Leonhard Euler's Vollständige Anleitung zur Differenzial-Rechnung

Euler, Leonhard

Berlin [u.a.], 1790

Drittes Capitel. Von der Erfindung der Differenzen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-52909

Drittes Capitel.

Von der Erfindung der Differenzen.

§. 44.

Wie man aus den Differenzen der Funktionen die Differenzialien derselben auf eine leichte Art zu finden im Stande ist, haben wir im Anfange ausführlich gezeigt, und selbst aus dieser Quelle den Grund der Differenzialien abgeleitet. Denn wenn die Differenzen, die man endlich annimmt, verschwinden und in Nichts übergehen, so entstehen daraus die Differenzialien; und da in diesem Falle viele ja oft unzählige Glieder von denen, welche die Differenz ausmachen, weggelassen werden, so lassen sich die Differenzialien viel leichter finden, und auf eine bequemere, genauere und deutlichere Art ausdrucken als die Differenzen. Aus diesem Grunde scheint aber auch der Rückweg von den Differenzialien zu den Differenzen verschlossen zu seyn; indeß lassen sich gleichwohl auf dem Wege, den wir hier betreten wollen, aus den Differenzialien aller Ordnungen irgend einer Funktion alle Differenzen derselben bestimmen.

§. 45.

Es sey y irgend eine Funktion von x, die bey der Substitution von $x + dx$ für x in $y + dy$ übergehe. Setzt man nun von neuem $x + dx$ für x, so wird der Werth $y + dy$ um sein Differenzial $dy + ddy$ vermehrt, und also $= y +$

2dy

$2dy + ddy$, und dieser Werth entspricht dem Werthe $x + 2dx$ von x. Fährt man daher continuirlich fort, die Größe x um ihr Differenzial dx zu vermehren, so daß daraus nach und nach

$$x + dx;\quad x + 2dx;\quad x + 3dx;\quad x + 4dx;\ \text{ꝛc.}$$

wird: so sind die zugehörigen Werthe von y, um sie tabellarisch darzustellen, folgende:

Werthe von x	Dazu gehörende Werthe der Funktion y
$x + dx$	$y + dy$
$x + 2dx$	$y + 2dy + ddy$
$x + 3dx$	$y + 3dy + 3ddy + d^3y$
$x + 4dx$	$y + 4dy + 6ddy + 4d^3y + d^4y$
$x + 5dx$	$y + 5dy + 10ddy + 10d^3y + 5d^4y + d^5y$
$x + 6dx$	$y + 6dy + 15ddy + 20d^3y + 15d^4y + 6d^5y + d^6y$
ꝛc.	ꝛc.

§. 46.

Ueberhaupt also bekommt y, wenn x in $x + ndx$ übergeht, diese Form:

$$y + \frac{n}{1}dy + \frac{n(n-1)}{1.2}ddy + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3y + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}d^4y + \text{ꝛc.}$$

In diesem Ausdrucke ist nun zwar jedes folgende Glied unendlichmal kleiner als das vorhergehende, allein wir haben gleichwohl keines ausgelassen, um diesen Ausdruck zu unserer gegenwärtigen Absicht brauchbar zu machen. Denn läßt man n eine unendlich große Zahl bedeuten, so ist bereits angemerkt worden, daß das Produkt aus einer unendlich großen Zahl in eine unendlich kleine eine endliche Größe ist; und es kann daher allerdings das zweyte Glied dem ersten homogen werden, oder $n\,dy$ der Ausdruck einer endlichen Größe seyn. Aus eben dem Grunde kann das dritte Glied $\frac{n(n-1)}{1.2}ddy$, obgleich ddy unendlichmal kleiner ist als dy, weil nemlich $\frac{n(n-1)}{1.2}$ unendlichmal größer ist als n, eine endliche Größe vorstellen, und man darf daher, wenn n eine unendlich große Zahl bedeutet, keines von den Gliedern des obigen Ausdrucks weglassen.

§. 47.

Wenn man aber n eine unendlich große Zahl bedeuten läßt, so hat jede Zahl, die man aus n und jeder endlichen Zahl entweder durch die Addition oder durch die Subtraction zusammensetzt, zu n das Verhältniß der Gleichheit, und man kann daher für jeden der Faktoren $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$ rc. bloß n setzen. Denn da

$$\frac{n(n-1)}{1.2}ddy = \tfrac{1}{2}nnddy - \tfrac{1}{2}nddy$$

ist; so steht das Glied $\frac{1}{2}nnddy$ zu $\frac{1}{2}nddy$ in dem Verhältnisse von n zu 1, und es verschwindet folglich dieser letztere in Ansehung des erstern, so daß man $\frac{1}{2}nn$ für $\frac{n(n-1)}{1.2}$ setzen kann. Auf eine ähnliche Art kann man den Coefficienten des dritten Gliedes $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ in $\frac{n^3}{6}$ zusammenziehen, und eben so in dem folgenden Coefficienten die Zahlen, um welche n vermindert werden soll, aus der Acht lassen. Dadurch aber erhält die Funktion y, wenn man $x + ndx$ für x setzt, und n eine unendlich große Zahl bedeutet, folgende Form:

$$y + \frac{ndy}{1} + \frac{nnddy}{1.2} + \frac{n^3d^3y}{1.2.3} + \frac{n^4d^4y}{1.2.3.4} + \frac{n^5d^5y}{1.2.3.4.5} + \text{rc.}$$

§. 48.

