eta + 2\gamma\varepsilon}{18}$$

ꝛc.

§. 181.

Um die Rechnung bequemer zu machen, wollen wir neue Buchstaben einführen und setzen:

$$\alpha = -\frac{A}{1.2}$$
$$\beta = \frac{B}{1.2.3.4}$$

$$\varepsilon = -\frac{C}{1.2.3.4.5.6}$$

$$\eta = \frac{D}{1.2.3\ldots.8}$$

$$\iota = -\frac{E}{1.2.3\ldots10}$$

ꝛc.

Hierbey ist die vorhin ausgedruckte Summe

$$\mp\tfrac{1}{2}\left(z + \frac{Adz}{1.2dx} - \frac{Bd^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{Cd^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \frac{Dd^7z}{1.2\ldots8dx^7} + \text{ꝛc.}\right)$$

Die Coefficienten aber werden durch folgende Formeln bestimmt:

$$A = 1$$

$$3B = \frac{4.3}{1.2}.\frac{AA}{2}$$

$$5C = \frac{6.5}{1.2}.AB$$

$$7D = \frac{8.7}{1.2}.AC + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{BB}{2}$$

$$9E = \frac{10.9}{1.2}.AD + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}.BC$$

$$11F = \frac{12.11}{1.2}.AE + \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}.BD + \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}.\frac{CC}{2}$$

ꝛc.

und die Rechnung zu erleichtern druckt man dieselben noch besser auf diese Art aus:

$$A = 1$$

$$B = 2.\frac{AA}{2}$$

$$C = 3.AB$$

$$D = 4.AC + 4.\frac{6.5}{3.4}.\frac{BB}{2}$$

E =

$$E = 5.AD + 5.\frac{8.7}{3.4}.BC$$

$$F = 6.AE + 6.\frac{10.9}{3.4}.BD + 6.\frac{10.9.8.7}{3.4.5.6}\frac{CC}{2}$$

$$G = 7.AF + 7.\frac{12.11}{3.4}.BE + 7.\frac{12.11.10.9}{3.4.5.6}.CD$$

2c.

Stellt man nun die Rechnung wirklich an, so wird

$$A = 1$$
$$B = 1$$
$$C = 3$$
$$D = 17$$
$$E = 155 = 5.31$$
$$F = 2073 = 691.3$$
$$G = 38227 = 7.5461 = 7.\frac{127.129}{3}$$
$$H = 929569 = 3617.257$$
$$I = 28820619 = 43867.9.73$$

2c.

§. 182.

Wenn man diese Zahlen mit Aufmerksamkeit betrachtet, so läßt sich aus den Faktoren 691, 3617, 43867, leicht schließen, daß sie mit den Bernoullischen Zahlen zusammenhängen, und daraus bestimmt werden können. Untersucht man diesen Zusammenhang, so erhellet, daß sie aus den Bernoullischen Zahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, 2c. auf folgende Art formirt werden können:

$$A = 2.1.3\mathfrak{A} = 2(2^2 - 1)\mathfrak{A}$$
$$B = 2.3.5\mathfrak{B} = 2(2^4 - 1)\mathfrak{B}$$
$$C = 2.7.9\mathfrak{C} = 2(2^6 - 1)\mathfrak{C}$$
$$D = 2.15.17\mathfrak{D} = 2(2^8 - 1)\mathfrak{D}$$

$$E = 2 \,.\, 31 \,.\, 33\,\mathfrak{E} = 2(2^{10} - 1)\mathfrak{E}$$
$$F = 2 \,.\, 63 \,.\, 65\,\mathfrak{F} = 2(2^{12} - 1)\mathfrak{F}$$
$$G = 2 \,.\, 127 \,.\, 129\,\mathfrak{G} = 2(2^{14} - 1)\mathfrak{G}$$
$$H = 2 \,.\, 255 \,.\, 257\,\mathfrak{H} = 2(2^{16} - 1)\mathfrak{H}$$
ꝛc.

Da also die Bernoullischen Zahlen Brüche, unsere Coefficienten aber ganze Zahlen sind, so fällt in die Augen, daß die Brüche durch diese Faktoren weggeschaft werden, und es ist daher

$$A = 1$$
$$B = 1$$
$$C = 3$$
$$D = 17$$
$$E = 5 \cdot 31 = 155$$
$$F = 3 \cdot 691 = 2073$$
$$G = 7 \cdot 43 \cdot 127 = 38227$$
$$H = 257 \cdot 3617 = 929569$$
$$I = 9 \cdot 73 \cdot 43867 = 28820619$$
$$K = 5 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 174611 = 1109652905$$
$$L = 89 \cdot 683 \cdot 854513 = 51943281731$$
$$M = 3 \cdot 4097 \cdot 236364091 = 2905151042481$$
$$N = 2731 \cdot 8191 \cdot 8553103 = 191329672483963$$
ꝛc.

Aus diesen Zahlen ist man also auch umgekehrt im Stande die Bernoullischen Zahlen herzuleiten.

§. 183.

Braucht man also die Bernoullischen Zahlen, so ist die Summe der Reihe:

$$\overset{1}{a} - \overset{2}{b} + \overset{3}{c} - \overset{4}{d} + \overset{5}{e} - \ldots\ldots \mp \overset{x}{z}$$
$$=$$
$$\mp\left(\tfrac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}dz}{1.2\,dx} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4\,dx^3} + \frac{(2^6-1)\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6\,dx^5} - \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ C.$$

Hier

Hier aber erkennt man, daß jene Zahlen nicht durch einen Zufall herbeygeführt sind. Denn so wie man die gegebene Reihe erhält, wenn man von dieser

$$a + b + c + d + \ldots\ldots + z$$

wo alle Glieder das Zeichen + haben, die Summe der geraden Glieder $b + d + f +$ ꝛc. zweymal genommen, abzieht: so läßt sich auch der gefundene Ausdruck in zwey Theile auflösen, davon der eine die Summe aller das Zeichen + vor sich habenden Glieder und =

$$\int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{\mathfrak{A}dz}{1.2dx} - \frac{\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \text{ꝛc.}$$

ist; die Summe der übrigen Glieder aber findet man auf eben die Art, welche wir oben gebraucht haben. Denn da das letzte Glied z zu dem Anzeiger x gehört, so wird das vorhergehende, zu dem Anzeiger $x - 2$ gehörige,

$$z - \frac{2dz}{dx} + \frac{2^2ddz}{1.2dx^2} - \frac{2^3d^3z}{1.2.3dx^3} + \frac{2^4d^4z}{1.2.3.4dx^4} - \text{ꝛc.}$$

und diese Form erhält man aus der, wodurch vorhin das vorhergehende Glied ausgedruckt wurde, wenn man darin $\frac{x}{2}$ für x setzt. Man bekömmt also die Summe der geraden Glieder, wenn man, in die Summe aller, $\frac{x}{2}$ statt x setzt, und diese Summe ist demnach:

$$\tfrac{1}{2}\int z dx + \tfrac{1}{2}z + \frac{2\mathfrak{A}dz}{1.2dx} - \frac{2^3\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \frac{2^5\mathfrak{C}d^5z}{1.2\ldots6dx^5} - \text{ꝛc.}$$

Zieht man das Zwiefache dieser Summe von der vorhergehenden ab, wenn x eine gerade Zahl, oder umgekehrt, wenn x eine ungerade Zahl wird: so stellt der Rest die Summe der Reihe

$$\overset{1}{a} - \overset{2}{b} + \overset{3}{c} - \overset{4}{d} + \overset{5}{e} - \ldots\ldots \overset{x}{\mp z}$$

dar, und es ist also dieselbe

$$=$$

$$\mp\left(\tfrac{1}{2}z + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}dz}{1.2dx} - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}d^3z}{1.2.3.4dx^3} + \text{etc.}\right) + C.$$

Dieser Ausdruck ist eben derselbe, als der so eben gefundene.

§. 184.

Man nehme statt z eine Potestät von x oder x^n, so daß die Summe folgender Reihe:

$$1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots\ldots \mp x^n$$

zu suchen sey. Da

$$\frac{dz}{1dx} = \frac{n}{1}x^{n-1};\quad \frac{d^3z}{1.2.3dx^3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3};\ \text{etc.}$$

ist: so wird die gesuchte Summe, wenn man die Coefficienten A, B, C, D, etc. braucht,

$$\mp\tfrac{1}{2}\left(x^n + \frac{A}{2}nx^{n-1} - \frac{B}{4}\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}\right.$$

$$+ \frac{C}{6}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}x^{n-5}$$

$$\left.- \frac{D}{8}\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{1.2\ldots\ldots 7}x^{n-7} + \text{etc.}\right) + C$$

und das obere Zeichen gilt, wenn x eine gerade, das untere hingegen, wenn es eine ungerade Zahl ist. Die beständige Größe C aber muß auf die Art bestimmt werden, daß die Summe verschwinde, wenn man $x = 0$ setzt, und es gilt in diesem Falle das obere Zeichen. Setzt man also für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, etc.: so bekommt man folgende Summationen:

I. $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \mp 1 = \mp\tfrac{1}{2}(1) + \tfrac{1}{2}$

Ist nemlich die Zahl der Glieder gerade, so ist die Summe $= 0$, und ist die Gliederzahl ungerade, so wird die Summe $= +1$.