Da nun das Produkt $n\,dx$, wenn n eine unendlich große Zahl ist, der unendlichen Kleinheit von dx ungeachtet, eine endliche Größe ausdrucken kann: so wollen wir $n\,dx = \omega$ setzen, so daß $n = \frac{\omega}{dx}$ sey. Hierbey ist allerdings n eine unendlich große Zahl, da es der Quotient aus einer endlichen durch ein unendlich Kleines dividirten Größe ist. Brauchen wir aber diesen Werth von n, so sehen wir, daß die Funktion y von x, wenn x um die endliche Größe ω vermehrt, oder $x + \omega$ für x gesetzt wird, folgende Form bekommt:

$$y + \frac{\omega dy}{1\,dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4.dx^4} + \text{rc.}$$

deren einzelne Glieder durch eine fortgesetzte Differenziation von y gefunden werden können. Denn da y eine Funktion von x ist, so haben wir oben im ersten Theile gezeigt, daß alle diese Funktionen $\frac{dy}{dx}$; $\frac{ddy}{dx^2}$; $\frac{d^3y}{dx^3}$; rc. endliche Größen vorstellen.

§. 49.

Da also, wenn die veränderliche Größe x um die endliche Größe ω vermehrt wird, die Funktion y von x um ihre erste Differenz wächst, und wir oben diese Differenz durch Δy bezeichnet haben, wenn $\omega = \Delta x$ ist: so läßt sich die Differenz von y durch eine fortgesetzte Differenziation finden. Es ist nemlich

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc. oder}$$

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{1} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2} \cdot \frac{ddy}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{24} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} + \text{ꝛc.}$$

Auf diese Art wird die endliche Differenz Δy durch eine Progression ausgedruckt, deren Glieder nach den Potestäten von Δx fortlaufen. Hieraus erhellet ebenfalls, daß in dem Falle, wenn x nur um eine unendlich kleine Größe wächst, und also Δx in das Differenzial dx übergeht, alle Glieder gegen das erste verschwinden, und folglich $\Delta y = dy$ wird; denn wird $\Delta x = dx$, so geht nach der Erklärung die Differenz Δy in das Differenzial dy über.

§. 50.

Da, wenn man $x + \omega$ für x setzt, jede Funktion y von x folgende Form annimmt:

$$y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

so läßt sich die Wahrheit dieses Ausdrucks durch solche Beyspiele bestätigen, wo die höhern Differenzialien von y endlich Null werden denn in diesem Falle wird die Anzahl der Glieder des vorhergehenden Ausdrucks endlich.

Erstes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $xx - x$ zu finden, wenn man $x + 1$ für x setzt.

Man setze $y = xx - x$. Da nun, wenn x in $x + 1$ übergehen soll, $\omega = 1$ wird, so findet man, wenn man die Differenzialien sucht,

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1; \quad \frac{ddy}{dx^2} = 2; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0; \text{ ꝛc.}$$

Es geht also die Funktion $y = xx - x$, wenn man $x + 1$ für x setzt, in folgende über: $xx - x + 1(2x - 1) + \frac{1}{2}.2 = xx + x$. Setzt man wirklich $x + 1$ für x in $xx - x$, so wird

$$x \text{ in } x + 1$$
$$xx \text{ in } xx + 2x + 1$$

und also $xx - x$ in $xx + x$ verwandelt.

Zweytes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $x^3 + xx + x$ zu finden, wenn $x + 2$ für x gesetzt wird.

Setzt man $y = x^3 + xx + x$, so wird $\omega = 2$, und

$$\frac{dy}{dx} = 3xx + 2x + 1$$
$$\frac{ddy}{dx^2} = 6x + 2$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich folgender Werth der Funktion $y = x^3 + xx + x$, wenn man darin $x + 2$ für x setzt:

$$x^3 + xx + x + 2(3xx + 2x + 1) + \tfrac{4}{2}(6x + 2) + \tfrac{8}{6}.6 = x^3 + 7xx + 17x + 14;$$

und eben diesen Werth findet man, wenn man $x + 2$ selbst für x setzt.

Drittes Exempel.

Den Werth des Ausdrucks $xx + 3x + 1$ zu finden, wenn $x - 3$ für x gesetzt wird.

Hier ist also $\omega = -3$, und wenn man $y = xx + 3x + 1$ setzt,

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \text{ und}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2.$$

Es geht also die Funktion $xx + 3x + 1$, wenn man $x - 3$ für x setzt, in $x^2 + 3x + 1 - \frac{3}{1}(2x + 3) + \frac{9}{2} \cdot 2 = x^2 - 3x + 1$ über.

§. 51.

Wenn für ω eine negative Zahl gesetzt wird, so findet man den Werth, den die Funktion von x erhält, wenn die Größe x selbst um eine gegebene Größe ω vermindert wird. Setzt man nemlich $x - \omega$ für x, so bekommt die Funktion y von x folgenden Werth:

$$y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{ꝛc.}$$

und man kann daher alle Veränderungen finden, welche die Funktion y leidet, indem die Größe x auf die eine oder auf die andere Art verändert wird. Ist aber y eine ganze rationale Funktion von x, so wird der veränderte Werth von y, weil man alsdann endlich zu verschwindenden Differenzialien kommt, durch einen endlichen Ausdruck ausgedruckt; ist hingegen y keine solche Funktion, so ist der Ausdruck des veränderten Werthes eine unendliche Reihe, deren Summe durch einen endlichen Ausdruck dargestellt werden kann, weil man den veränderten Werth durch eine wirkliche Substitution leicht findet.