II. $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots \mp x = \mp\tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{4}$.

Ist

Ist nemlich die Zahl der Glieder eine gerade Zahl, so ist die Summe $= -\frac{1}{2}x$, und im entgegenstehenden Falle $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

III. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots\ldots \mp x^2 = \mp \frac{1}{2}(x^2 + x)$
nemlich für die gerade Gliederzahl $= -\frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}x$
und für die ungerade $= +\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}x$

IV. $1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots\ldots \mp x^3 = \mp \frac{1}{2}(x^3 + \frac{3}{2}xx - \frac{1}{4}) - \frac{1}{8}$
nemlich für d. gerade Gliederz. $= -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2$
und für die ungerade $= +\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}$

V. $1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots\ldots \mp x^4 = \mp \frac{1}{2}(x^4 + 2x^3 - x)$
nemlich für die gerade Gliederz. $= -\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x$
und für die ungerade $= +\frac{1}{2}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x$

rc.

§. 185.

Man erkennt hieraus, daß bey den geraden Potestäten, den Fall ausgenommen, wenn $n = 0$ ist, die hinzuzusetzende beständige Größe verschwindet, und daß in diesen Fällen die Summe der geraden Anzahl von Gliedern von der Summe der ungeraden Anzahl bloß in Ansehung der Zeichen verschieden ist. Wenn also x eine unendlich große Zahl ist, so fällt diese Unterscheidung weg, weil eine unendlich große Zahl weder gerade noch ungerade genennt werden kann, und es müssen also dabey die zweifelhaften Glieder weggelassen werden. Hieraus folgt, daß die Summe von Reihen dieser Art, wenn sie ohne Ende fortlaufen, bloß in der hinzuzufügenden beständigen Größe bestehe. Aus diesem Grunde ist:

$1 - 1 + 1 - 1 +$ rc. ohne Ende $= \frac{1}{2}$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{A}{4} = + \frac{(2^2-1)\mathfrak{A}}{2}$$

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \text{rc.} \ldots\ldots = 0$$

$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \text{rc.} \ldots\ldots = \frac{B}{8} = - \frac{(2^4-1)\mathfrak{B}}{4}$$

$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \text{2c.} \ldots\ldots = 0$$

$$1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \text{2c.} \ldots\ldots = \frac{C}{12} = + \frac{(2^6-1)\mathfrak{C}}{6}$$

$$1 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + \text{2c.} \ldots\ldots = 0$$

$$1 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + \text{2c.} \ldots\ldots = \frac{D}{16} = - \frac{(2^8-1)\mathfrak{D}}{8}$$

2c.

Eben diese Summen findet man nach der obigen für diejenigen Reihen erklärten Methode, in welchen die Zeichen $+$ und $-$ mit einander abwechseln.

§. 186.

Wenn man für n negative Zahlen setzt, so wird die Summe ein ohne Ende fortlaufender Ausdruck. Es sey $n = -1$, so ist die Summe der Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots \mp \frac{1}{x}$$

$$=$$

$$\mp \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{A}{2x^2} + \frac{B}{4x^4} - \frac{C}{6x^6} + \frac{D}{8x^8} - \text{2c.}\right) + C.$$

Da aber die beständige Größe C hier nicht aus dem Falle bestimmt werden kann, wenn $x = 0$ ist, so muß man solches aus einem andern thun. Es sey $x = 1$, so ist, weil alsdenn die Summe $= 1$ ist, und das untere Zeichen genommen werden muß,

$$C = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{6} + \text{2c.}\right)$$

oder

$$C = \tfrac{1}{2} + \frac{A}{4} - \frac{B}{8} + \frac{C}{12} - \frac{D}{16} + \text{2c.}$$

Oder man setze $x = 2$, so wird, weil alsdenn die Summe $= \frac{1}{2}$ ist, und das untere Zeichen gilt,

C =

$$C = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2 \cdot 2^2} + \frac{B}{4 \cdot 2^4} - \frac{C}{6 \cdot 2^6} + \text{ꝛc.}\right)$$

oder

$$C = \tfrac{3}{4} - \frac{A}{4 \cdot 2^2} + \frac{B}{8 \cdot 2^4} - \frac{C}{12 \cdot 2^6} + \frac{D}{16 \cdot 2^8} - \text{ꝛc.}$$

Oder aber $= 4$, wo denn

$$C = \frac{17}{24} - \frac{A}{4 \cdot 4^2} + \frac{B}{8 \cdot 4^4} - \frac{C}{12 \cdot 4^6} + \frac{D}{16 \cdot 4^8} - \text{ꝛc.}$$

werden wird. Man mag indeß diese beständige Größe bestimmen wie man will, so findet man dafür stets denselben Werth. Dieser Werth druckt zugleich die Summe der ohne Ende fortlaufenden Reihe aus, welche $= 12$ ist.

§. 187.

Uebrigens lassen sich mittelst dieser neuen Zahlen A, B, C, D, E, ꝛc. die Summen der reciproken Potestäten-Reihen, wenn die Exponenten gerade Zahlen sind und darin bloß die ungeraden Zahlen vorkommen, sehr leicht finden. Denn setzt man

$$1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \text{ꝛc.} = s$$

so wird

$$\frac{1}{2^{2n}} \qquad + \frac{1}{4^{2n}} \qquad + \frac{1}{6^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{s}{2^{2n}}$$

und dieses von jenem abgezogen giebt,

$$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{(2^{2n} - 1)s}{2^{2n}}$$

Da wir also die Werthe von s für die einzelnen Werthe von n schon mitgetheilt haben, §. 125, so ist:

1 +

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ꝛc.} = \frac{A}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \text{ꝛc.} = \frac{B}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \text{ꝛc.} = \frac{C}{1.2.3\ldots6} \cdot \frac{\pi^6}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \text{ꝛc.} = \frac{D}{1.2.3\ldots8} \cdot \frac{\pi^8}{4}$$

$$1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \text{ꝛc.} = \frac{E}{1.2.3\ldots10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4}$$

ꝛc.

Wenn aber alle Zahlen vorkommen und die Zeichen abwechseln, so bekommt man, weil

$$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \text{ꝛc.} = \frac{(2^{2n}-1)s - s}{2^{2n}}$$

ist,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{ꝛc.} = \frac{(A - 2\mathfrak{A})}{1.2} \cdot \frac{\pi^2}{4} = \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.2} \cdot \pi^2$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.} = \frac{(B - 2\mathfrak{B})}{1.2.3.4} \cdot \frac{\pi^4}{4} = \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4} \cdot \pi^4$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \text{ꝛc.} = \frac{(C - 2\mathfrak{C})}{1.2\ldots6} \cdot \frac{\pi^6}{4} = \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1.2\ldots6} \cdot \pi^6$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \text{ꝛc.} = \frac{(D - 2\mathfrak{D})}{1.2\ldots8} \cdot \frac{\pi^8}{4} = \frac{(2^7-1)\mathfrak{D}}{1.2\ldots8} \cdot \pi^8$$

$$1 - \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} - \frac{1}{4^{10}} + \text{ꝛc.} = \frac{(E - 2\mathfrak{E})}{1.2\ldots10} \cdot \frac{\pi^{10}}{4} = \frac{(2^9-1)\mathfrak{E}}{1.2\ldots10} \cdot \pi^{10}$$

ꝛc.

§. 188.

So wie wir bisher eine Reihe untersucht haben, deren Glieder Produkte aus den Gliedern einer geometrischen Reihe p, p^2, p^3, ꝛc. und aus den Gliedern irgend einer andern

dern Reihe, a, b, c, ꝛc. waren: so läßt sich auch eine Reihe behandeln, deren Glieder Produkte aus den Gliedern von irgend zwey Reihen sind, wovon die eine als bekannt betrachtet wird. Es sey die bekannte Reihe:

$$\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \ldots\ldots\ldots\ldots \overset{x}{Z}$$

die unbekannte hingegen:

$$a + b + c + \ldots\ldots\ldots\ldots z$$

und die Summe folgender Reihe zu suchen:

$$Aa + Bb + Cc + \ldots\ldots\ldots\ldots Zz$$

die wir $= Zs$ setzen wollen. Setzt man in der bekannten Reihe das vorletzte Glied $= Y$, und $x - 1$ statt x in den Ausdruck der Summe $S.Zs$: so geht derselbe in folgenden über:

$$Y\left(s - \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \text{ꝛc.}\right)$$

Da dieser Ausdruck die Summe der Reihe Zs ohne das letzte Glied Zz darstellt, so wird

$$Zs - Zz = Ys - \frac{Yds}{dx} + \frac{Ydds}{2dx^2} - \frac{Yd^3s}{6dx^3} - \text{ꝛc.}$$

und diese Gleichung druckt das Verhältniß aus, welches die Summe Zs zu den Größen Y, Z und s hat.

§. 189.