§. 52.

So wie die erste Differenz gefunden worden ist, so lassen sich auch die folgenden Differenzen durch ähnliche Ausdrücke

drücke

drücke angeben. Es erhalte nemlich x nach und nach die Werthe

$$x + \omega;\quad x + 2\omega;\quad x + 3\omega;\quad x + 4\omega;\ \text{rc.}$$

und die diesen Werthen entsprechende Werthe von y seyen

$$y^{I};\quad y^{II};\quad y^{III};\quad y^{IV};\ \text{rc.}$$

wie wir im Anfange dieses Werks angenommen haben. Da also

$$y^{I};\quad y^{II};\quad y^{III};\quad y^{IV};\ \text{rc.}$$

die Werthe sind, welche y erhält, wenn man für x nach und nach

$$x + \omega;\quad x + 2\omega;\quad x + 3\omega;\quad x + 4\omega;\ \text{rc.}$$

setzt: so lassen sich nach der ertheilten Anweisung die Werthe von y auf folgende Art ausdrucken:

$$y^{I} = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{rc.}$$

$$y^{II} = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{rc.}$$

$$y^{III} = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{rc.}$$

$$y^{IV} = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{rc.}$$

rc.

§. 53.

Da also, wenn Δy, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, $\Delta^4 y$, rc. die erste, zweyte, dritte, vierte Differenz u. s. f. bedeuten,

$$\Delta y = y^{I} - y$$
$$\Delta^2 y = y^{II} - 2y^{I} + y$$
$$\Delta^3 y = y^{III} - 3y^{II} + 3y^{I} - y$$
$$\Delta^4 y = y^{IV} - 4y^{III} + 6y^{II} - 4y^{I} + y$$

rc.

ist:

ist: so lassen sich jene Differenzen durch die Differenzialien auf folgende Art ausdrucken:

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{(2^2 - 2.1)\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{(2^3 - 2.1)\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{(2^4 - 2.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{(3^3 - 3.2^3 + 3.1)\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{(3^4 - 3.2^4 + 3.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{(4^4 - 4.3^4 + 6.2^4 - 4.1)\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{(4^5 - 4.3^5 + 6.2^5 - 4.1)\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

§. 54.

Der große Nutzen, den diese Ausdrücke für die Differenzen in der Lehre von den Reihen und den Progressionen haben, fällt theils von selbst in die Augen, theils wird er in dem Folgenden ausführlicher beschrieben werden. Indeß wollen wir in dem gegenwärtigen Capitel den Nutzen erwägen, der daher für die Kenntniß der Reihen unmittelbar fließt. Ob man nun gleich die Anzeiger der Glieder jeglicher Reihe gewöhnlicher Weise so annimmt, daß sie eine arithmetische Progression, deren Differenz 1 ist, ausmachen; so wollen wir doch, um dieser Untersuchung einen desto größern Umfang zu geben, und die Anwendung derselben zu erleichtern, die Differenz $= \omega$ setzen, so daß, wenn das allgemeine Glied, oder dasjenige, welches dem Anzeiger x entspricht, y ist, die folgenden zu den Anzeigern $x + \omega$, $x + 2\omega$, $x + 3\omega$, ꝛc. gehören. Wenn also zu diesen Anzeigern

$$x,\ x + \omega,\ x + 2\omega,\ x + 3\omega,\ x + 4\omega,\ \text{ꝛc.}$$

folgende

folgende Glieder y, P, Q, R, S, ꝛc.
gehören, so werden dieselben aus y und seinen Differenzialien auf folgende Art bestimmt:

$$P = y + \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^4} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$Q = y + \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$R = y + \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$S = y + \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\,\omega^4 d^4y}{24\,dx^2} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

§. 55.

Wenn diese Ausdrücke von einander abgezogen werden, so fällt y aus den Differenzen weg, und es ist

$$P - y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$Q - P = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{3\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{7\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{15\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$R - Q = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{5\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{19\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{65\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$S - R = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{7\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{37\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{175\,\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T - S = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{61\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{369\,\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Wenn diese Ausdrücke abermals von einander subtrahirt werden, so fallen auch die ersten Differenzialien weg, und es ist

$$Q - 2P + y = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{14\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$R - 2Q + P = \frac{2x^2 ddy}{2dx^2} + \frac{12\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{50\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$S - 2R + Q = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{18\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{110\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T - 2S + R = \frac{2\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{24\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{194\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Bey nochmaliger Subtraction fallen die zweyten Differenzialien aus der Rechnung weg, und es wird

$$R - 3Q + 3P - y = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{36\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$S - 3R + 3Q - P = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{60\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T - 3S + 3R - Q = \frac{6\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{84\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Setzt man die Subtraction weiter fort, so wird

$$S - 4R + 6Q - 4P + y = \frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T - 4S + 6R - 4Q + P = \frac{24\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc. und

$$T - 5S + 10R - 10Q + 5P - y = \frac{120\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{ꝛc.}$$

§. 56.