Um dieselbe aufzulösen lasse man zuvörderst die Differenzial-Glieder aus der Acht, wodurch $s = \frac{Zz}{Z-Y}$ wird. Man setze $\frac{Zz}{Z-Y} = P^1$, und genau sey $s = P^1 + p$. Bringt man diesen Werth in die Gleichung, so erhält man:

(Z—Y)p

$$(Z-Y)p = -\frac{YdP^1}{dx} + \frac{YddP^1}{2dx^2} - \text{etc.}$$

$$-\frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^2} - \text{etc.}$$

Man setze auf beyden Seiten YP^1 hinzu, und da $P^1 - \frac{dP^1}{dx} + \frac{ddP^1}{2dx^2} - \text{etc.}$ der Werth von P^1 ist, der entsteht, wenn man $x - 1$ für x nimmt, so sey dieser Werth $= P$. Alsdann ist

$$(Z-Y)p + YP^1 = YP - \frac{Ydp}{dx} + \frac{Yddp}{2dx^2} - \text{etc.}$$

und läßt man die Differenzialien weg, so wird

$$p = \frac{Y(P - P^1)}{Z - Y}.$$

Man setze $\frac{Y(P - P^1)}{Z - Y} = Q^1$, und dabey sey $p = Q^1 + q$: so wird

$$(Z-Y)q = -\frac{Y(dQ^1 + dq)}{dx} + \frac{Y(ddQ^1 + ddq)}{2dx^2} - \text{etc.}$$

und setzt man den Werth, welchen man für Q^1 findet, wenn man $x - 1$ statt x setzt, $= Q$, so bekommt man

$$(Z-Y)q + YQ^1 = YQ - \frac{Ydq}{dx} + \frac{Yddq}{2dx^2} - \text{etc.}$$

woher denn, wenn man die Differenzialien wegläßt,

$$q = \frac{Y(Q - Q^1)}{Z - Y}$$

wird. Man setze $\frac{Y(Q - Q^1)}{Z - Y} = R^1$, und genau sey $q = R^1 + r$: so findet man auf ähnliche Art $r = \frac{Y(R - R^1)}{Z - Y}$, und fährt man auf diesem Wege fort, so wird die gesuchte Summe

$$Zs = Z(P^1 + Q^1 + R^1 + \text{etc.})$$ seyn.

§. 190.

§. 190.

Ist also irgend eine Reihe

$$Aa + Bb + Cc + \ldots\ldots + Yy + Zz$$

gegeben: so läßt sich die Summe derselben auf folgende Art bestimmen.

Man setze und indem man $x - 1$ setzt anstatt x

$$\frac{Zz}{Z - Y} = P^1; \quad \text{gehe } P^1 \quad \text{über in } P$$

$$\frac{Y(P - P^1)}{Z - Y} = Q^1; \quad \ldots\ldots \quad Q^1 \quad \ldots\ldots \quad Q$$

$$\frac{Y(Q - Q^1)}{Z - Y} = R^1; \quad \ldots\ldots \quad R^1 \quad \ldots\ldots \quad R$$

$$\frac{Y(R - R^1)}{Z - Y} = S^1; \quad \ldots\ldots \quad S^1 \quad \ldots\ldots \quad S$$

rc.

Hat man diese Werthe gefunden, so ist die Summe der Reihe =

$$ZP^1 + ZQ^1 + ZR^1 + ZS^1 + \text{rc.} + C$$

oder einer beständigen Größe, wobey die Summe $= 0$ wird, wenn man $x = 0$ setzt, oder, denn dies läuft eben darauf hinaus, wodurch alles so eingerichtet wird, daß dabey irgend einem bestimmten Falle ein Genüge geschieht.

§. 191.

Da diese Formel keine Differenzialien enthält so ist ihre Anwendung in vielen Fällen sehr leicht, und man bekömmt darnach öfters die wahre Summe. Wird z. B. die Reihe:

$$p + 4p^2 + 9p^3 + 16p^4 + \ldots\ldots + x^2p^x$$

gegeben: so setze man $Z = p^x$ und $z = x^2$, wo also $Y = p^{x-1}$; $\frac{Z}{Z-Y} = \frac{p}{p-1}$; und $\frac{Y}{Z-Y} = \frac{1}{p-1}$ wird. Hierdurch bekommt man

P =

$$P^{I} = \frac{px^2}{p-1}; \quad P = \frac{pxx - 2px + p}{p-1}$$

$$Q^{I} = -\frac{2px+p}{(p-1)^2}; \quad Q = -\frac{2px+3p}{(p-1)^2}$$

$$R^{I} = \frac{2p}{(p-1)^3}; \quad R = \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$S^{I} = 0$; so wie auch alle übrige.

Folglich ist die Summe =

$$p^x\left(\frac{px^2}{p-1} - \frac{2px+p}{(p-1)^2} + \frac{2p}{(p-1)^3}\right) - \frac{p}{(p-1)^2} - \frac{2p}{(p-1)^3}$$

$$=$$

$$p^{x+1}\left(\frac{x^2}{p-1} - \frac{2x}{(p-1)^2} + \frac{p+1}{(p-1)^3}\right) - \frac{p-1}{(p-1)^3}$$

wie wir bereits oben gefunden haben.

§. 192.

Auf ähnliche Art, als wir zu diesem Summen-Ausdrucke gelangt sind, können wir einen andern für den Fall finden, wenn die gegebene Reihe nicht aus zwey andern Reihen zusammengesetzt ist; und dieser Ausdruck läßt sich insbesondere alsdenn brauchen, wenn man bey dem vorhergehenden endlich verschwindende Nenner bekommt. Es sey also die Reihe

$$\begin{matrix} & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & & & x \\ s & = & a & + & b & + & c & + & d & + & \ldots\ldots & + & z \end{matrix}$$

gegeben. Da die Summe, wenn man $x-1$ für x setzt, das letzte Glied verliert, so ist

$$s - z = s - \frac{ds}{dz} + \frac{dds}{2dx^2} - \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

oder

$$z = \frac{ds}{dz} - \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} - \frac{d^4s}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Da

Da hier die Summe s selbst nicht vorkommt, so lasse man die höheren Differenzialien weg, damit $s = \int z\,dx$ werde. Ferner setze man $\int z\,dx = P^{I}$, der Werth davon gehe in P über, wenn man $x - 1$ für x setzt, und genau sey $s = P^{I} + p$. Alsdann ist

$$z = \frac{dP^{I}}{dx} - \frac{ddP^{I}}{2dx^2} + \text{ꝛc.} + \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2dx^2} + \text{ꝛc.}$$

$$\text{Da } P = P^{I} - \frac{dP^{I}}{dx} + \frac{ddP^{I}}{2dx^2} - \text{ꝛc. ist,}$$

so wird

$$Z - P^{I} + P = \frac{dp}{dx} - \frac{ddp}{2dx^2} + \text{ꝛc.}$$

und daher

$$p = \int (Z - P^{I} + P)\,dx.$$

Wird ferner $\int (Z - P^{I} + P)\,dx = Q^{I}$ gesetzt, und geht dieser Werth in Q über, wenn man $x - 1$ für x setzt; so sey

$$\int (z - P^{I} + P - Q^{I} + Q)dx = R^{I} = Q^{I} - \int (Q^{I} - Q)dx$$

ferner

$$R^{I} - \int (R^{I} - R)\,dx = S^{I}; \text{ ꝛc.}$$

so ist die gesuchte Summe

$$s = P^{I} + Q^{I} + R^{I} + S^{I} + \text{ꝛc.} + C$$

C so angenommen daß dadurch einem bestimmten Falle ein Genüge geschieht.

§. 193.

Durch eine geringe Veränderung der Buchstaben führt man diese Summation auf folgendes zurück. Es sey die Reihe:

$$\begin{array}{l} \quad\;\; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \qquad\qquad\qquad x \\ s = a + b + c + d + \ldots\ldots + z \end{array}$$

zu summiren.

Man setze	und wenn $x-1$ für x gesetzt wird
$\int z\,dx = P$	so gehe P über in p
$P - \int(P-p)\,dx = Q$	Q . . . q
$Q - \int(Q-q)\,dx = R$	R . . . r
ꝛc.	

Hat man diese Werthe gefunden, so ist die gesuchte Summe

$$s = P + Q + R + S + \text{ꝛc.}$$

und dieser Ausdruck druckt die Summe sehr vortheilhaft aus, wenn jene Integralien dargestellt werden können. Es sey, um den Gebrauch desselben durch ein Beyspiel zu erläutern, $z = xx + x$, so ist

$$P = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx; \qquad p = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}$$
$$P - p = xx - \tfrac{1}{6}; \quad \text{und } \int(P-p)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{6}x$$
$$Q = \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x; \qquad q = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{5}{6}x + \tfrac{1}{3}$$
$$Q - q = x - \tfrac{1}{3}; \quad \text{und } \int(Q-q)\,dx = \tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{3}x$$
$$R = \tfrac{1}{2}x; \qquad r = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}$$
$$R - r = \tfrac{1}{2}; \quad \text{und } \int(R-r)\,dx = \tfrac{1}{2}x$$

$S = 0$; und so auch alle übrige Glieder. Daher ist die gesuchte Summe

$$\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{3}x^3 + xx + \tfrac{2}{3}x = \tfrac{1}{3}x(x+1)(x+2)$$

Auf diese Art lassen sich also die Summen aller Reihen, deren allgemeine Glieder ganze rationale Funktionen von x sind, vermittelst fortgesetzter Integrationen finden; und es erhellet daraus sehr deutlich, was für ein weitläuftiges Feld die Lehre von der Summirung der Reihen sey, und was für eine Menge von Schriften mit den Methoden dazu, die theils schon bekannt sind, theils erst noch erfunden werden müssen, angefüllt werden könne.