Wenn also y eine ganze rationale Funktion von x ist, so kommt man, wenn man auf diese Art fortgeht, weil alsdann die höhern Differenzialien endlich verschwinden, zu verschwindenden Ausdrücken. Da also diese Ausdrücke die Diffe-

Diffe-

Differenzen von y sind, so wollen wir ihre Form und ihre Coefficienten genauer erwägen.

$$y = y$$

$$\Delta y = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{rc.}$$

$$\Delta^2 y = \frac{\omega^2 ddy}{dx^2} + \frac{3\omega^3 d^3y}{3dx^3} + \frac{7\omega^4 d^4y}{3.4dx^4} + \frac{15\omega^5 d^5y}{3.4.5.dx^5} + \frac{31\omega^6 d^6y}{3.4.5.6dx^6} + \text{rc.}$$

$$\Delta^3 y = \frac{\omega^3 d^3y}{dx^3} + \frac{6\omega^4 d^4y}{4dx^4} + \frac{25\omega^5 d^5y}{4.5dx^5} + \frac{90\omega^6 d^6y}{4.5.6dx^6} + \frac{301\omega^7 d^7y}{4.5.6.7dx^7} + \text{rc.}$$

$$\Delta^4 y = \frac{\omega^4 d^4y}{dx^4} + \frac{10\omega^5 d^5y}{5dx^5} + \frac{65\omega^6 d^6y}{5.6dx^6} + \frac{350\omega^7 d^7y}{5.6.7dx^7} + \text{rc.}$$

$$\Delta^5 y = \frac{\omega^5 d^5y}{dx^5} + \frac{15\omega^6 d^6y}{6dx^6} + \frac{140\omega^7 d^7y}{6.7dx^7} + \frac{1050\omega^8 d^8y}{6.7.8dx^8} + \text{rc.}$$

$$\Delta^6 y = \frac{\omega^6 d^6y}{dx^6} + \frac{21\omega^7 d^7y}{7dx^7} + \frac{266\omega^8 d^8y}{7.8dx^8} + \frac{2646\omega^9 d^9y}{7.8.9dx^9} + \text{rc.}$$

rc.

Wie die Nenner in diesen Reihen fortschreiten, fällt leicht in die Augen; was aber die Zähler betrifft, so werden die Coefficienten derselben auf die Art formirt, daß ein jeder eine Summe aus dem über ihm stehenden und aus dem Produkte des vorhergehenden in den Exponenten der Differenz ist. So ist in der Reihe, welche die Differenz $\Delta^6 y$ ausdruckt, $2646 = 1050 + 6.266$.

§. 57.

Nun wollen wir diese Reihe betrachten, wenn sie zugleich rückwärts fortgesetzt wird, und sie also auch die Glieder enthält, die zu den Anzeigern $x-\omega$; $x-2\omega$; $x-3\omega$; rc. gehören.

$$\begin{array}{cccc} x-4\omega; & x-3\omega; & x-2\omega; & x-\omega; \\ s, & r, & q, & p; \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} x; & x+\omega; & x+2\omega; & x+3\omega; & x+4\omega; & \text{rc.} \\ y, & P, & Q, & R, & S, & \text{rc.} \end{array}$$

Da also

$$p = y - \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{rc.}$$

$$q = y - \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^4} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{rc.}$$

$$r = y - \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{rc.}$$

$$s = y - \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{rc.}$$

rc.

ist; so wird, wenn man diese Werthe von den obigen P, Q, R, S, rc. abzieht,

$$\frac{P-p}{2} = \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{rc.}$$

$$\frac{Q-q}{2} = \frac{2\omega dy}{dx} + \frac{8\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{32\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{rc.}$$

$$\frac{R-r}{2} = \frac{3\omega dy}{dx} + \frac{27\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{243\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{rc.}$$

$$\frac{S-s}{2} = \frac{4\omega dy}{dx} + \frac{64\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{1024\omega^5 d^5y}{120dx^5} + \text{rc.}$$

rc.

Wenn man hingegen diese Werthe zu den obigen addirt, so fallen, so wie hier die Differenzialien der geraden Ordnun-

gen

gen, nunmehr die Differenzialien der ungeraden Ordnungen weg, und es wird:

$$\frac{P+p}{2} = y + \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{etc.}$$

$$\frac{Q+q}{2} = y + \frac{4\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{16\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{64\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{etc.}$$

$$\frac{R+r}{2} = y + \frac{9\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{81\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{729\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{etc.}$$

$$\frac{S+s}{2} = y + \frac{16\omega^2 ddy}{2dx^2} + \frac{256\omega^4 d^4y}{24dx^4} + \frac{4096\omega^6 d^6y}{720dx^6} + \text{etc.}$$

etc.

§. 58.

Da sich alle vorhergehenden Glieder ausdrucken lassen, so erhält man, wenn man dieselben in eine Summe zusammenzieht, das summirende Glied der gegebenen Reihe. Es sey nemlich das erste Glied dasjenige, welches zu dem Anzeiger $x - n\omega$ gehört, so ist das erste Glied selbst =

$$y - \frac{n\omega dy}{dx} + \frac{n^2\omega^2 ddy}{2dx^2} - \frac{n^3\omega^3 d^3y}{6dx^3} + \frac{n^4\omega^4 d^4y}{24dx^4} - \text{etc.}$$

Da nun das Glied, welches zu dem Anzeiger x gehört, $= y$, und die Anzahl aller Glieder $= n + 1$ ist: so ist die Summe aller Glieder vom ersten bis zum letzten y, dieses eingeschlossen, oder das summirende Glied =

$$\begin{aligned}(n+1)y &- \frac{\omega dy}{dx}(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n)\\ &+ \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2)\\ &- \frac{\omega^3 d^3y}{6dx^3}(1 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + n^3)\\ &+ \frac{\omega^4 d^4y}{24dx^4}(1 + 2^4 + 3^4 + \ldots\ldots\ldots + n^4)\end{aligned}$$

$$-\frac{\omega^5 d^5 y}{120 dx^5}(1 + 2^5 + 3^5 + \ldots\ldots\ldots + n^5)$$

ꝛc.