§. 194.

§. 194.

Bis jetzt haben wir die Summen der Reihen vom ersten Gliede an bis zu dem, dessen Anzeiger x ist, gesucht, und nach der Erforschung derselben findet man die Summen eben dieser ohne Ende fortlaufenden Reihen, wenn man $x = \infty$ setzt. Oft gelangt man indeß hierzu auf eine bequemere Art, wenn man nicht die Summe der Glieder vom ersten an bis zu dem xten, sondern von dem xten an ohne Ende sucht, und es ist dieser Weg insbesondere bey den letztern Ausdrücken vortheilhaft. Es sey also eine Reihe gegeben, deren allgemeines oder dem Anzeiger x zugehöriges Glied durch z, das folgende zu dem Anzeiger $x + 1$ gehörige aber durch z^{I}, und die auf dieses folgenden durch z^{II}; z^{III}; angedeutet werden, und die Summe der Reihe zu suchen:

$$\begin{array}{ccccccccc} & x & & x+1 & & x+2 & & x+3 & \text{rc.} \\ s = & z & + & z^{I} & + & z^{II} & + & z^{III} & + \text{ rc. ohne Ende.} \end{array}$$

Hier ist die Summe s eine solche Funktion von x, daß man, wenn man darin $x + 1$ statt x setzt, die Summe ohne das erste Glied erhält. Da also bey dieser Substitution s in

$$s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \text{rc.}$$

übergeht, so wird

$$s - z = s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \text{rc.}$$

oder

$$0 = z + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \frac{d^4s}{24dx^4} + \frac{d^5s}{120dx^5} + \text{rc.}$$

§. 195.

Wenn wir nun den vorigen Weg wieder betreten, so wird bey Vernachläßigung der höhern Differenzialien s =

$C - \int z\,dx$. Man setze also $\int z\,dx = P$, und genau sey $s = C - P + p$: so ist

$$o = z - \frac{dP}{dx} - \frac{ddP}{2dx^2} - \frac{d^3P}{6dx^3} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \text{etc.}$$

Es gehe P in P^{I} über, wenn man $x + 1$ für x setzt, so ist

$$o = z + P - P^{I} + \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{2dx^2} + \frac{d^3p}{6dx^3} + \text{etc.}$$

Setzt man daher die höhern Differenzialien bey Seite, so wird

$$p = \int(P^{I} - P)\,dx - P.$$

Man setze $\int(P^{I} - P)\,dx - P = -Q$, und dabey sey $p = -Q + q$: so ist

$$o = z + P - P^{I} - \frac{dQ}{dx} - \frac{ddQ}{2dx^2} - \text{etc.} + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \text{etc.}$$

Es gehe Q in Q^{I} über, wenn man $x + 1$ für x setzt, so wird

$$o = z + P - P^{I} + Q - Q^{I} + \frac{dq}{dx} + \frac{ddq}{2dx^2} + \text{etc.}$$

und hieraus folgt

$$q = \int(Q^{I} - Q)\,dx - Q.$$

Wenn daher die I oberhalb neben jeder Größe den Werth anzeigt, welchen sie bekommt, wenn man $x + 1$ für x setzt, und dabey

$$\int z\,dx = P$$
$$P - \int(P^{I} - P)\,dx = Q$$
$$Q - \int(Q^{I} - Q)\,dx = R$$
$$R - \int(R^{I} - R)\,dx = S$$
$$\text{etc.}$$

angenommen wird, so ist die Summe der Reihe

$$z + z^{I} + z^{II} + z^{III} + z^{IV} + \text{etc.}$$
$$=$$
$$C - P - Q - R - S - \text{etc.}$$

wo

wo die beständige Größe C so beschaffen seyn muß, daß die ganze Summe verschwindet, wenn $x = \infty$ gesetzt wird. Da indeß die Anwendung dieses Ausdrucks Integrationen erfordert, so läßt sich der Gebrauch desselben hier noch nicht zeigen.

§. 196.