§. 59.

Wir haben aber oben (Th. 1. Cap. 2. §. 61. 62.) die Summen dieser Reihen gegeben, und wenn man daher diese Summen hier gebraucht, so wird die Summe der gegenwärtigen Reihe =

$$(n+1)y - \frac{\omega dy}{dx}(\tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n)$$
$$+ \frac{\omega^2 ddy}{2dx^2}(\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n)$$
$$- \frac{\omega^3 d^3 y}{6dx^3}(\tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2)$$
$$+ \frac{\omega^4 d^4 y}{24dx^4}(\tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n)$$
$$- \frac{\omega^5 d^5 y}{120dx^5}(\tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}n^2)$$

ꝛc.

wo sich n aus dem Anzeiger des Gliedes, von welchem an die Summe gerechnet wird, ergiebt. Ist also $\omega = 1$, ferner der Anzeiger des ersten Gliedes = 1, des zweyten = 2, und des letzten x, so daß die gegebene Reihe folgende ist:

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ldots\ldots\ x \\ a,\ b,\ c,\ d,\ \ldots\ldots\ldots\ y \end{array}$$

so ist die Summe dieser Reihe, (weil $x - n = 1$, und $n = x - 1$ ist)

$$= xy - \frac{dy}{dx}(\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x)$$

+ ddy

$$+ \frac{ddy}{2dx^2}\left(\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x\right)$$

$$- \frac{d^3y}{6dx^3}\left(\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x^2\right)$$

$$+ \frac{d^4y}{24dx^4}\left(\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{30}x\right)$$

$$- \frac{d^5y}{120dx^5}\left(\tfrac{1}{6}x^6 - \tfrac{1}{2}x^5 + \tfrac{5}{12}x^4 - \tfrac{1}{12}x^2\right)$$

$$+ \frac{d^6y}{720dx^6}\left(\tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{2}x^5 - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{42}x\right)$$

rc.

§. 60.

Aus diesem Ausdrucke für die Summe entspringt für die Lehre von den Reihen sehr wenig Vortheil, weil die Coefficienten sehr groß werden, wenn x eine große Zahl ist; indeß wird es gleichwohl nicht unnütz seyn, einiger daher fliessenden Eigenschaften zu erwähnen. Es sey also das allgemeine Glied $y = x^n$, und das Zeichen des summirenden Gliedes sey Sy oder $S.x^n$. Vorausgesetzt, daß diese Bezeichnung allenthalben statt finde, so ist

$$\tfrac{1}{2}xx - \tfrac{1}{2}x = S.x - x$$

$$\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x = S.x^2 - x^2$$

$$\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}xx = S.x^3 - x^3$$

rc.

Man erhält daher aus dem obigen Ausdrucke:

$$Sx^n = x^{n+1} - nx^{n-1}S.x + nx^n$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}S.x^2 - \frac{n(n-1)}{1.2}x^n$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}S.x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^n$$

rc.

Da aber

$$(1-1)^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{rc. ist,}$$

so ist

$$n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \text{rc.} = 1,$$

und es wird also, den Fall ausgenommen, wenn $n = 0$ ist, in welchem jener Ausdruck $= 0$ wird,

$$\begin{aligned} S.x^n = x^{n+1} + x^n &- n x^{n-1} S.x \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} S.x^2 \\ &- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} S.x^3 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4} S.x^4 \\ &\text{rc.} \end{aligned}$$

§. 61.

Damit sowohl die Wahrheit als die Kraft dieser Formel deutlicher werde, wollen wir einige einzelne Fälle erwägen. Es sey also zuvörderst

$$n = 1.$$

Alsdann ist

$$S.x = x^2 + x - Sx, \text{ oder } Sx = \frac{xx + x}{2}$$

wie solches bekannt genug ist. Ferner sey

$$n = 2.$$

Alsdann ist $S.x^2 = x^3 + xx - 2xS.x + S.x^2$. Da sich in dieser Gleichung die auf beyden Seiten befindlichen Glieder der $S.x^2$ einander aufheben, so erhält man daraus wieder wie vorhin $S.x = \frac{xx + x}{2}$. Nun sey

$n = 3$.

$$n = 3.$$

Dann ist $S.x^3 = x^4 + x^3 - 3x^2Sx + 3xS.x^2 - S.x^3$, und also

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - \tfrac{3}{2}x^2Sx + \tfrac{1}{2}x^3(x + 1).$$

Setzt man

$$n = 4;$$

so ist $S.x^4 = x^5 + x^4 - 4x^3Sx + 6x^2S.x^2 - 4xS.x^3 + S.x^4$, woraus, weil $S.x^4$ wegfällt,

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - x^2Sx + \tfrac{1}{4}x^3(x + 1)$$

so wie hieraus, wenn man von dem Dreyfachen desselben das Zweyfache der vorhergehenden Gleichung abzieht,

$$S.x^3 = \tfrac{3}{2}xS.x^2 - \tfrac{1}{4}x^3(x - 1)$$

wird. Setzt man

$$n = 5;$$

so wird

$$S.x^5 = x^6 + x^5 - 5x^4Sx + 10x^3S.x^2 - 10x^2S.x^3 + 5xS.x^4 - S.x^5,$$

oder

$$S.x^5 = \tfrac{5}{2}xS.x^4 - 5x^2S.x^3 + 5x^3S.x^2 - \tfrac{5}{2}x^4Sx + \tfrac{1}{2}x^5(x + 1)$$

und aus $n = 6$ folgt,

$$S.x^6 = x^7 + x^6 - 6x^5Sx + 15x^4S.x^2 - 20x^3S.x^3 + 15x^2S.x^4 - 6xS.x^5 + S.x^6$$

oder

$$S.x^5 = \tfrac{5}{2}xS.x^4 - \tfrac{10}{3}x^2S.x^3 + \tfrac{5}{2}x^3S.x^2 - x^4Sx + \tfrac{1}{6}x^5(x + 1).$$

§. 62.

Ueberhaupt ist also, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} x S.x^{2m} - \frac{(2m+1)2m}{2.1.2} x^2 S.x^{2m-1}$$
$$+ \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)}{2.1.2.3} x^3 S.x^{2m-2} - \ldots\ldots$$
$$- \frac{(2m+1)}{2} x^{2m} S x + \tfrac{1}{2} x^{2m+1}(x+1).$$

Wenn man aber $n = 2m + 2$ setzt, so findet man, weil die Glieder $S.x^{2m+2}$ einander aufheben:

$$S.x^{2m+1} = \frac{2m+1}{2} x S.x^{2m} - \frac{2(m+1)2m}{2.3} x^2 S.x^{2m-1}$$
$$+ \frac{(2m+1)2m(2m-1)}{2.3.4} x^3 S.x^{2m-2} - \ldots\ldots$$
$$- x^{2m} S.x + \frac{1}{2m+2} x^{2m+1}(x+1).$$

Es lassen sich also die Summen der ungeraden Potestäten aus den Summen der niedern Potestäten auf eine doppelte Art bestimmen, und aus der Combination dieser beyden Formeln kann man außerdem unzählige andere herleiten.

§. 63.

Man kann indeß die Summen der ungeraden Potestäten noch auf eine viel leichtere Art aus den vorhergehenden bestimmen, und es ist dazu genug, wenn man bloß die Summe der vorhergehenden geraden Potestät weiß. Denn aus den oben (Th. 1. Cap. 2. § 61. 62.) gegebenen Summen der Potestäten erhellet, daß die Zahl der Glieder, welche die Summen ausmachen, bloß bey den ungeraden Potestäten vermehret wird, so daß die Summe der ungeraden Potestät aus eben so viel Gliedern besteht, als die Summe der vorhergehehergehenden geraden Potestät. Ist nemlich die Summe der geraden Potestät $x^{2n} =$

$$S.x^{2n} = \alpha x^{2n+1} + \beta x^{2n} + \gamma x^{2n-1} - \delta x^{2n-3} + \varepsilon x^{2n-5} - \text{etc.}$$

denn wir haben gesehen, daß nach dem dritten Gliede ein Glied um das andere wegfällt, und daß die Zeichen abwechseln: so findet man daraus die Summe der folgenden Potestät x^{2n+1}, wenn man die Glieder von jener durch folgende Zahlen:

$$\frac{2n+1}{2n+2}x;\quad \frac{2n+1}{2n+1}x;\quad \frac{2n+1}{2n}x;\quad \frac{2n+1}{2n-1}x;\quad \frac{2n+1}{2n-2}x;\ \text{etc.}$$

multiplicirt, und es ist also:

$$S.x^{2n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\alpha x^{2n+2} + \frac{2n+1}{2n+1}\beta x^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n}\gamma x^{2n} - \frac{2n+1}{2n-1}\delta x^{2n-2} + \frac{2n+1}{2n-4}\varepsilon x^{2n-4} - \frac{2n+1}{2n-6}\zeta x^{2n-6} + \text{etc.}$$

Ist also die Summe der Potestät x^{2n} bekannt, so läßt sich daraus die Summe der folgenden Potestät x^{2n+1} leicht finden.

§. 64.

Diese Art, die folgenden Summen zu finden, läßt sich auch bey den geraden Potestäten gebrauchen. Zwar bekommen die Summen dieser Potestäten ein neues Glied, und dieses findet man durch diese Methode nicht; indeß läßt es sich aus der Reihe selbst leicht herleiten, da bekannt ist, daß die Summe derselben, wenn man $x = 1$ setzt, $= 1$ werden muß. Umgekehrt aber lassen sich allezeit aus der bekannten Summe einer jeden Potestät die Summen der vorhergehenden Potestäten finden. Denn wenn

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \zeta x^{n-7}$$
$$+ \text{2c.}$$

ist, so ist für die vorhergehende Potestät:

$$S.x^{n-1} = \frac{n+1}{n}\alpha x^n + \frac{n}{n}\beta x^{n-1} + \frac{n-1}{n}\gamma x^{n-2} - \frac{n-3}{n}\delta x^{n-4}$$
$$+ \text{2c.}$$

und von hier kann man soweit rückwärts fortgehen, als man will. Es muß aber bemerkt werden, daß α beständig $= \frac{1}{n+1}$ und $\beta = \frac{1}{2}$ ist, wie solches aus den vorhin gefundenen Formeln erhellet.