Um aber die Integral-Formeln zu vermeiden, wollen wir die Summe der Reihe $= ys$ setzen, wo y irgend eine bekannte Funktion von x bedeutet, welche die Werthe y^{I}; y^{II}; y^{III}; ꝛc. bekommt, wenn man $x + 1$; $x + 2$; $x + 3$; ꝛc. für x setzt. Setzt man nun $x + 1$ für x so bekommt man die vorhergehende Reihe ohne das erste Glied, und die Summe dieser abgekürzten Reihe ist daher

$$y^{I}\left(s + \frac{ds}{dx} + \frac{dds}{2dx^2} + \frac{d^3s}{6dx^3} + \text{ꝛc.}\right) = ys - z$$

oder

$$z + \frac{y^{I}ds}{dx} + \frac{y^{I}dds}{2dx^2} + \frac{y^{I}d^3s}{6dx^3} + \text{ꝛc.} = (y - y^{I})s$$

Läßt man daher die Differenzialien weg, so bekommt man $s = \frac{z}{y - y^{I}}$. Man setze $\frac{z}{y^{I} - y} = P$, und genau sey $s = -P + p$: so wird

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{y^{I}dP}{dx} - \frac{y^{I}ddP}{2dx^2} - \frac{y^{I}d^3P}{6dx^3} - \text{ꝛc.} \\ +\frac{y^{I}dp}{dx} + \frac{y^{I}ddp}{2dx^2} + \frac{y^{I}d^3p}{6dx^3} + \text{ꝛc.} \end{array}\right\} = (y - y^{I})p$$

und also

$$\frac{y^{I}dp}{dx} + \frac{y^{I}ddp}{2dx^2} + \frac{y^{I}d^3p}{6dx^3} + \text{ꝛc.} = y^{I}(P^{I} - P) - (y^{I} - y)p$$

Man setze $Q = \frac{y^{I}(P^{I} - P)}{y^{I} - y}$, und dabey sey $p = Q + q$: so wird

$$y^{I}(Q^{I}-Q)+y^{I}\left(\frac{dq}{dx}+\frac{ddq}{2dx^2}+\text{ꝛc.}\right)=-(y^{I}-y)q$$

Man setze $R=\dfrac{y^{I}(Q^{I}-Q)}{y^{I}-y}$, und $q=-R+r$.

Fährt man auf diese Art fort, so wird die Summe der Reihe

$$z+z^{I}+z^{II}+z^{III}+z^{IV}+\text{ꝛc.}$$

auf folgende Weise bestimmt. Es bedeute y irgend eine Funktion von x, und dabey werde gesetzt

$$P=\frac{z}{y^{I}-y}=\frac{z}{\Delta y}$$

$$Q=\frac{y^{I}(P^{I}-P)}{y^{I}-y}=\frac{y\Delta P}{\Delta y}+\Delta P$$

$$R=\frac{y^{I}(Q^{I}-Q)}{y^{I}-y}=\frac{y\Delta Q}{\Delta y}+\Delta Q$$

$$S=\frac{y^{I}(R^{I}-R)}{y^{I}-y}=\frac{y\Delta R}{\Delta y}+\Delta R$$

ꝛc.

Alsdann ist die gesuchte Summe =

$$C-Py-Qy-Ry-Sy-\text{ꝛc.}$$

wenn man für C eine solche beständige Größe nimmt, daß die Summe verschwindet, wenn man $x=\infty$ setzt.

§. 197.

Man nehme $y=a^{x}$, so wird, weil dann $y^{I}=a^{x+1}$ ist,

$$y^{I}-y=a^{x}(a-1)$$

und folglich

$$P=\frac{z}{a^{x}(a-1)};\qquad P^{I}=\frac{z^{I}}{a^{x+1}(a-1)}$$

$$Q=\frac{a(P^{I}-P)}{a-1}=\frac{z^{I}-az}{a^{x}(a-1)^2};\quad Q^{I}=\frac{z^{II}-az^{I}}{a^{x+1}(a-1)^2}$$

$$R=\frac{a(Q^{I}-Q)}{a-1}=\frac{z^{II}-2az^{I}+aaz}{a^{x}(a-1)^3}$$

S =

$$S = \frac{a(R^{I} - R)}{a - 1} = \frac{z^{III} - 3az^{II} + 3a^{2}z^{I} - a^{3}z}{a^{x}(a - 1)^{4}}$$

ꝛc.

Daher ist die Summe der gegebenen Reihe:

$$C - \frac{z}{a - 1} + \frac{z^{I} - az}{(a - 1)^{2}} - \frac{z^{II} + 2az^{I} - a^{2}z}{(a - 1)^{3}}$$
$$+ \frac{z^{III} - 3az^{II} + 3a^{2}z^{I} - a^{3}z}{(a - 1)^{4}}$$

ꝛc.

Eben dieser Summen-Ausdruck ist schon oben im ersten Capitel gefunden worden. Es lassen sich aber hieraus, indem man für y andere Werthe setzt, unzählige andere Ausdrücke ableiten, und daraus jedesmal derjenige wählen, welche für den daseyenden Fall der bequemste ist.