§. 65.

Bey einiger Aufmerksamkeit sieht man bald, daß man die Summe der Potestäten x^{n-1} findet, wenn man die Summe der Potestäten x^n differenziirt, und das Differenzial derselben durch $n\,dx$ dividirt; und es ist daher

$$d.S.x^n = n\,dx.S.x^{n-1}, \text{ und da } d.x^n = nx^{n-1}dx \text{ ist,}$$
auch
$$d.S.x^n = S.nx^{n-1}dx = S.d.x^n.$$

Hieraus erhellet, daß das Differenzial der Summe der Summe des Differenzials gleich ist, so daß, wenn überhaupt das allgemeine Glied irgend einer Reihe $= y$, und Sy das summirende Glied derselben ist, $S.dy = d.Sy$ wird; d. h. die Summe der Differenzialien aller Glieder ist gleich dem Differenziale der Summe dieser Glieder. Der Grund von dieser Gleichheit läßt sich aus dem, was wir oben über die Differenziation der Reihen gesagt haben, leicht abnehmen. Denn da

$$S.x^n = x^n + (x-1)^n + (x-2)^n + (x-3)^n + (x-4)^n + \text{2c.}$$

ist, so ist

$$\frac{d.S\ x^n}{n\,dx} = x^{n-1} + (x-1)^{n-1} + (x-2)^{n-1} + (x-3)^{n-1}$$

$$+ \text{2c.} = S.x^{n-1}$$

und dieser Beweis erstreckt sich auch auf alle andere Reihen.

§. 66.

Doch wir wollen zu dem Gegenstande zurückkehren, von welchen wir ausgegangen sind, nemlich zu den Differenzen der Funktionen, indem dabey noch eins und das andere anzumerken ist. Da wir gesehen haben, daß y, wenn solches eine Funktion von x ist, und allenthalben $x \pm \omega$ anstatt x gesetzt wird, folgenden Werth bekommt:

$$y \pm \frac{\omega dy}{dx} + \frac{\omega^2 ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{\omega^4 d^4y}{1.2.3.4dx^4} \pm$$

$$\frac{\omega^5 d^5y}{1.2.3.4.5dx^5} + \text{2c.}$$

so muß dieser Ausdruck statt finden, man mag für ω eine beständige Größe, was für eine man will, oder auch eine veränderliche von x abhangende Größe setzen. Denn bey der Aufsuchung der Werthe der Brüche $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, 2c. durch die Differenziation wird die Veränderlichkeit der Faktoren ω, ω^2, ω^3, 2c. nicht in Erwägung gezogen, und es ist daher gleich, ob ω eine beständige oder eine veränderliche von x abhangende Größe bedeute.

§. 67.

Wir wollen also annehmen, daß $\omega = x$ sey, und daß in der Funktion y allenthalben $x - x = 0$ für x gesetzt werde. Wenn also in irgend einer Funktion y von x anstatt x allenthalben 0 gesetzt wird, so wird der Werth dieser Funktion folgender:

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{ꝛc.}$$

Es zeigt also dieser Ausdruck allemal den Werth an, den jede Funktion y erhält, wenn man darin $x = 0$ setzt. Die Wahrheit dieser Behauptung werden folgende Exempel bestätigen.

Erstes Exempel.

Es soll $y = xx + ax + ab$ seyn, und der Werth davon, wenn $x = 0$, gefunden werden, welcher bekannter Maßen $= ab$ ist.

Da $y = xx + ax + ab$ ist, so wird

$$\frac{dy}{1dx} = 2x + a, \text{ und}$$

$$\frac{ddy}{1.2dx^2} = 1.$$

Folglich ist der gesuchte Werth =

$$x + ax + ab - x(2x + a) + xx.1 = ab.$$

Zweytes Exempel.

Es soll $y = x^3 - 2x + 3$ seyn, und der Werth davon für $x = 0$, der bekannter Maßen $= 3$ ist, gefunden werden.

Da $y = x^3 - 2x + 3$ ist, so wird

$$\frac{dy}{1dx} = 3xx - 2,$$

$$\frac{ddy}{1.2dx^2} = 3x$$

$$\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} = 1.$$

Folglich ist der gesuchte Werth =

$$x^3 - 2x + 3 - x(3xx - 2) + xx.3x - x^3.1 = 3.$$

Drittes

Drittes Exempel.

Es soll $y = \frac{x}{1-x}$ seyn, und der Werth davon für $x = 0$, der, wie leicht in die Augen fällt, $= 0$ ist, gesucht werden.

Da $y = \frac{x}{1-x}$ ist, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\frac{ddy}{1.2dx^2} = \frac{1}{(1-x)^3}$; $\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} = \frac{1}{(1-x)^4}$; ꝛc. und folglich der gesuchte Werth =

$$\frac{x}{1-x} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{xx}{(1-x)^3} - \frac{x^3}{(1-x)^4} + \frac{x^4}{(1-x)^5} - \text{ꝛc.}$$

Es ist also der Werth dieser Reihe $= 0$, welches auch daher erhellet, weil dieselbe, wenn man das erste Glied wegläßt, eine geometrische Reihe wird, deren Summe =

$$\frac{x}{(1-x)^2 + x(1-x)} = \frac{x}{1-x} \text{ ist.}$$

Hiernach ist der gefundene Werth $= \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$.

Viertes Exempel.

Es sey $y = e^x$, so daß e die Zahl bedeute, deren hyperbolischer Logarithme $= 1$ ist. Man soll den Werth von y für $x = 0$ finden, welcher, wie bekannt, $= 1$ ist.

Da $y = e^x$; so ist $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{ddy}{dx^2} = e^x$; ꝛc. und folglich der gesuchte Werth

$$= e^x - \frac{e^x x}{1} + \frac{e^x xx}{1.2} - \frac{e^x x^3}{1.2.3} + \frac{e^x x^4}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}$$

$$= e^x\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{ꝛc.}\right)$$

Nun

Nun haben wir aber oben in der Einl. in die Anal. d. Unendl. gesehen, daß die Reihe $1 - \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ — ꝛc. den Werth von e^{-x} ausdruckt. Folglich ist der gesuchte Werth $= e^x . e^{-x} = \frac{e^x}{e^x} = 1.$

Fünftes Exempel.

Wenn $y = \sin. x$ ist, so ist offenbar, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ ist. Eben dieses giebt aber auch die allgemeine Formel.

Denn da $y = \sin. x$ ist, so ist $\frac{dy}{dx} = \cos. x$; $\frac{ddy}{dx^2} = - \sin. x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = - \cos. x$; $\frac{d^4y}{dx^4} = \sin. x$; ꝛc. Setzt man also $x = 0$, so wird der Werth von y folgender:

$$\sin. x - \frac{x}{1}\cos. x - \frac{xx}{1.2}\sin. x + \frac{x^3}{1.2.3}\cos. x + \frac{x^4}{1.2.3.4}\sin. x$$

— ꝛc. oder

$$\sin. x\left(1 - \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$- \cos. x\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3\ldots7} + \text{ꝛc.}\right)$$

Da aber die erste Reihe den $\cos. x$, und die andere den $\sin. x$ ausdruckt, so ist der gesuchte Werth

$$= \sin. x . \cos. x - \cos. x . \sin. x = 0.$$

§. 68.

Hieraus erhellet also auch umgekehrt, daß, wenn y eine Funktion von x ist, die verschwindet, wenn man $x = 0$ setzt, alsdann auch seyn wird

$$y - \frac{xdy}{dx} + \frac{xxddy}{2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{ꝛc.} = 0,$$

und es ist dieses daher eine allgemeine Gleichung aller derer Funktionen, die, wenn $x = 0$ gesetzt wird, selbst verschwinden. Es ist also diese Gleichung so beschaffen, daß ihr allemal ein Genüge geschieht, man mag für y eine Funktion von x setzen, was für eine man will, wenn dieselbe nur für $x = 0$ ebenfalls verschwindet. Ist aber y eine solche Funktion von x, die für $x = 0$ den Werth A erhält, so ist

$$y - \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} - \text{ꝛc.} = A$$

und in dieser Gleichung sind alle Funktionen von x enthalten, die, wenn man $x = 0$ setzt, in A übergehen.

§. 69.

Wenn man $2x$ oder $x + x$ für x setzt, so bekommt jede Funktion y von x folgenden Werth:

$$y + \frac{xdy}{1dx} + \frac{x^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \frac{x^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} + \text{ꝛc.}$$

und setzt man nx, oder $x + (n-1)x$ für x, so ist der Werth der Funktion y folgender:

$$y + \frac{(n-1)xdy}{1dx} + \frac{(n-1)^2xxddy}{1.2dx^2} + \frac{(n-1)^3x^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ꝛc.}$$

Wenn aber überhaupt t für x gesetzt wird, so verwandelt sich jede Funktion y von x, weil alsdann $t = x + t - x$ wird, in folgende Form:

$$y + \frac{(t-x)dy}{1dx} + \frac{(t-x)^2ddy}{1.2dx^2} + \frac{(t-x)^3d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ꝛc.}$$

Wenn also v eine solche Funktion von t ist, als y von x, so ist, weil alsdann v aus y entspringt, wenn man t für x setzt,

$$v = y + \frac{(t-x)dy}{1dx} + \frac{(t-x)^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{(t-x)^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{rc.}$$

und von der Wahrheit dieser Behauptung kann man sich durch jedes Beyspiel überzeugen.

Exempel.

Wenn nemlich $y = xx - x$ ist, so ist offenbar, daß durch die Substitution von t für x, $v = tt - t$ wird. Eben das lehrt aber auch die gefundene Formel. Denn da

$$y = xx - x \text{ ist, so wird } \frac{dy}{dx} = 2x - 1, \text{ und } \frac{ddy}{2dx^2} = 1.$$

Folglich ist

$$v = xx - x + (t-x)(2x-t) + (t-x)^2 =$$
$$xx - x + 2tx - 2xx - t + x + tt - 2tx + xx = tt - t.$$

Wenn also y eine solche Funktion von x ist, die, wenn man $x = a$ setzt, in A übergeht, so ist, weil alsdann $t = a$, und $v = A$ wird,

$$A = y + \frac{(a-x)dy}{1dx} + \frac{(a-x)^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{(a-x)^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{rc.}$$

und dieser Gleichung thun daher alle Funktionen von x ein Genüge, die, wenn man $x = a$ setzt, in A übergehen.